УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Н. Л. Гольдман[1]

Рассматриваются вопросы применения принципа двойственности для доказательства теорем единственности в обратных параболических задачах с финальным переопределением. Такие задачи относятся к некорректно поставленным, что проявляется в возможном отсутствии решения и в его неустойчивости к погрешностям входных данных (построен соответствующий пример). Показано, что в случае существования решения оно может обладать свойством единственности. Предлагаемый подход позволяет установить связь проблемы единственности со свойствами плотности решений соответствующих сопряженных задач. Установлено, что они представляют собой задачи управления с управляющим воздействием в начальном условии. Показано, что эти свойства сопряженных задач являются, в свою очередь, следствием известного свойства обратной единственности для параболических операторов. Приведены примеры достаточности условий единственности, доказанных на основе принципа двойственности. Применение этого принципа позволяет изучить проблему единственности некорректных обратных задач в их исходных постановках, оставаясь в рамках параболических уравнений.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратные задачи, сопряженные задачи, задачи управления, принцип двойственности, теоремы единственности, пространства Гельдера.

Введение. Настоящая статья продолжает исследование проблемы единственности решения обратных задач для параболических операторов общего вида, начатое в работе [1]. В ней подробно изложены особенности применения принципа двойственности к изучению этой проблемы для класса некорректных задач, который включает в себя задачи определения неизвестной правой части уравнения по дополнительной информации о решении в конечный момент времени.

Принцип двойственности позволяет установить, что соответствующие сопряженные задачи являются задачами управления для линейных параболических операторов с управляющим воздействием в начальном условии. В случае обратной задачи теплопроводности к такой сопряженной задаче сразу же можно применить результат Ж.-Л. Лионса о плотности усредненных решений задачи управления [2]. Следствием этого результата и является единственность решения исходной обратной задачи теплопроводности.

На основе идеи Лионса об исследовании свойства плотности усредненных решений в настоящей статье получены результаты для задач управления в случае линейных параболических операторов более общего вида, чем в [2]. Тем самым подтверждено предположение Лионса [2], что такое свойство плотности имеет место и в более общем случае. Полученный результат, основанный, как и в [2, 3], на принципе двойственности, является следствием так называемого свойства обратной единственности для линейных параболических операторов с обратным направлением времени [4, 5]. Доказано, что такие свойства плотности сопряженных задач обеспечивают, в свою очередь, единственность решения в классах Гельдера исходных обратных задач.

Достоинство подхода на основе принципа двойственности в том, что он позволяет изучить проблему единственности для некорректных обратных задач в их исходных постановках, оставаясь в рамках параболических уравнений. Эта проблема связана со свойствами самих этих задач и не зависит от различных способов регуляризации, которые могут быть применены к таким задачам. Отметим, что все известные основополагающие результаты единственности для некорректных обратных параболических задач получены при изучении именно их исходных постановок для соответствующих линейных операторов. Мы имеем в виду свойство “обратной единственности” (А. Н. Тихонов (1935 г.), J.-L. Lions (1960 г.), M. Lees, M. H. Protter (1961 г.)) и свойство единственности для нехарактеристической задачи Коши (А. Н. Тихонов (1935 г.), Е. М. Ландис (1952 г.), S. Mizohata (1958 г.)).

К еще одному достоинству принципа двойственности следует отнести возможность на его основе доказать теоремы единственности для квазилинейных параболических уравнений общего вида с коэффициентами, зависящими от (x, t, u). Это особенно важно при исследовании обратных задач Стефана

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: goldman@srcc.msu.ru

для параболических уравнений с движущейся фазовой границей [6]. К таким задачам не применимы результаты единственности, полученные в [7–10] при условии независимости коэффициентов уравнения от времени t. В обратных задач Стефана (например, при определении тепловых источников по известным в конечный момент времени распределению температуры и положению фазового фронта) такая зависимость всегда существует из-за движущегося фронта, даже если коэффициенты уравнения не зависят напрямую от t.

Среди целей настоящей статьи отметим еще и построение примеров, подтверждающих достаточность условий единственности, доказанных на основе принципа двойственности. Вывод теорем единственности не требует дополнительной гладкости входных данных и основан только на требованиях гладкости, связанных с точными дифференциальными зависимостями в соответствующих краевых задачах для параболических уравнений [11] и с условиями обратной единственности в [4, 5].

Обратные параболические задачи, к которым относятся рассмотренные в статье задачи определения правых частей уравнений, составляют важное направление в теории некорректных задач. Интенсивное развитие этого направления в течение всех последних лет связано как с теоретическим интересом к таким задачам, так и с их многочисленными приложениями (см., например, [12–20]). Современные потребности моделирования и управления процессами в теплофизике и механике сплошной среды приводят к разнообразным постановкам обратных параболических задач в зависимости от искомой характеристики модели и от вида дополнительной информации.

1. Обратная задача теплопроводности с неизвестным источником.

1.1. Начнем рассмотрение вопросов применения принципа двойственности в обратных параболических задачах с обратной задачи теплопроводности с финальным переопределением. Требуется найти функцию $u(x,t)$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ и функцию $f(x)$ при $0\leqslant x\leqslant l$ из условий

$$u_t-u_{xx}=h(x,t)f(x)+p(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u|_{x=0}=v_0(t),\quad u|_{x=l}=v_1(t),\quad 0<t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u|_{t=T}=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

где $h(x,t)\in C(\overline{Q})$, $p(x,t)\in C(\overline{Q})$, $v_i(t)\in C[0,T]$ $(i=0,1)$, $\varphi(x)\in C^2[0,l]$ — известные функции, $g(x)$ — заданная финальная функция из $C^2[0,l]$.

