

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ МАГНИТОРОТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО RKDG АЛГОРИТМА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

М. П. Галанин¹, В. В. Лукин², К. Л. Шаповалов³

Предложена параллельная реализация метода RKDG (Runge–Kutta Discontinuous Galerkin) для системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики в двумерной осесимметричной постановке на неструктурированных треугольных сетках. Разработан алгоритм бездивергентной реконструкции магнитного поля для цилиндрической системы координат, позволяющий получать физически адекватные результаты расчетов с высоким порядком точности. Показана высокая масштабируемость созданного параллельного кода на многопроцессорных установках, проведен анализ эффективности распараллеливания программы на кластере К-100 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. Представлены и обсуждены результаты моделирования магниторотационной неустойчивости в аккрецирующей оболочке протозвезды.

Ключевые слова: магниторотационная неустойчивость, магнитная гидродинамика, метод RKDG, параллельное программирование, MPI.

Введение. Явление магниторотационной неустойчивости (МРН) течения электропроводящей жидкости [1], по-видимому, определяет характеристики многих процессов, протекающих в астрофизических объектах, в частности процесса аккреции вещества на гравитирующий объект [2]. Поскольку при сохранении удельного момента импульса вращающейся плазмы центробежная сила в аккреционном диске не позволит веществу упасть на центральный объект, необходим механизм перераспределения удельного момента импульса от окрестностей звезды на периферию аккреционного диска. В качестве такого механизма в работах [3, 4] рассмотрена магниторотационная неустойчивость, приводящая к крупномасштабной турбулентности во вращающемся аккреционном диске.

В настоящей работе произведено моделирование поведения газопылевого облака в окрестности протозвезды, аналогичное модели, рассмотренной в статье [4]. В этой статье моделирование развития неустойчивости в аккреционном диске изучено в рамках модели изотермической плазмы. В нашей же работе аналогичный процесс рассмотрен в рамках полной системы двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) с переменной по времени и пространству температурой плазмы с учетом цилиндрической симметрии. Проведено моделирование развития неустойчивости в аккреционной оболочке протозвезды, аналогичной области образования молодой массивной звезды G31.41.

Для численного исследования данной модели применен разрывный метод Галеркина второго порядка (метод RKDG, Runge–Kutta Discontinuous Galerkin) [5, 6] на неструктурированной треугольной сетке. Методы DG (Discontinuous Galerkin) высокого порядка применяются для анализа различного рода неустойчивостей, что связано со сложной разрывной структурой решения в такого рода задачах [7]. Для корректного моделирования МРН в рамках цилиндрически симметричной постановки численный метод второго порядка для решения двумерных уравнений МГД в декартовой системе координат [8, 9] был расширен для применения в цилиндрической системе координат.

Анализ процесса формирования неустойчивости течения замагниченной плазмы требует использования подробных сеток. В то же время применение RKDG-метода само по себе является вычислительно затратным и приводит к необходимости использования параллельных вычислительных технологий для систем с общей и распределенной памятью. В настоящей статье описана параллельная реализация данного метода. Показана эффективность распараллеливания на тестовых задачах МГД.

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва; зав. отделом, e-mail: galan@keldysh.ru

² Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва; науч. сотр., e-mail: vvlukin@gmail.com

³ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (ИПМ РАН), Миусская пл., 4, 125047, Москва; ст. лаборант, e-mail: ShapovalovKL@yandex.ru

1. Система нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики. Система нестационарных уравнений идеальной магнитной гидродинамики в безразмерных консервативных переменных в цилиндрической системе координат (r, ϕ, z) в случае цилиндрической симметрии (решение не зависит от угла ϕ) может быть записана в следующей форме [10, 11]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathbf{F}_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{s}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u} = (\rho, \rho v_r, \rho v_\phi, \rho v_z, e, B_r, B_\phi, B_z)^\top$ — вектор консервативных переменных, векторы потоков \mathbf{F}_r и \mathbf{F}_z имеют вид

$$\mathbf{F}_r = \left(\rho v_r, \rho v_r^2 + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_r^2}{4\pi}, \rho v_r v_\phi - \frac{B_r B_\phi}{4\pi}, \rho v_r v_z - \frac{B_r B_z}{4\pi}, \right. \\ \left. \left(e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) v_r - B_r \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi}, 0, v_r B_\phi - v_\phi B_r, v_r B_z - v_z B_r \right)^\top, \\ \mathbf{F}_z = \left(\rho v_z, \rho v_z v_\phi - \frac{B_z B_\phi}{4\pi}, \rho v_z^2 + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} - \frac{B_z^2}{4\pi}, \rho v_z v_r - \frac{B_r B_z}{4\pi}, \right. \\ \left. \left(e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) v_z - B_z \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})}{4\pi}, v_z B_r - v_r B_z, v_z B_\phi - v_\phi B_z, 0 \right)^\top$$

и $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{\text{geom}} + \mathbf{s}^\Gamma$ — вектор источников, возникающий при переходе к криволинейной системе координат и за счет гравитации, где $\mathbf{s}^{\text{geom}} = \frac{1}{r} (0, \rho v_\phi^2 + p - B_\phi^2, -\rho v_r v_\phi + B_r B_\phi, 0, 0, 0, v_r B_\phi - v_\phi B_r, 0)^\top$, $\mathbf{s}^\Gamma = (0, F_r^\Gamma, F_\phi^\Gamma, F_z^\Gamma, \mathbf{F}^\Gamma \cdot \mathbf{v}, 0, 0, 0)^\top$, ρ — плотность газа в данной точке, $\mathbf{v} = (v_r, v_\phi, v_z)^\top$ — вектор скорости плазмы, $\mathbf{B} = (B_r, B_\phi, B_z)^\top$ — вектор магнитной индукции, p — давление, e — полная энергия единицы объема и \mathbf{F}^Γ — гравитационная сила. Полужирным шрифтом обозначены векторы, имеющие три пространственные компоненты.

Выписанные уравнения представляют собой законы сохранения массы, импульса, энергии, а также уравнение Фарадея для магнитной индукции. Из закона Фарадея следует условие бездивергентности магнитного поля $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Будем считать, что плазма является сильно ионизированным и не поляризованным совершенным газом с уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где γ — показатель адиабаты и ε — удельная внутренняя энергия. С учетом этого полная энергия имеет вид

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}.$$

Система (1) вместе с уравнением состояния газа является замкнутой. Можно показать, что эта система является гиперболической [10] и, следовательно, существует разложение

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{u}} = A_i = L_i \Lambda_i R_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где L_i и R_i — ортогональные матрицы, составленные из левых и правых собственных векторов, а Λ_i — действительная диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы A_i .