Задачи такого типа являются некорректно поставленными, в них нарушена причинно-следственная связь: например, в теплофизической интерпретации условия (1)–(3) означают нахождение теплового источника $f(x)$ (причина) по известному в конечный момент времени распределению температуры $g(x)$ (следствие). Некорректность проявляется обычно в возможном отсутствии решения и в его неустойчивости относительно погрешностей входных данных. Это подтверждает следующий пример неустойчивости решения обратной задачи (1)–(3).

Пример 1. Функции

$$u^0(x,t)=(2-x^2)\exp(t),\quad f^0(x)=2-x$$

являются решением следующей обратной задачи в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T\}$:

$$u_t-u_{xx}=(2+x)\exp(t)f(x),\quad (x,t)\in Q,$$

$$u|_{x=0}=2\exp(t),\quad u|_{x=1}=\exp(t),\quad 0<t\leqslant T,$$

$$u|_{t=0}=2-x^2,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

с финальным наблюдением

$$u|_{t=T}=g(x),\quad g(x)=(2-x^2)\exp(T),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Пусть вместо функции $g(x)$ задано ее приближение

$$g_n(x)=g(x)+\delta_n(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

с погрешностью $\delta_n(x)=n^{-1}Tx(x-1)$, где $n>0$ — любое целое, при $n\to\infty$ $\delta_n(x)\to 0$ в равномерной метрике.

Решением обратной задачи с финальным наблюдением $g_n(x)$ является пара функций

$$u_n=u^0+\Delta_n u,\quad \Delta_n u=n^{-1}tx(x-1)\exp\bigl(n^2(T-t)\bigr),$$

$$f_n=f^0+\Delta_n f,\quad \Delta_n f=n^{-1}(2+x)^{-1}\exp(-t)\bigl[x(x-1)(1-n^2t)-2t\bigr]\exp\bigl(n^2(T-t)\bigr).$$

Очевидно, что погрешности решения обратной задачи $\Delta_n u$, $\Delta_n f$ распространяются на всю область Q и, хотя погрешность в финальном условии $\delta_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, тем не менее $\Delta_n u \to \infty$, $\Delta_n f \to \infty$ в метрике $C(\overline{Q})$.

В операторном виде обратную задачу (1)–(3) можно представить как

$$\mathcal{A} f = g, \quad f \in F \subset L_2[0,l], \quad g \in G \subset L_2[0,l],$$

где $\mathcal{A} : F \to G$ — оператор, сопоставляющий в конечный момент времени каждому элементу $f \in F$ решение $u(x,T;f)$ соответствующей краевой задачи для уравнения (1). Точным решением этого операторного уравнения является такой элемент f, для которого $u(x,T;f)$ совпадает с заданным элементом $g \in G$.

Приведенный пример неустойчивости показывает, что оператор $\mathcal{A}^{-1}$ неограничен. В [3, с. 119, 214] отмечается, что область значений оператора такого типа не является замкнутой в случае параболических уравнений (в отличие от гиперболических уравнений, для которых она может быть замкнутой). Поэтому весьма трудно установить для любого задаваемого финального элемента g его принадлежность области значений $R(\mathcal{A})$ (что эквивалентно существованию решения операторного уравнения для этого элемента $g \in G$).

1.2. Таким образом, обратные задачи с финальным переопределением для параболических уравнений с неизвестной правой частью относятся к классу некорректно поставленных. Как уже отмечено, это проявляется в возможном отсутствии решения и в его неустойчивости к погрешностям входных данных. Однако в случае существования решения оно может обладать свойством единственности. Покажем, как соответствующие достаточные условия устанавливаются на основе принципа двойственности для уравнения (1) с коэффициентом $h = h(x)$.

Теорема 1. *Пусть функция $h(x)$ принадлежит $C[0,l]$ и положительна при $0 \leqslant x \leqslant l$, функции $p(x,t)$, $v_i(t)$ $(i = 0,1)$ и $\varphi(x)$ принадлежат $C(\overline{Q})$, $C[0,T]$ и $C^2[0,l]$ соответственно. Пусть, кроме того, финальная функция $g(x)$ принадлежит $C^2[0,l]$ и удовлетворяет условиям согласования $g(x)|_{x=0} = v_0(t)|_{t=T}$, $g(x)|_{x=l} = v_1(t)|_{t=T}$. Тогда в случае существования решения $\{u(x,t), f(x)\}$, принадлежащего $C^{2,1}(\overline{Q}) \times C[0,l]$ и удовлетворяющего условиям согласования*

$$\begin{aligned} v_{0t}|_{t=0} - \varphi_{xx}|_{x=0} &= \{h(x)f(x) + p(x,0)\}|_{x=0}, \\ v_{1t}|_{t=0} - \varphi_{xx}|_{x=l} &= \{h(x)f(x) + p(x,0)\}|_{x=l}, \end{aligned} \tag{4}$$

это решение определяется однозначно.