2. Численный метод. Запишем систему (1) в инвариантной индексной форме

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \text{div} ((F_{1,i}, F_{2,i}, F_{3,i})^\top) = s_i, \quad i = \overline{1, 8}.$$

Для ее решения на треугольной сетке используем разрывный метод Галеркина [8, 12]: запишем систему в слабой интегральной постановке и будем искать решение в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{N_T} \sum_{\beta=1}^{N_b} \mathbf{y}^{\alpha, \beta}(t) \varphi_{\alpha, \beta}(r, z),$$

где N_T — число треугольников сетки; N_b — зависящее от порядка аппроксимации число базисных функций, определенных в ячейке K^α ; $\{\varphi_{\alpha, \beta}(x_1, x_2)\}_{\beta=1}^{N_b}$ — ортонормированная система базисных функций (полиномов степени меньше m), определенных в α -й ячейке; $\mathbf{y}^{\alpha, \beta}(t)$ — вектор коэффициентов при базисных

функциях. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений разрывного метода Галеркина порядка m будет иметь следующий вид при $\alpha = \overline{1, N_T}$, $\beta = \overline{1, N_b}$, $i = \overline{1, 8}$ [8]

$$\frac{dy_i^{\alpha,\beta}}{dt} + \sum_{\psi=1}^3 \int_{S_\psi^\alpha} F_j^*(\mathbf{y}^\alpha, \mathbf{y}^{\eta(\alpha,\psi)}) \varphi_{\alpha,\beta} dS - \int_{V^\alpha} F_{j,i} \frac{\partial \varphi_{\alpha,\beta}}{\partial x_j} dV = \int_{V^\alpha} s_i \varphi_{\alpha,\beta} dV. \tag{3}$$

Здесь ячейка α — кольцо треугольного сечения, S_ψ^α — поверхность ψ -й боковой грани ячейки α , V^α — объем ячейки α , $\eta(\alpha, \psi)$ — номер соседней с ней ячейки, $F^*(\mathbf{y}^\alpha, \mathbf{y}^{\eta(\alpha,\psi)})$ — численный поток, зависящий от значений решения в ячейках, примыкающих к ребру ψ , и определяемый из решения соответствующей задачи Римана о распаде разрыва.

Система (3) дополняется начальным условием вида

$$\mathbf{y}^{\alpha,\beta}(0) = \int_{V^\alpha} \mathbf{u}_0 \varphi_{\alpha,\beta} dV, \tag{4}$$

где $\mathbf{u}_0(x_1, x_2)$ — начальное распределение консервативных переменных.

Для приближенного решения задачи Римана для системы уравнений магнитной гидродинамики используется ряд методов с выделением разрывов, такие как HLL (Harten–Lax–van Leer), HLLC (Harten–Lax–van Leer with Contact) и HLLD (Harten–Lax–van Leer Discontinuities) [10, 13]. Метод HLLD позволяет получить наилучшее разрешение разрывов, но во многих случаях приводит к возникновению численной немонотонности в решении. В этих случаях используется более диссипативный численный поток HLL.

При расчете интегралы заменяются квадратурными формулами, точность которых согласована с порядком метода m . Так как для случая осевой симметрии в цилиндрических координатах $dV = 2\pi r dr dz$, а $dS = 2\pi r dl$, где dl — элемент длины в плоскости (r, z) , то квадратурные формулы строятся с учетом весового коэффициента r . Решение задачи Коши (3), (4) производится численным интегрированием явным методом Рунге–Кутты, шаг по времени τ определяется динамически.

Для аппроксимации граничных условий используется метод фиктивной ячейки.

Решение уравнений МГД разрывным методом Галеркина второго порядка точности требует использования функций-ограничителей наклона решения в ячейке (лимитеров [12, 14, 15]) как для поддержания монотонности решения, так и для предотвращения появления на очередном временном слое отрицательных значений плотности и давления.

В настоящей работе использован лимитер minmod TVB (Total Variation Bounded) для кусочно-линейных функций [10, 12], значение которого зависит исходного наклона решения в данной ячейке и от средних значений решения в соседних ячейках. Процедура лимитирования магнитного поля может привести к потере свойства его бездивергентности и поэтому применяется только при вычислении потоков. Лимитирование проводится для локальных характеристических переменных, получаемых из консервативных умножением на матрицу $L = R^{-1}$ левых собственных векторов, вычисляемую в каждой ячейке вместе с разложением (2). Процедура монотонизации решения, использованная в настоящей работе, описана в [8].

2.1. Условие отсутствия магнитного заряда. Выполнение условия бездивергентности магнитного поля $\text{div } \mathbf{B} = 0$ является одной из основных проблем при создании численного метода решения уравнений магнитной гидродинамики. Несмотря на то что дивергенция начального распределения магнитного поля равна нулю, при использовании дивергентной формы записи системы уравнений МГД (1) в ходе расчетов может накапливаться численный магнитный заряд. Такая ситуация приводит к нефизичным результатам или даже преждевременному прерыванию расчета.

Для поддержания бездивергентности магнитного поля реализован метод, основанный на использовании ϕ -й компоненты электрического поля и ее градиента в узлах сетки (рис. 1) для определения бездивергентного потока магнитного поля. Так как в цилиндрической системе координат в случае осевой симметрии $\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$, то созданная для декартовой системы координат процедура получения бездивергентного магнитного поля [8] будет приводить к дивергентному полю в цилиндрической

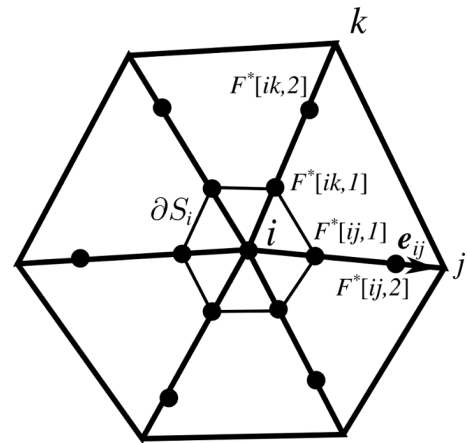


Рис. 1. Схема перераспределения магнитных потоков

системе координат. Описанный в [8] метод может быть адаптирован на случай цилиндрической системы координат при помощи замены базисных функций для B_r и B_z .