Доказательство. Допустим, что (u_1, f_1) и (u_2, f_2) — два решения обратной задачи (1)–(3). Обозначим $\Delta u = u_2 - u_1$, $\Delta f = f_2 - f_1$. В силу (4) имеем $\Delta f|_{x=0,x=l} = 0$; кроме того, из (1)–(3) для Δu и Δf следуют соотношения

$$\Delta u_t - \Delta u_{xx} = h(x)\Delta f(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \Delta u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \end{gathered} \tag{6}$$

с финальным условием $\Delta u|_{t=T} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Применяя принцип двойственности, рассмотрим задачу, сопряженную с (5), (6):

$$\psi_t + \psi_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{7}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=1} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{8}$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{9}$$

где $\eta(x)$ — произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$.

Лемма 1. *Для любой функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$ решение $\psi(x,t;\eta)$ сопряженной задачи (7)–(9) принадлежит $C^{2,1}(Q)$ и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi(x,t;\eta)\, h(x)\Delta f(x)\, dx\, dt = 0 \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]. \tag{10}$$

При выводе этого соотношения используется выражение

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi(\Delta u_t - \Delta u_{xx})\,dx\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \Delta u(\psi_t + \psi_{xx})\,dx\,dt.$$

С одной стороны, из уравнений (5), (7) следует, что

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi(x,t)\,h(x)\Delta f(x)\,dx\,dt.$$

С другой стороны, при интегрировании по частям с учетом (5), (6) и (7)–(9), а также условия для $\Delta u|_{t=T}$ получаем

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\psi \Delta u_t + \Delta u \psi_t)\,dx\,dt - \int\limits_0^T \psi \Delta u_x\Big|_{x=0}^{x=l} dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi_x \Delta u_x\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \Delta u \psi_x\Big|_{x=0}^{x=l} dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^l \psi_x \Delta u_x\,dx\,dt = \int\limits_0^l \psi \Delta u\Big|_{t=0}^{t=T} dx = 0,$$

причем именно из-за условия $\Delta u|_{t=T} = 0$ следует произвольность функции $\eta(x)$ в (9). Лемма 1 доказана.

Свойства решений сопряженной задачи (7)–(9) устанавливает

Лемма 2. *При пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$ соответствующие решения $\psi(x,t;\eta)$, усредненные на произвольном временно́м интервале $[0,T_0]$, $0 < T_0 \leqslant T$,*

$$\Psi(x;\eta) = T_0^{-1} \int\limits_0^{T_0} \psi(x,t;\eta)\,dt,$$

образуют множество, всюду плотное в $L_2[0,l]$: из соотношения для некоторой функции $w(x) \in C[0,l]$

$$\int\limits_0^l \Psi(x;\eta)\,w(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$$

следует, что $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Заметим, что при выводе леммы 2 задача (7)–(9) рассматривается как задача управления с управляющим воздействием в начальном условии. Роль такого воздействия играет функция $\eta(x)$ в (9), и замена переменной $t' = T - t$ приводит задачу (7)–(9) к обычному виду задачи управления для уравнения теплопроводности. К ней непосредственно можно применить результат Лионса о так называемых усредненных функционалах [2, с. 61–63]. Этот результат связан со свойством плотности, которым обладают решения задачи управления такого типа при их усреднении на произвольном временно́м интервале. Изложим кратко соответствующую постановку задачи управления, сформулированную в [2, с. 61–63].

Пусть $u = u(x,t;\xi)$ — решение задачи

$$u' + Au = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T],$$

$$u(0) = \xi, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in H,$$

в классе функций $u \in L_2(0,T;V)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, где $H = L_2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega) = \{v; v \in W_2^1(\Omega), v|_\Gamma = 0\}$, V' — пространство распределений на Ω. Здесь A — самосопряженный оператор, не зависящий от t, $a(u,v) = a(v,u)$, где $a(u,v) = \int_\Omega u_x v_x\,dx$, $a(v,v) \geqslant \beta_0 ||v||^2$, $v \in W_2^1(\Omega)$, $\beta_0 > 0$.

Для некоторого произвольного τ_0, $0 < \tau_0 \leqslant T$, рассматриваются усредненные значения функции u на интервале $(T - \tau_0, T)$

$$Mu = Mu(x,t;\xi) = \tau_0^{-1} \int\limits_{T-\tau_0}^{T} u(x,t;\xi)\,dt$$

и составляется усредненный функционал

$$J(\xi) = \int_{\Omega} \{Mu(x,t;\xi) - \chi(x)\}^2\,dx,$$

где $\chi(x)$ — заданная функция из $L_2(\Omega)$. Применение термина "усредненный" к функционалу $J(\xi)$ связано с тем, что он определяет зависимость от ξ через значения $u(x,t;\xi)$ на всем временно́м интервале $(T-\tau_0,T)$, а не через одно значение при $t=T$.

Соответствующее утверждение в [2, с. 63, теорема 11.1] о плотности множества усредненных решений при пробегании функцией ξ пространства $H=L_2(\Omega)$ формулируется в виде $\inf_{\xi\in H}\ J(\xi)=0$. Это означает отсутствие ортогонального дополнения к такому множеству. Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к сопряженной задаче (7)–(9), заключаем на основании леммы 2, что из соотношения (10) леммы 1 вытекает равенство $h(x)\Delta f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Но функция $h(x)>0$, следовательно, $\Delta f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. В силу единственности решения задачи теплопроводности (5), (6) это означает, что и $\Delta u(x,t)\equiv 0$ при $(x,t)\in\overline{Q}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Очевидно, что условие положительности коэффициента $h(x)$ в уравнении (1) может быть заменено на условие его знакоопределенности $|h(x)|>0$ при $0\leqslant x\leqslant l$.