Равенство нулю дивергенции на разностном уровне соответствует бездивергентности распределения магнитного поля внутри ячейки сетки и равенству нормальных составляющих магнитного поля на границе между ячейками. В случае явной схемы и бездивергентного начального распределения достаточно, чтобы этому условию на каждом шаге удовлетворяла величина, на которую изменяется магнитное поле, — соответствующие компоненты потоков \mathbf{F}_r и \mathbf{F}_z . Это можно обеспечить, например, если в качестве компонент потока для магнитного поля взять величину

$$(\mathcal{F}_{B_r}^*, \mathcal{F}_{B_z}^*)^T = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} \right)^T = \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial(rP)}{\partial r} \right)^T,$$

где $(\mathcal{F}_{B_r}^*, \mathcal{F}_{B_z}^*)^T$ — численный поток, соответствующий изменению величин B_r и B_z , а P — некоторая функция, имеющая непрерывную вторую смешанную производную по пространственным переменным. Согласно уравнению (1) функции P соответствует величина $P = (\mathbf{B} \times \mathbf{v})_\phi$, т.е. P является аналогом ϕ -й компоненты электрического поля, полученной сносом магнитных силовых линий. При таком выборе потока изменение дивергенции магнитного поля в ячейке

$$\operatorname{div}((\mathcal{F}_{B_r}^*, \mathcal{F}_{B_z}^*)^T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\mathcal{F}_6^*) + \frac{\partial \mathcal{F}_8^*}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (-rP) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (rP) = 0$$

и изменение нормальной к границе ячейки составляющей магнитного поля

$$(\mathcal{F}_{B_r}^*, \mathcal{F}_{B_z}^*)^T \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial P}{\partial z} n_r + \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial r} n_z = \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial r} n_z - \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial z} n_r = \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial z} e_z = \frac{1}{r} \frac{\partial rP}{\partial \mathbf{e}}$$

будут определяться величиной $r \cdot P$, где $\mathbf{n} = (n_r, n_z)^T$ — единичный вектор, нормальный к границе ячейки ∂K^i , $\mathbf{e} = (e_r, e_z)^T$ — единичный вектор, касательный к границе ячейки ∂K^i . Таким образом, выбор функции $P^*(r, z) = rP(r, z)$ будет определять бездивергентность распределения магнитного поля.

Так как при интегрировании по границе поток, полученный приближенным методом решения задачи Римана, умножается на радиус соответствующей точки интегрирования, то использование величины $P(r, z)r$ помогает сохранить консервативность схемы. В нашей работе был использован следующий способ

определения $rP(r, z)$ в узлах сетки: $rP(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{\sigma_i} \frac{(F_6^*[ik, 1], F_8^*[ik, 1]) \cdot \mathbf{e}_{ik}}{\sigma_i} r_{[ik, 1]}$, где $\mathbf{F}^*[ij, 1]$ — численный поток, полученный в точке интегрирования $\zeta \mathbf{x}_i + (1 - \zeta) \mathbf{x}_j$ ($\zeta = 1/2$ для метода первого порядка и $\zeta = 1/2 + \sqrt{3}/6$ для метода второго порядка), $r_{[ik, 1]}$ — радиус-вектор точки $\zeta \mathbf{x}_i + (1 - \zeta) \mathbf{x}_j$, σ_i — число ребер, выходящих из вершины i с координатами \mathbf{x}_i . Восстановление градиента $\nabla(P_r)$ производится по формуле $\nabla(P_r) \approx \frac{1}{S} \int_S \nabla P_r dS = \frac{1}{S} \int_{\partial S} P_r \mathbf{n} dl$ (рис. 1). Этот интеграл берется численно с использованием вычисленных значений потоков $\mathbf{F}^*[ij, 1]$.

В случае метода второго порядка в каждой треугольной ячейке в качестве rP можно взять квадратичный полином $rP(r, z) = a_i + b_i r + c_i z + d_i r^2 + f_i r z + g_i z^2$, $\mathbf{x} \in K^i$, а совпадение производной вдоль ребра ячейки (и, следовательно, нормальной компоненты магнитного поля вдоль этого ребра) можно обеспечить равенством значений rP в узлах сетки и равенством второй производной rP вдоль ребра на границе между ячейками. В настоящей работе эта величина определяется на основании градиентов rP в узлах сетки $\frac{\partial^2(rP)}{\partial \mathbf{e}_{ij}^2} = \frac{\nabla P(\mathbf{x}_j) \mathbf{e}_{ij} - \nabla(rP)(\mathbf{x}_i) \mathbf{e}_{ij}}{h_{ij}}$. Такой выбор P_r позволяет получить бездивергентное распределение магнитного поля.

Выбор $rP(r, z)$ определяет вид базисных функций, необходимых для аппроксимации бездивергентного магнитного поля. Если $rP(r, z) = a_i + b_i r + c_i z + d_i r^2 + f_i r z + g_i z^2$, то $B_r \in \operatorname{span}\left(1, \frac{1}{r}, \frac{z}{r}\right)$ и $B_z \in \operatorname{span}\left(1, \frac{1}{r}, \frac{z}{r}\right)$, где $\operatorname{span}(f_1, \dots, f_n)$ — линейная оболочка функций f_1, \dots, f_n . Для того чтобы минимизировать изменения в численном методе относительно случая декартовой системы координат, вместо B_r и B_z в памяти хранятся величины $u_6 = B_r \frac{r}{r_{ci}}$ и $u_8 = B_z \frac{r}{r_{ci}}$, где r_{ci} — радиус-вектор центра ячейки K^i . Тогда u_6 и u_8 являются линейными по r и z функциями, что позволяет получить формулы бездивергентного потока $\mathcal{F}_6^*, \mathcal{F}_8^*$ для величин u_6 и u_8 , аналогичные случаю декартовых координат.

Величины u_6 и u_8 соответствуют радиальной и вертикальной составляющим индукции магнитного поля в центре ячейки K^i , а для определения B_r и B_z в произвольной точке с радиус-вектором r^* внутри ячейки K^i используются формулы $B_r(r^*) = u_6 \frac{r_{ci}}{r^*}$ и $B_z(r^*) = u_8 \frac{r_{ci}}{r^*}$. Домножение на $\frac{r_{ci}}{r}$ корректно, так как все квадратурные формулы имеют множитель r и значения магнитного поля при $r = 0$ в расчетах не участвуют.

Для обновления величин u_6 и u_8 можно получить новый поток в точке $\zeta \mathbf{x}_i + (1 - \zeta) \mathbf{x}_j$, дающий бездивергентное магнитное поле:

$$(\mathcal{F}_6^*[ij], \mathcal{F}_8^*[ij])^T = \left(\zeta(rP)(\mathbf{x}_i) + (1 - \zeta)(Pr)(\mathbf{x}_j) - \frac{1}{12}(\nabla(Pr)(\mathbf{x}_j) - \nabla(Pr)(\mathbf{x}_i)) \cdot \mathbf{e}_{ij} h_{ij} \right) \frac{1}{r_{cl}} h_{ij} \mathbf{e}_{ij}.$$

Новые компоненты потоков для магнитного поля дальше используются наравне с компонентами, полученными при приближенном решении задачи Римана, компоненты потоков для остальных величин остаются без изменений. Численные эксперименты показали, что описанный выше метод перераспределения потоков для получения бездивергентного магнитного поля сохраняет консервативность схемы. Использование данного метода приводит к сглаживанию разрывов (вносит в схему численную диссипацию) на 2–3 ячейки.

3. Параллельный алгоритм. Описанный численный метод реализован в параллельном программном комплексе для кластерных систем с разделенной памятью. Комплекс написан на языке Fortran с использованием технологий OpenMP и MPI. Параллельный алгоритм комплекса основан на идее разбиения исходной расчетной области на подобласти, решение в каждой из которых рассчитывается отдельным вычислительным модулем [9]. Поскольку численный метод — явный, подобный подход позволяет добиться высокой эффективности распараллеливания. Целостность решения обеспечена наличием обменов смежными граничными данными между модулями, обмены реализованы средствами технологии MPI.

Расчет производится на треугольных неструктурированных сетках. На подготовительном этапе производится разбиение сетки на подобласти по числу используемых вычислительных модулей. При этом необходимо, с одной стороны, минимизировать количество смежных данных, подлежащих обмену между модулями, а с другой — сбалансировать число ячеек сетки в каждой подобласти для обеспечения равномерной загрузки ядер. Эту задачу можно представить как построение разбиения графа, каждая вершина которого соответствует ячейке, а ребро между вершинами — общему ребру между ячейками. Для приближенного решения данной задачи используется программа Metis [16], устанавливающая соответствие между номером ячейки в сетке и номером подобласти.

В начале расчета с учетом описания расчетной сетки и ее разбиения на подобласти, а также о сеточном шаблоне, используемом как для расчета решения на очередном временном слое, так и для его лимитирования, корневой процесс формирует для каждого расчетного модуля ряд вспомогательных массивов.

(i) Массив перенумерации узлов, устанавливающий соответствие между номерами узлов в исходной сетке и номерами узлов, используемых в модуле — на каждом вычислительном модуле хранится и участвует в расчетах лишь минимально необходимая часть сетки и определенные на ней распределения физических переменных задачи.

(ii) Массив перенумерации ячеек сетки: аналогично массиву перенумерации узлов данный массив позволяет хранить в памяти информацию только о тех ячейках, которые необходимы для расчета на данном модуле. Этот массив специальным образом упорядочен. Самые маленькие номера имеют ячейки, которые используются только на данном модуле. Далее размещены блоки ячеек, значение решения в которых рассчитывается данным модулем и отсылается на другой модуль путем групповой пересылки. Затем располагаются ячейки, значение решения в которых по отдельности рассылается нескольким модулям (угловые ячейки). В конце массива расположены блоки ячеек, значения решения в которых принимаются от других модулей блочным способом, ячейки, решение в которых принимается по отдельности, а также граничные ячейки. Такое упорядочивание позволяет достичь большей эффективности пересылки данных между модулями.

(iii) Массивы, описывающие начало и конец рассылаемых и принимаемых блоков и одиночных данных о решении.

После рассылки данных корневым модулем все вычислительные модули (включая корневой) начинают независимый расчет решения в своей подобласти, инициализируя массивы, описывающие базисные функции, содержащие скалярные коэффициенты лимитера и ряд других.

Для обмена значениями решения в смежных ячейках и значениями электрического поля в смежных узлах на границах подобластей каждым модулем инициализируются отложенные передача и прием дан-

ных. При этом благодаря непрерывной блочной структуре хранения данных в памяти пересылка значений в смежных ячейках и узлах осуществляется без формирования дополнительных буферных массивов (и без дополнительных накладных расходов) прямым обращением к соответствующим указателям.

3.1. Тестовые параллельные расчеты. Проведено тестирование параллельного алгоритма на гибридном вычислительном кластере К-100 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Оценка ускорения проводилась для решения на сетках из 585 508 и 903 222 элементов. Доля параллельного кода в описанном алгоритме при решении тестовой задачи о вихре Орзага–Танга [17] составляет 99.98% для сетки из 585 508 элементов и 99.99% — для 903 222 элементов. Согласно закону Амдала [18] такие доли ограничивают максимальное ускорение расчетов на 256 ядрах относительно последовательной версии величинами 243 и 249 раз соответственно. Решение задачи на сетке из 903 222 элементов на одном ядре заняло 1843.8 минуты, на 256 ядрах — 8.17 минуты (ускорение в 225.7 раза). На сетке из 585 508 элементов на одном ядре — 720 минут, на 256 ядрах — 3.68 минуты (ускорение в 195.7 раза).

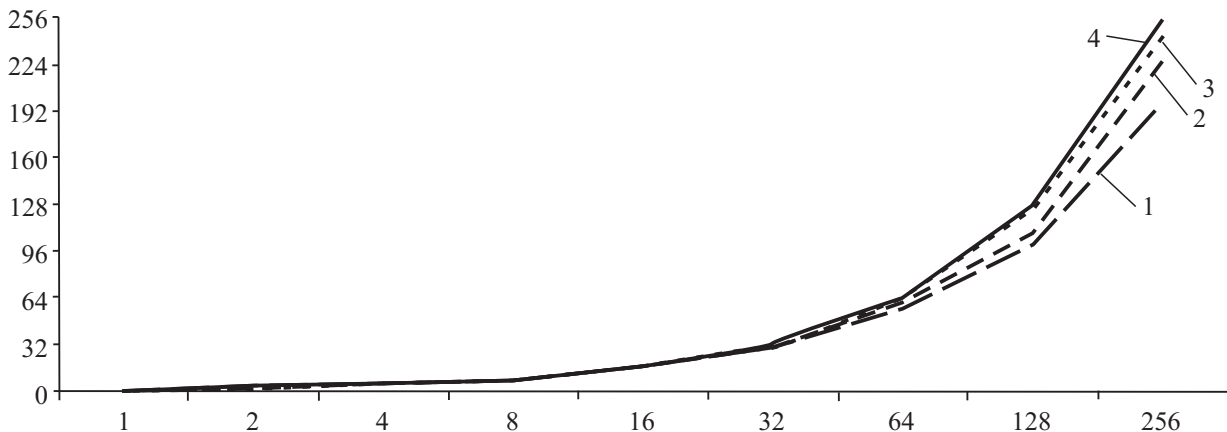


Рис. 2. Ускорение расчетов в задаче о вихре Орзага–Танга на различных сетках:
1) 585 тысяч элементов; 2) 903 тысячи элементов; 3) по закону Амдала; 4) линейное ускорение