2. Обратная задача для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной правой частью.

2.1. Рассмотрим теперь применение принципа двойственности к обратной параболической задаче в следующей постановке. Требуется найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q}=\{0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$ и $f(x)$ при $0\leqslant x\leqslant l$, удовлетворяющие первой краевой задаче

$$c(x,t,u)u_t - Lu = h(x,t)f(x)+p(x,t), \quad (x,t)\in Q, \tag{11}$$

$$u|_{x=0}=v_0(t), \quad u|_{x=l}=v_1(t), \quad 0<t\leqslant T, \tag{12}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{13}$$

и дополнительному условию в конечный момент времени

$$u|_{t=T}=g(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{14}$$

в предположении, что $Lu\equiv(a(x,t,u)u_x)_x - b(x,t,u)u_x - d(x,t,u)$ — равномерно эллиптический оператор, $a\geqslant a_{\min}>0$, b, $c\geqslant c_{\min}>0$, d, h, p, v_i $(i=0,1)$, φ и g — известные функции, $a_{\min}$, $c_{\min}=\mathrm{const}>0$.

Сформулируем требования к входным данным обратной задачи (11)–(14), используя стандартные обозначения классов функций из [11].

(i) При $(x,t)\in\overline{Q}$, $|u|<\infty$ функции a, a_x, a_u, b, c, d равномерно ограничены.

(ii) При $(x,t,u)\in\overline{D}=\overline{Q}\times[-M_0,M_0]$ $(M_0\geqslant\max_{(x,t)\in\overline{Q}}|u|)$ функции a и c принадлежат $H^{1,\lambda/2,1}(\overline{D})$, b, d, a_x, a_u, c_x и c_u принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2,1}(\overline{D})$, $0<\lambda<1$.

(iii) Функции $h(x,t)$ и $p(x,t)$ принадлежат $H^{\lambda,\lambda/2}(\overline{Q})$, функции $v_0(t)$, $v_1(t)$ и $\varphi(x)$ принадлежат соответственно $H^{1+\lambda/2}[0,T]$ и $H^{2+\lambda}[0,l]$, $v_0(t)|_{t=0}=\varphi|_{x=0}$, $v_1(t)|_{t=0}=\varphi|_{x=l}$.

(iv) Функция $g(x)$ принадлежит $H^{2+\lambda}[0,l]$, выполнены условия согласования

$$c(x,T,g)v_{0t} - Lg|_{x=0,t=T}=\{h(x,T)f(x)+p(x,T)\}|_{x=0},$$

$$c(x,T,g)v_{1t} - Lg|_{x=l,t=T}=\{h(x,T)f(x)+p(x,T)\}|_{x=l},$$

в которых значения $f|_{x=0}$ и $f|_{x=l}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} c(x,0,\varphi)v_{0t} - L\varphi|_{x=0,t=0} &= \{h(x,0)f(x)+p(x,0)\}|_{x=0},\\ c(x,0,\varphi)v_{1t} - L\varphi|_{x=l,t=0} &= \{h(x,0)f(x)+p(x,0)\}|_{x=l}. \end{aligned} \tag{15}$$

В силу [11] требования (i)–(iii) обеспечивают однозначную разрешимость квазилинейной краевой задачи (11)–(13) в классе Гельдера $u(x,t)\in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(x)\in H^{\lambda}[0,l]$ в правой части уравнения (11), удовлетворяющей условиям согласования (15). Требование (iv) является следствием (15) и условия согласования входных данных при $t=T$.

Исходя из сказанного, дадим

Определение. Решением в классах Гельдера обратной задачи с финальным наблюдением (11)–(14) назовем пару функций $\{u(x,t), f(x)\}$:

$$u(x,t) \in H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q}), \quad f(x) \in H^{\lambda}[0,l], \quad 0 < \lambda < 1,$$

удовлетворяющих соотношениям (11)–(15) в обычном смысле.

2.2. Предлагаемый подход к исследованию проблемы единственности такого решения состоит в следующем. Допустим, что $\{u_1, f_1\}$ и $\{u_2, f_2\}$ — два решения обратной задачи (11)–(14). Функции u_1 и u_2 можно рассматривать как решения краевой задачи (11)–(13), соответствующие функциям f_1 и f_2 в правой части уравнения (11), т.е. для них справедливы оценки в классе Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [11]. Для разностей $\Delta u = u_2 - u_1$ и $\Delta f = f_2 - f_1$ в силу (11)–(15) следует, что $\Delta f|_{x=0} = 0$, $\Delta f|_{x=l} = 0$ и, кроме того,

$$c(x,t,u_1)\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u = h(x,t)\Delta f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{16}$$

$$\Delta u|_{x=0} = 0, \quad \Delta u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{17}$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{18}$$

с финальным условием $\Delta u|_{t=T} = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$. Здесь

$$\mathcal{L}\Delta u \equiv (a(x,t,u_1)\Delta u_x)_x - \mathcal{A}\Delta u_x - \mathcal{B}\Delta u$$

— линейный оператор, коэффициенты которого $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ зависят соответствующим образом от u_2 и ее производных u_{2x}, u_{2xx}, u_{2t}, а также от производных по u коэффициентов уравнения (11) в точке (x,t,u) при $u = \sigma u_1 + (1-\sigma)u_2$, $0 < \sigma < 1$. В частности, $\mathcal{A} = b(x,t,u) - a_u(x,t,u)u_{2x}$. Все коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ непрерывны как функции (x,t) в силу требований (i)–(iii) и принадлежности $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ классу $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ [11].