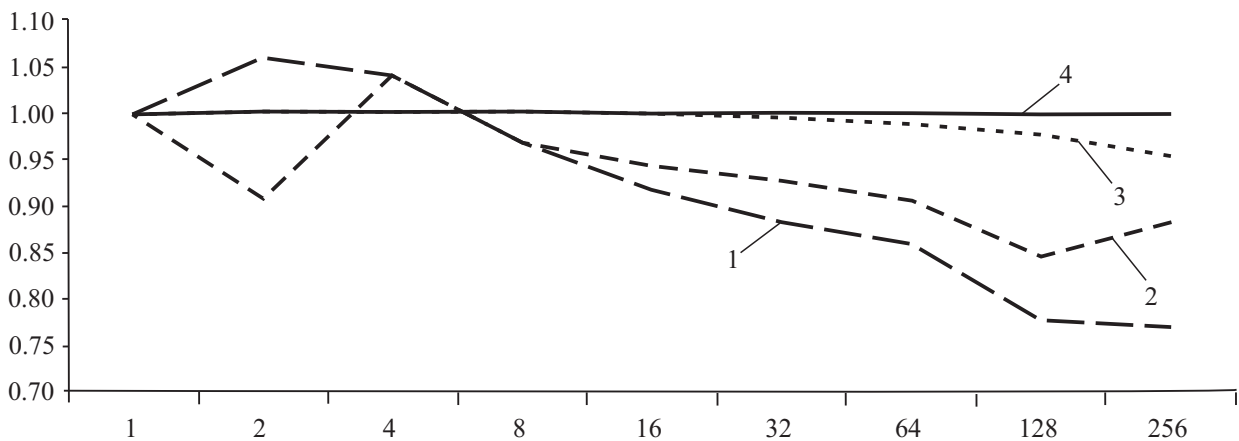


Рис. 3. Эффективность параллельного алгоритма в задаче о вихре Орзага–Танга на различных сетках:
1) 585 тысяч элементов; 2) 903 тысячи элементов; 3) по закону Амдала; 4) линейное ускорение

Расхождение реального ускорения с оценкой по закону Амдала объясняется главным образом не влиянием межмодульных обменов, а спецификой аппаратной структуры кластера. Вычислительные модули кластера К-100 сгруппированы по 11 на вычислительный узел (в одноядерной конфигурации модуля), каждый из которых представляет собой сервер с двумя шестиядерными процессорами Intel Xeon 5670. Подобная плотность вычислительных модулей на узел в расчете приводит к конкуренции запросов модулей одного узла к оперативной памяти, а следовательно — к большому числу кэш-промахов. Это особенно критично для текущей реализации метода решения уравнений МГД второго порядка точности, поскольку каждой ячейке сетки соответствует как минимум 32 числа с плавающей точкой. Расчеты показали, что процедура вычисления потоков через ребра на четырех ядрах ускоряется в 3.8 раза, в то время как про-

цедура копирования решения с предыдущего слоя на новый — только в 2.1 раза. Специфика аппаратной структуры кластера К-100 объясняет и наблюдаемое на рис. 2 и рис. 3 сверхлинейное ускорение расчетов, возникающее на 2 и 4 ядрах. В этом случае не возникает конкуренции за ресурсы между вычислительными модулями одного узла, причем часть обменов может выполняться не занятыми в расчете ресурсами узла.

На рис. 2 представлены графики ускорения расчетов, полученные при решении задачи о вихре Орзага–Танга на сетках из 585 508 и 903 222 элементов. Кроме того, представлен график ускорения согласно закону Амдала для 99.98% параллельного кода и график линейного ускорения. На рис. 3 представлены графики эффективности (отношение ускорения к числу задействованных ядер) распараллеливания расчетов на различных сетках, эффективности согласно закону Амдала для 99.98% параллельного кода и эффективности при линейном ускорении. Видно, что эффективность распараллеливания при большом числе используемых вычислительных модулей существенно зависит от трудоемкости задачи. В целом метод показывает высокую эффективность распараллеливания и хорошую масштабируемость вплоть до сотен задействованных вычислительных модулей.

4. Магниторотационная неустойчивость в аккрецирующей оболочке протозвезды. С применением созданного программного комплекса было проведено моделирование процесса развития магниторотационной неустойчивости в аккрецирующей оболочке протозвезды [4].

Для моделирования коллапса газопылевого облака на звезду выберем сферическую расчетную область с вырезанным центром [4], которая изображена на рис. 4. Протозвезда, находящаяся внутри центральной области, создает сферически-симметричный гравитационный потенциал Φ_Γ , в то время как самогравитация газопылевого облака, окружающего звезду, не учитывается, т.е. масса звезды предполагается много большей массы вещества, находящегося в расчетной области. Расчет ведется в безразмерных величинах, выбранные масштабы величин соответствуют объекту G31.41.

В начальный момент времени в расчетной области вещество вращается вокруг оси Oz , вращение равномерно, векторное поле магнитной индукции распределено равномерно и ориентировано вдоль оси вращения. Равновесие достигается за счет того, что градиент давления ∇p уравнивает силы инерции

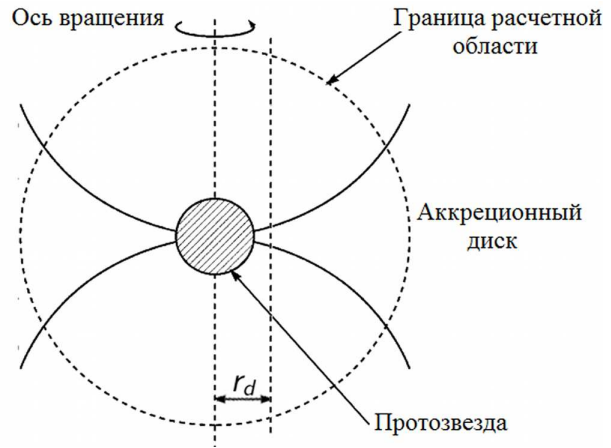


Рис. 4. Схема аккрецирующей оболочки протозвезды

$\rho \nabla \Phi_C = -\rho \omega_0^2 r e_r$ и гравитации $\rho \nabla \Phi_\Gamma = \rho \frac{GM}{R}$: $-\nabla p + \rho \nabla \Phi_\Gamma + \rho \nabla \Phi_C = 0$. Здесь ω_0 — начальная угловая скорость, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ — сферический радиус, а GM — произведение гравитационной постоянной и массы звезды. Газопылевое облако совершает вращение с кеплеровской угловой скоростью $\omega_0 \sim r^{-3/2}$, для ограничения роста угловой скорости вблизи оси $r = 0$ заданы условия, соответствующие твердотельному вращению плазмы. Для этого в цилиндре $r < r_d$ принято $\omega_0 = \text{const}$.

В расчетах были использованы следующие параметры и начальные данные:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, \quad p = 7 + \alpha GM + \Phi_C + \Phi_\Gamma, \quad B_r = 0, \quad B_\phi = 0, \quad B_z = 0.1048, \\ v_r &= 0.01 c_T (A - 0.5), \quad v_\phi = \omega_0 r + 0.01 c_T (A - 0.5), \quad v_z = 0.01 c_T (A - 0.5), \\ \omega_0 &= \begin{cases} \sqrt{\alpha GM} r^{-3/2}, & r \geq r_d, \\ \sqrt{\alpha GM} r_d^{-3/2} & \text{иначе;} \end{cases} \quad \Phi_C = \begin{cases} -(\omega_0 r)^2, & r \geq r_d, \\ 0.5(\omega_0 r)^2 - 1.5(\omega_0 r_d)^2 & \text{иначе;} \end{cases} \\ \Phi_\Gamma &= \frac{GM}{R}, \quad GM = 1, \quad r_d = 0.15, \quad \alpha = 0.8, \quad c_T = \sqrt{2}, \quad A \sim R[0, 1], \\ \mathbf{F}^\Gamma &= \nabla \Phi_\Gamma = \left(-\frac{GM}{R^3} r, 0, -\frac{GM}{R^3} z \right)^T. \end{aligned}$$

Здесь $A \sim R[0, 1]$ — случайная величина, распределенная от 0 до 1 по равномерному закону. Величина вертикальной составляющей магнитной индукции B_z определяется из условия максимума отношения

газового давления к магнитному: $\max(\beta) = \max\left(\frac{2p}{B^2}\right) = 2000$.

Условия на границе $R = 1$ — исторические, т.е. переменные в фиктивной ячейке задаются из начальных условий; на границе $R = 0.1$ — исторические с обновлением угловой скорости, т.е. все переменные в фиктивной ячейке, кроме угловой скорости, задаются из начальных условий, а значение угловой скорости берется из ячейки в расчетной области, соседней с фиктивной. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, число Куранта $C = 0.4$. Расчеты проводились на неструктурированной сетке из 228 363 элементов, построенной при помощи программы Gridder2D [19].

Процесс развития неустойчивости можно условно разделить на три стадии: зарождение мелкомасштабных возмущений, развитие мелкомасштабных возмущений в крупномасштабные и образование области с относительно устойчивым течением. На рис. 5 и 6 приведены результаты расчетов для моментов времени, соответствующих различному числу оборотов облака. Временем оборота считается время одного оборота самой быстрой орбиты начальной конфигурации $t_{об} = \frac{2\pi}{\max(\omega_0)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha GM} r_d^{-3/2}} \approx 0.4$.

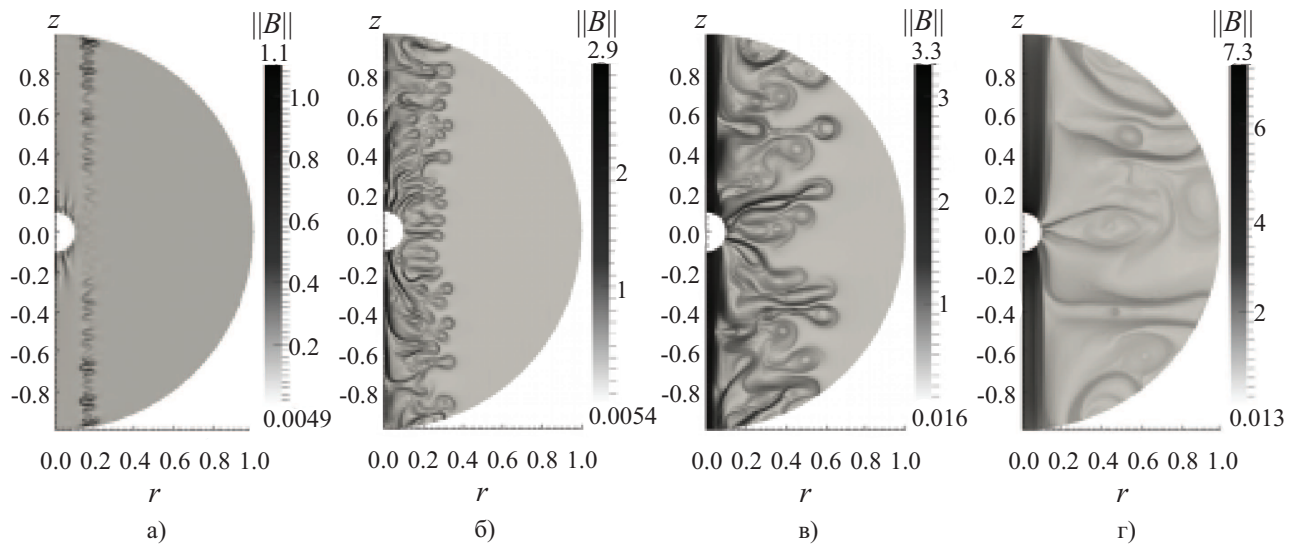


Рис. 5. Распределение модуля вектора индукции магнитного поля:
 а) после двух ($t = 0.8$), б) четырех ($t = 1.6$), в) восьми ($t = 3.2$) и г) шестнадцати ($t = 6.4$) оборотов