Для доказательства утверждения, что $\Delta u = 0$ в $\overline{Q}$, $\Delta f = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$, воспользуемся принципом двойственности и изучим краевую задачу, сопряженную с (16)–(18):

$$(c(x,t,u_1)\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{19}$$

$$\psi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{x=l} = 0, \quad 0 \leqslant t < T, \tag{20}$$

$$\psi|_{t=T} = \eta(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{21}$$

где $\eta(x)$ — произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$,

$$\mathcal{L}^*\psi \equiv (a(x,t,u_1)\psi_x)_x + (\mathcal{A}\psi)_x - \mathcal{B}\psi.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены требования* (i)–(iv) *и, кроме того, производные b_x и c_t непрерывны при $(x,t,u) \in \overline{D}$. Тогда при любой функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$ соответствующее решение $\psi(x,t;\eta)$ сопряженной задачи* (19)–(21) *принадлежит $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ и удовлетворяет соотношению*

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x,t;\eta)h(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall \eta \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]. \tag{22}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что все коэффициенты в уравнении (19) непрерывны как функции (x,t) в силу свойств функций a, b, c, d и оценок в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ для $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Следовательно, задача (19)–(21) как линейная краевая задача для $\psi(x,t)$ разрешима в классе $C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ (см. [11, с. 364]).

При выводе соотношения (22) рассматривается выражение

$$I = \int_0^T \int_0^l \psi\{c\Delta u_t - \mathcal{L}\Delta u\}\,dx\,dt + \int_0^T \int_0^l \Delta u\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^*\psi\}\,dx\,dt.$$

С одной стороны, из уравнений (16) и (19) вытекает, что

$$I = \int_0^T \int_0^l \psi(x,t;\eta)h(x,t)\Delta f(x)\,dx\,dt.$$

С другой стороны, проводя интегрирование по частям с учетом (16)–(18) и (19)–(21), а также финального условия для $\Delta u|_{t=T}$, устанавливаем, что

$$I = \int\limits_0^T \int\limits_0^l (c\Delta u_t \psi + \Delta u (c\psi)_t)\, dx\, dt - \int\limits_0^T \{\psi a \Delta u_x\}\Big|_{x=0}^{x=l} dt + \int\limits_0^T \{\psi \mathcal{A} \Delta u\}\Big|_{x=0}^{x=l} dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \{\Delta u a \psi_x\}\Big|_{x=0}^{x=l} dt = \int\limits_0^l \{c\Delta u \psi\}\Big|_{t=0}^{t=T} dx = 0.$$

Замечание 2. Именно из-за условия $\Delta u|_{t=T} = 0$ функция $\eta(x)$ в начальном условии (21) может быть произвольной. Это позволяет отнести сопряженную задачу (19)–(21) к задачам управления с управляющим воздействием в начальном условии (роль такого воздействия играет $\eta(x)$). Замена переменной $t' = T - t$ приводит задачу (19)–(21) к обычному виду задачи управления для линейного параболического оператора.

2.3. Следующие леммы показывают, что решения задачи (19)–(21) как задачи управления обладают свойствами плотности.

Лемма 4. *Пусть выполнены требования* (i) – (iv) *и, кроме того, производные a_t, b_x и c_t непрерывны при $(x, t, u) \in \overline{D}$. Тогда при пробегании функцией $\eta(x)$ пространства $\overset{\circ}{C}{}^2[0, l]$ соответствующее множество значений $\{\psi(x, t; \eta)|_{t=\tau}\}$ является всюду плотным в $L_2[0, l]$ на любом временнóм слое $t = \tau$, т.е. из соотношения*

$$\int\limits_0^l \psi(x, t; \eta)|_{t=\tau}\, w(x)\, dx = 0 \tag{23}$$

для некоторой функции $w(x) \in \overset{\circ}{C}[0, l]$ следует, что $w(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Доказательство. Справедливость утверждения леммы 4 при $\tau = T$ сразу следует из (21) в силу произвольности $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0, l]$ и плотности такого множества в $L_2[0, l]$.

В любой достаточно малой окрестности временнóго слоя $t = T$ свойством плотности обладает также множество $\big\{\psi(x, t; \eta)|_{t=T-\varepsilon}\big\}$ в силу непрерывности $\psi(x, t; \eta)$ при любой $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0, l]$ (лемма 3).

При выводе леммы 4 для значений τ, таких, что $0 \leqslant \tau \leqslant T - \varepsilon$, снова используем принцип двойственности, но применяем его уже к задаче (19)–(21). А именно, рассматриваем линейную краевую задачу, сопряженную с (19)–(21) в области $\overline{Q}_\tau = \{0 \leqslant x \leqslant l, \tau \leqslant t \leqslant T\}$ (ср. с (16)–(18))

$$c(x, t, u_1) z_t - \mathcal{L} z = 0, \quad 0 < x < l, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{24}$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=l} = 0, \quad \tau < t \leqslant T, \tag{25}$$

$$z|_{t=\tau} = \theta(x; \tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{26}$$

$$\mathcal{L} z \equiv (a(x, t, u_1) z_x)_x - \mathcal{A} z_x - \mathcal{B} z, \quad \theta(x; \tau) = \big(c(x, t, u_1)|_{t=\tau}\big)^{-1} w(x).$$

Ее решение $z(x, t; \tau)$, принадлежащее $C(\overline{Q}_\tau) \cap C^{2,1}(Q_\tau)$, непрерывным образом зависит от параметра τ в силу устойчивости относительно входных данных [11]. Для него устанавливается дополнительное условие $z(x, t; \tau)|_{t=T} = 0$ с помощью непрерывной функции

$$F(\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_0^l z\{(c\psi)_t + \mathcal{L}^* \psi\}\, dx\, dt + \int\limits_\tau^T \int\limits_0^l \psi\{c z_t - \mathcal{L} z\}\, dx\, dt,$$

которая с учетом (19)–(21) и (23)–(26) приводится к виду

$$F(\tau) = \int\limits_0^l c(x, t, u_1)|_{t=T} z(x, T; \tau) \eta(x)\, dx - \int\limits_0^l c(x, t, u_1)|_{t=\tau} \psi(x, \tau; \eta) \theta(x; \tau)\, dx = 0. \tag{27}$$

Отсюда, исходя из предположения (23) и вида функции $\theta(x;\tau)$, и вытекает условие $z(x,t;\tau)|_{t=T}=0$ в силу неравенства $c \geqslant c_{\min} > 0$ и произвольности функции $\eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$.

Полученное условие $z(x,t;\tau)|_{t=T}=0$ позволяет рассматривать уравнение (24) с граничными условиями (25) как однородную краевую задачу первого рода для линейного параболического уравнения с обратным направлением времени. При этом коэффициенты уравнения (24) как функции (x,t) удовлетворяют в силу своей гладкости и равномерной ограниченности в $\overline{Q}_\tau$ тем требованиям (см. [4, 5]), которые обеспечивают единственность решения такой задачи. Однако тогда $z(x,t;\tau)\equiv 0$ в $\overline{Q}_\tau$, в том числе и при $t=\tau$, т.е. $\theta(x;\tau)=0$, $w(x)=0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$. Таким образом, плотность множества $\{\psi(x,t;\eta)|_{t=\tau}\}$ является следствием свойства обратной единственности для уравнения (24). Лемма 4 доказана.

Дальнейшее исследование проблемы единственности решения обратной задачи связано с изучением усредненных на временно́м интервале $[0,T_0]$ функций

$$\Psi(x;\eta) = T_0^{-1}\int\limits_0^{T_0}\psi(x,t;\eta)\,dt,$$

где T_0 — произвольная точка, $0 < T_0 \leqslant T$.

Обобщением леммы 4 для произвольного временно́го интервала $[0,T_0]$ является

Лемма 5. *Пусть входные данные удовлетворяют условиям леммы* 4. *При пробегании функцией* $\eta(x)$ *пространства* $\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$ *соответствующие усредненные функции* $\Psi(x;\eta)$ *образуют множество, всюду плотное в* $L_2[0,l]$, *т.е. из соотношения*

$$\int\limits_0^l \Psi(x;\eta)\,w(x)\,dx = 0 \quad \forall\eta\in\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l] \tag{28}$$

для некоторой функции $w(x)\in\overset{\circ}{C}\,[0,l]$ *следует, что* $w(x)=0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Доказательство. Как и при выводе леммы 4, рассматривается краевая задача (24)–(26) в области $\overline{Q}_\tau$, но уже при всех значениях τ, $0\leqslant\tau\leqslant T_0$, $0<T_0\leqslant T-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ — произвольно малое, но конечное число). Для функции $F(\tau)$, учитывая (27) и вид функции $\theta(x;\tau)$, имеет место соотношение

$$\int\limits_0^{T_0}F(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^l\int\limits_0^{T_0}z(x,T;\tau)\,d\tau\,c(x,t,u_1)|_{t=T}\,\eta(x)\,dx - \int\limits_0^l\int\limits_0^{T_0}\psi(x,\tau;\eta)\,d\tau\,w(x)\,dx = 0. \tag{29}$$

Из (29) в силу (28), неравенства $c\geqslant c_{\min}>0$ и произвольности функции $\eta(x)$ следует, что

$$\int\limits_0^{T_0}z(x,T;\tau)\,d\tau = 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{30}$$

Заметим, что такое равенство справедливо для любого интервала усреднения $[0,T_0]$ независимо от конкретного значения T_0. Так как подынтегральная функция $z(x,T;\tau)$ является решением при $t=T$ задачи (24)–(26) в области $\overline{Q}_\tau$, то равенство (30) означает, что результат интегрирования таких решений при всех τ, $0\leqslant\tau\leqslant T_0$, равен 0 независимо от конкретного значения T_0. Рассматривая этот интеграл в (30) как функцию верхнего предела и переменной x, заключаем в силу равенства (30), что эта функция, а следовательно, и ее производная по T_0 равны 0. Из (30) при дифференцировании по верхнему пределу вытекает, что $z(x,T;T_0)=0$.