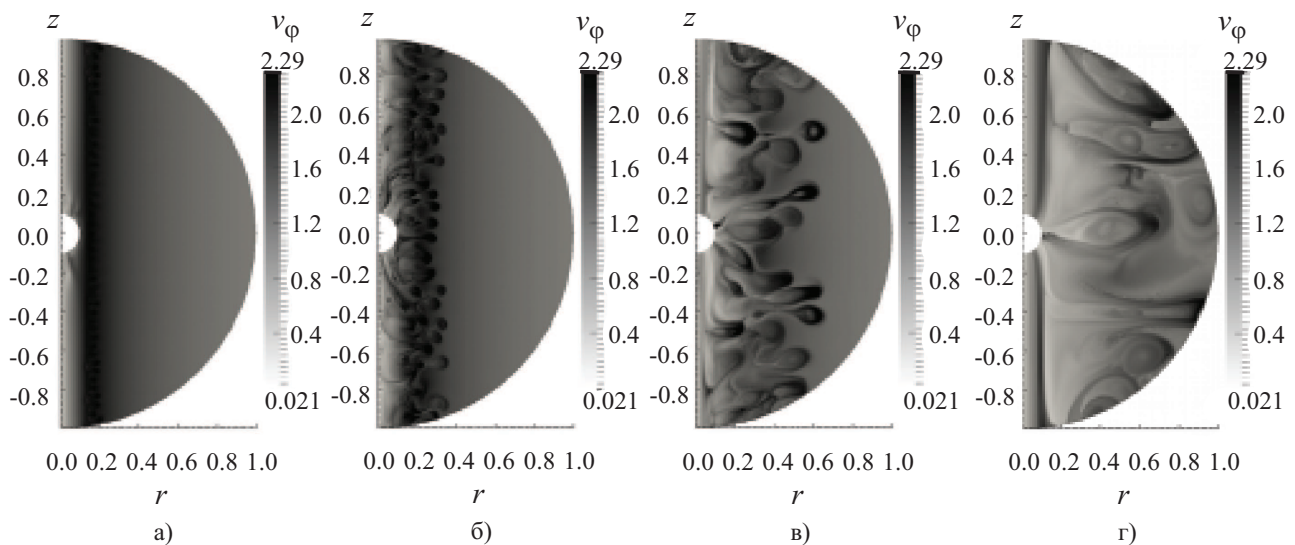


Рис. 6. Распределение угловой составляющей скорости вещества:
 а) после двух ($t = 0.8$), б) четырех ($t = 1.6$), в) восьми ($t = 3.2$) и г) шестнадцати ($t = 6.4$) оборотов

На первом этапе на границе зон с кеплеровским и твердотельным вращением вещества $r = r_d$ возникают малые возмущения (примерно два оборота, $t = 0.8$). Затем малые возмущения начинают образовывать крупномасштабные структуры (примерно от третьего до десятого оборотов). С развитием крупномасштабных вихревых структур магнитное поле усиливается на несколько порядков за счет хаотического движения вещества, и его энергия становится сравнимой с кинетической энергией движения вещества. При этом начинается активный перенос вращательного момента на внешнюю границу расчетной области (рис. 6).

Распределение индукции магнитного поля со временем приобретает хаотический характер везде, где газовое давление преобладает над магнитным. Вблизи оси вращения, где плотность вещества относительно мала, линии магнитного поля, как и другие характеристики МГД-течения, имеют регулярную структуру. Дальнейшее вытекание вещества из области приводит к увеличению размеров зоны с регулярной структурой течения (около 16 оборотов облака).



Рис. 7. Поток массы через внутренний радиус, в ед. начальной массы. Отрицательные значения отвечают оттоку вещества за пределы расчетной области

Проведена оценка темпов аккреции центрального объекта, ее результаты приведены на рис. 7. Темп аккреции рассчитан как отношение интеграла нормальной составляющей ρv вдоль внутренней границы расчетной области к начальному количеству вещества в расчетной области. Средний темп аккреции составил 0.023% начальной массы, что по порядку величины соответствует темпам в реально наблюдаемом объекте G31.41 [4].

5. Заключение. Создан алгоритм для решения уравнений магнитной гидродинамики для задач с цилиндрической симметрией разрывным методом Галеркина. Введена процедура реконструкции магнитных потоков, позволяющая в случае второго порядка получить бездивергентные распределения магнитного поля в цилиндрической системе координат.

Разработан параллельный программный комплекс для кластерных систем с распределенной памятью. Параллельный алгоритм протестирован и показал высокую масштабируемость вплоть до сотен вычислительных модулей.

Проведено моделирование процесса развития магниторотационной неустойчивости в аккрецирующей оболочке протозвезды. Расчеты показали, что развитие магниторотационной неустойчивости в газопылевом аккреционном диске может приводить к образованию крупномасштабных вихревых структур. Эти структуры способствуют перераспределению удельного момента импульса вращающейся плазмы от оси вращения на периферию диска. Полученные в расчетах темпы аккреции вещества на звезду близки к наблюдаемым в объекте G31.41.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00109, 14-01-31496, 12-02-12096, 12-02-00687) и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-6061.2014.2).

Авторы выражают благодарность А. Ю. Луговскому, К. Р. Сычугову и В. М. Четкину за полезные обсуждения в процессе подготовки работы.

Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ-2014; <http://agora.guru.ru/pavt2014>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Велихов Е.П.* Устойчивость идеально проводящей жидкости, текущей между вращающимися в магнитном поле цилиндрами // Журн. экспериментальной и теоретической физики. 1959. **36**, № 5. 1398–1404.
2. *Bai X.-N., Stone J.M.* Local study of accretion disks with a strong vertical magnetic field: magnetorotational instability and disk outflow // *Astrophysical Journal*. 2013. **767**, N 1. Article No. 30 (doi:10.1088/0004-637X/767/1/30).
3. *Balbus S.A., Hawley J.F.* A powerful local shear instability in weakly magnetized disks: I. Linear analysis // *Astrophysical Journal*. 1991. **376**. 214–233.
4. *Велихов Е.П., Сычугов К.Р., Четкин В.М., Луговский А.Ю., Колдоба А.В.* Магниторотационная неустойчивость в аккрецирующей оболочке протозвезды и образование крупномасштабной структуры магнитного поля // *Астрономический журнал*. 2012. **89**, № 2. 107–119.
5. *Wheatley V., Kumar H., Huguenot P.* On the role of Riemann solvers in discontinuous Galerkin methods for magnetohydrodynamics // *J. of Computational Physics*. 2010. **229**, N 3. 660–680.
6. *Fengyan Li, Liwei Xu, Yakovlev S.* Central discontinuous Galerkin methods for ideal MHD equations with the exactly divergence-free magnetic field // *J. of Computational Physics*. 2011. **230**, N 12. 4828–4847.
7. *Toulopoulos I., Makridakis C.* A discontinuous Galerkin scheme for the numerical solution of flow problems with discontinuities // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*. 2012. **68**, N 5. 582–604.
8. *Лужин В.В., Шаповалов К.Л.* Применение RKDG метода второго порядка для решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия “Естественные науки”*. 2012. Спец. вып. 2. 98–108.
9. *Галанин М.П., Лужин В.В., Шаповалов К.Л.* Параллельный алгоритм RKDG метода второго порядка для решения двумерных уравнений идеальной магнитной гидродинамики // *Параллельные Вычислительные Технологии (ПавТ-2013): труды международной научной конференции (1–5 апреля 2013 г., г. Челябинск)*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. 116–126.
10. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
11. *Skinner M.A., Ostriker E.C.* The Athena astrophysical magnetohydrodynamics code in cylindrical geometry // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 2010. **188**, N 1. 290–311.
12. *Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А.* Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // *Математическое моделирование*. 2008. **20**, № 11. 55–66.
13. *Mignone A., Bodo G.* Shock-capturing schemes in computational MHD // *Lecture Notes in Physics*. Vol. 754. Heidelberg: Springer, 2008. 71–101.
14. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Heidelberg: Springer, 2009.
15. *Zhong X., Shu C.-W.* A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // *J. of Computational Physics*. 2013. **232**, N 1. 397–415.
16. *Karypis G., Kumar V.* A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs // *SIAM J. on Scientific Computing*. 1999. **20**, N 1. 359–392.
17. *Orszag S.A., Tang C.M.* Small-scale structure of two-dimensional magnetohydrodynamics turbulence // *J. Fluid Mech.* 1979. **90**. 129–143.
18. *Воеводин В.В., Воеводин В.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
19. *Щеглов И.А.* Программа для триангуляции сложных двумерных областей Gridder2D. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН № 60. М., 2008.