Сказанное означает, что решение задачи (24)–(26) в области $\overline{Q}_\tau$ при $\tau=T_0$ удовлетворяет в конечный момент времени дополнительному условию $z(x,T;T_0)=0$. Используя, как и при выводе леммы 4, результаты обратной единственности для такой задачи [4, 5], приходим к тождеству $z(x,t;T_0)\equiv 0$ в $\overline{Q}_{T_0}$. Следовательно, при $t=T_0$ из (26) вытекает, что $\theta(x;T_0)=0$, $w(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Таким образом, усредненные функции $\Psi(x;\eta)$ обладают свойством плотности, причем в силу произвольности $\varepsilon>0$ и T_0, $0<T_0\leqslant T-\varepsilon$, и на всем интервале $[0,T]$. Лемма 5 доказана.

По аналогии с леммой 5 устанавливается

Лемма 6. *Пусть для входных данных выполнены условия леммы* 4. *Если для любой функции* $\eta(x)$ *из* $\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$ *соответствующие решения сопряженной задачи* $\psi(x,t;\eta)$, *усредненные на некотором временно́м интервале* $[0,T_0]$, $0<T_0\leqslant T$, *удовлетворяют соотношению*

$$\int\limits_0^{T_0}\int\limits_0^{l}\psi(x,t;\eta)w(x,t)\,dx\,dt=0\quad\forall\eta\in\overset{\circ}{C}{}^2\,[0,l]$$

для некоторой непрерывной функции $w(x,t)$, *то* $w(x,T_0)=0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$.

Вывод леммы 6 проводится по той же схеме, что и вывод леммы 5. Отметим только, что в качестве начальной функции $\theta(x;\tau)$ в (26) берется

$$\theta(x;\tau)=\big(c(x,t,u_1)|_{t=\tau}\big)^{-1}w(x,\tau).$$

При этом непрерывность функции $w(x,\tau)$ позволяет заключить в силу произвольности $\varepsilon>0$ и T_0, $0<T_0\leqslant T-\varepsilon$, что утверждение леммы 6 справедливо и для $T_0=T$, т.е. $w(x,T)=0$.

Замечание 3. Леммы 4–6 позволяют распространить на случай линейного параболического оператора общего вида (т.е. с коэффициентами, зависящими от (x,t)) известный результат Лионса о так называемых усредненных функционалах [2, с. 63, теорема 11.1]. Тем самым подтверждено его предположение [2, с. 64, замечание 11.4], что и в более общем случае имеет место плотность множества решений задач управления при их усреднении на произвольном временно́м интервале. Заметим, что лемма 5 дает один из способов доказательства утверждения Лионса из [2, с. 63, теорема 11.1].

2.4. Установленные свойства плотности для сопряженной задачи (19)–(21) позволяют получить достаточные условия единственности решения $\{u(x,t),f(x)\}$ обратной задачи (11)–(14).

Теорема 2. *Пусть выполнены требования* (i) – (iv) *и, кроме того, производные* a_t, b_x *и* c_t *непрерывны при* $(x,t,u)\in\overline{D}$. *Предположим также, что коэффициент* $h(x,t)$ *знакоопределен при* $t=T$, *т.е. имеет место неравенство* $|h(x,T)|>0$ *при* $0\leqslant x\leqslant l$. *Тогда в случае существования решения* $\{u(x,t),f(x)\}$ *в классах Гельдера* $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\times H^{\lambda}[0,l]$ *это решение определяется однозначно.*

Для доказательства достаточно применить лемму 6 при $w(x,t)=h(x,t)\Delta f(x)$ к интегральному соотношению (22) леммы 3, чтобы получить $h(x,T)\Delta f(x)=0$, т.е. $\Delta f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant l$. Тогда из соотношений (16)–(18), которые представляют собой линейную краевую задачу относительно $\Delta u(x,t)$, вытекает в силу единственности ее решения [11], что $\Delta u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$. Это завершает доказательство теоремы 2.

Замечание 4. Предположим, что в исходной обратной задаче вместо уравнения (11) задано линейное параболическое уравнение

$$c(x,t)u_t-Lu=h(x,t)f(x)+p(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{31}$$

$$Lu\equiv(a(x,t)u_x)_x-b(x,t)u_x-d(x,t)u,$$

и входные данные удовлетворяют требованиям однозначной разрешимости линейной краевой задачи (31), (12), (13) в $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})$ при любой функции $f(x)\in H^{\lambda}[0,l]$ [11]. Доказательство теоремы единственности для такой обратной задачи повторяет (с соответствующими упрощениями) вывод приведенной выше теоремы 2.

Замечание 5. Выбор пространств Гельдера $H^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\overline{Q})\times H^{\lambda}[0,l]$ для $\{u(x,t),f(x)\}$ является естественным, так как он обусловлен точными дифференциальными зависимостями между входными данными и решением соответствующей первой краевой задачи. Однако если функция f в правой части уравнения (11) или (31) ищется в виде $f(x,t)$, а не $f(x)$, то такая обратная задача не обладает, вообще говоря, свойством единственности. Это показывает следующий пример.

Пример 2. Две пары функций $\{u_1,f_1\}$, $\{u_2,f_2\}$, где

$$u_1(x,t)=x(x-1)(1+t\exp(-t))+t,$$

$$f_1(x,t)=(x(x-1)(1-t)-2t)\exp(-t)+t-1,$$

$$u_2(x,t)=x(x-1)(1+t\exp(-t^2))+t,$$

$$f_2(x,t) = (x(x-1)(1-2t^2) - 2t)\exp(-t^2) + t - 1,$$

являются решениями следующей обратной задачи в области $Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad 0 < t \leqslant 1, \quad u|_{t=0} = x(x-1), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

с финальным условием при $t = 1$

$$u|_{t=1} = x(x-1)(1+e^{-1}) + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

т.е. для этой задачи единственность решения не имеет места. Таким образом, расширение множества допустимых решений включением в него пар функций $\{u(x,t), f(x,t)\}$ может привести к потере свойства единственности.