Поступила в редакцию
10.02.2014

Modeling of Magnetorotational Instability Evolution Using a Parallel RKDG Algorithm for the Magnetohydrodynamic System of Equations

M. P. Galanin¹, V. V. Lukin², and K. L. Shapovalov³

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences; ploshchad' Miusskaya 4, Moscow, 125047, Russia; Professor, Head of Department, e-mail: galan@keldysh.ru*

² *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences; ploshchad' Miusskaya 4, Moscow, 125047, Russia; Ph.D., Scientist, e-mail: vvlukin@gmail.com*

³ *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences; ploshchad' Miusskaya 4, Moscow, 125047, Russia; Senior Laboratory Assistant, e-mail: ShapovalovKL@yandex.ru*

Received February 10, 2014

Abstract: A parallel algorithm of the RKDG (Runge–Kutta Discontinuous Galerkin) method for axisymmetric 2D ideal MHD equations on unstructured triangular grids is developed. An algorithm of divergence-free magnetic field reconstruction in the cylindrical coordinate system is proposed to obtain physically adequate numerical results with a high degree of accuracy. A high level of the developed parallel code scalability is shown for multiprocessor systems. The parallelization efficiency is analyzed using the K-100 cluster installed at the Keldysh Institute of Applied Mathematics. The results of modeling the magnetorotational instability in an accreting protostar shell are discussed.

Keywords: magnetorotational instability, magnetohydrodynamics, RKDG method, parallel programming, MPI.

References

1. E. P. Velikhov, “Stability of an Ideally Conducting Liquid Flowing between Rotating Cylinders in a Magnetic Field,” *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* **36** (5), 1398–1404 (1959).
2. X.-N. Bai and J. M. Stone, “Local Study of Accretion Disks with a Strong Vertical Magnetic Field: Magnetorotational Instability and Disk Outflow,” *Astrophys. J.* **767** (1), Article No. 30 (2013). doi:10.1088/0004-637X/767/1/30
3. S. A. Balbus and J. F. Hawley, “A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks: I. Linear Analysis,” *Astrophys. J.* **376**, 214–233 (1991).
4. E. P. Velikhov, K. R. Sychugov, V. M. Chechetkin, et al., “Magneto-Rotational Instability in the Accreting Envelope of a Protostar and the Formation of the Large-Scale Magnetic Field,” *Astron. Zh.* **89** (2), 107–119 (2012) [*Astron. Rep.* **56** (2), 84–95 (2012)].
5. V. Wheatley, H. Kumar, and P. Huguenot, “On the Role of Riemann Solvers in Discontinuous Galerkin Methods for Magnetohydrodynamics,” *J. Comput. Phys.* **229** (3), 660–680 (2010).
6. F. Li, L. Xu, and S. Yakovlev, “Central Discontinuous Galerkin Methods for Ideal MHD Equations with the Exactly Divergence-Free Magnetic Field,” *J. Comput. Phys.* **230** (12), 4828–4847 (2011).
7. I. Touloupoulos and C. Makridakis, “A Discontinuous Galerkin Scheme for the Numerical Solution of Flow Problems with Discontinuities,” *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **68** (5), 582–604 (2012).
8. V. V. Lukin and K. L. Shapovalov, “Application of the Second-Order RKDG Method for Solving Two-Dimensional Equations of Ideal Magnetohydrodynamics,” *Vestn. Bauman Mosk. Gos. Tekh. Univ., Ser.: Estest. Nauki, Suppl. 2*, 98–108 (2012).
9. M. P. Galanin, V. V. Lukin, and K. L. Shapovalov, “A Parallel Algorithm of the Second-Order RKDG Method for Solving Two-Dimensional Equations of Ideal Magnetohydrodynamics,” in *Proc. Int. Conf. on Parallel Computational Technologies, Chelyabinsk, April 1–5, 2013* (South Ural State Univ., Chelyabinsk, 2013), pp. 116–126.
10. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems* (Fizmatlit, Moscow, 2001; CRC Press, Boca Raton, 2001).
11. M. A. Skinner and E. C. Ostriker, “The Athena Astrophysical Magnetohydrodynamics Code in Cylindrical Geometry,” *Astrophys. J. Suppl.* **188** (1), 290–311 (2010).
12. M. P. Galanin, E. B. Savenkov, and S. A. Tokareva, “The Solution of Gas Dynamics Problems with Shock Waves Using RKDG Method,” *Mat. Mod.* **20** (11), 55–66 (2008).
13. A. Mignone and G. Bodo, “Shock-Capturing Schemes in Computational MHD,” in *Lecture Notes in Physics* (Springer, Heidelberg, 2008), Vol. 754, pp. 71–101.
14. E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction* (Springer, Heidelberg, 2009).
15. X. Zhong and C.-W. Shu, “A Simple Weighted Essentially Nonoscillatory Limiter for Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods,” *J. Comput. Phys.* **232** (1), 397–415 (2013).
16. G. Karypis and V. Kumar, “A Fast and High Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs,” *SIAM J. Sci. Comput.* **20** (1), 359–392 (1999).
17. S. A. Orszag and C. M. Tang, “Small-Scale Structure of Two-Dimensional Magnetohydrodynamics Turbulence,” *J. Fluid Mech.* **90**, 129–143 (1979).
18. V. V. Voevodin and V. V. Voevodin, *Parallel Computing* (BKhV-Peterburg, St. Petersburg, 2004) [in Russian].
19. I. A. Shcheglov, *Gridder2D: The Program for Triangulation of Complex 2D Domains*, Preprint No. 60 (Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 2008).