3. Достаточность условий единственности решения $\{u(x,t), f(x)\}$, доказанных на основе принципа двойственности.

3.1. Обсудим вопросы достаточности условий единственности в обратных параболических задачах с неизвестной правой частью, полученных в данном исследовании, в сравнении с известными результатами единственности из [8, 9]. В этих работах рассматриваются обратные задачи для линейных параболических уравнений с коэффициентами, не зависящими от t. Такие задачи, относящиеся к некорректно поставленным, после целого ряда преобразований (в том числе дифференцирования исходного параболического уравнения по t и тем самым перехода к эволюционному оператору более высокого порядка) сводятся к корректной задаче в виде уравнения Фредгольма второго рода. На основе изучения условий разрешимости и единственности для такого уравнения делается вывод об однозначной разрешимости исходной обратной задачи.

Для проведения сравнения рассмотрим обратную задачу теплопроводности с финальным переопределением. Требуется найти функции $u(x,t)$ в области $\overline{Q} = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и $f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ из условий

$$u_t - u_{xx} = h(x,t)f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{32}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{33}$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{34}$$

где коэффициент $h(x,t)$ — известная гладкая функция.

В силу [8, 9] применительно к обратной задаче (32)–(34) достаточные условия единственности решения $\{u(x,t), f(x)\}$ в классе гладких функций включают в себя требования $h(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$, $h(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а также требования к производной: $h_t(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$ (см. [8]) и $h_t(x,t) > 0$ в $\overline{Q}$ (см. [9]). При этом утверждается, что эти требования к производной не могут быть отброшены без дополнительных ограничений: в частности, в [9, 10] приводятся примеры “неединственности” при невыполнении указанных условий на h_t.

В то же время достаточные условия единственности решения $\{u(x,t), f(x)\}$ в аналогичных классах гладких функций, доказанные в теореме 2 на основе принципа двойственности, применительно к обратной задаче (32)–(34) включают в себя только требование $h(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Требований к знаку производной h_t и даже к самому ее существованию не возникает.

Приведем несколько примеров для сравнения таких достаточных условий.

Пример 3. Предположим, что $h = h(x)$, $h(x) \in C[0,1]$, $h(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. В теореме 1 для такого частного случая доказано (непосредственно на основе результата Лионса [2] о плотности усредненных решений задачи управления), что при любой непрерывной положительной функции $h(x)$ обратная задача (32)–(34) имеет единственное тривиальное решение $u = 0$, $f = 0$.

Введем функцию $v(x,t) = u(x,t)\exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$, — некоторое число. Функция $v(x,t)$ однозначно определяется по $u(x,t)$ и в силу (32)–(34) удовлетворяет соотношениям

$$v_t - v_{xx} + \lambda v = \exp(-\lambda t)h(x)f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{35}$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=1} = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{36}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v|_{t=T} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{37}$$

Из теоремы 2 следует, что такая задача имеет единственное тривиальное решение $v = 0$, $f = 0$, так как функция $H(x,t) = \exp(-\lambda t)h(x)$ удовлетворяет достаточному условию $H(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Заметим, что, хотя $v(x,t)$ однозначно определяется по $u(x,t)$ (которая единственна и в смысле достаточных условий из [8–10]), тем не менее для $v(x,t)$ как для решения задачи (35)–(37) не выполнены эти достаточные условия из [8–10]. А именно, производная $H_t(x,t) = -\lambda \exp(-\lambda t)h(x) < 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом, на единственности решения $v(x,t)$ не сказалась отрицательность производной, хотя в [9, 10] утверждается, что требования к знаку производной не могут быть отброшены.

Пример 4. Предположим, что функция $h(x,t)$ в (32) удовлетворяет достаточным условиям единственности из [8–10], т.е. $h(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$, $h(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $h_t(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{Q}$. Тогда, как следует из [8–10], задача (32)–(34) имеет единственное тривиальное решение $u = 0$, $f = 0$. Это решение единственно и в смысле теоремы 2, так как $h(x,T) > 0$.

Рассмотрим функцию $v(x,t) = u(x,t)\exp(-\lambda t)$, однозначно определяемую по $u(x,t)$ при любом значении $\lambda > 0$. Для $v(x,t)$ справедливо уравнение

$$v_t - v_{xx} + \lambda v = \exp(-\lambda t)h(x,t)f(x), \quad (x,t) \in Q, \tag{38}$$

с условиями (36), (37). Коэффициент $H(x,t) = \exp(-\lambda t)h(x,t)$ в правой части уравнения (38) удовлетворяет условиям $H(x,t) \geqslant 0$, $H(x,T) > 0$. Однако его производная $H_t = \exp(-\lambda t)(h_t - \lambda h)$ меняет знак в зависимости от величины λ:

$$H_t < 0 \quad \text{при} \quad \lambda > \max_{(x,t)\in\overline{Q}} h_t \big(\min_{(x,t)\in\overline{Q}} h\big)^{-1}, \quad H_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \lambda < \min_{(x,t)\in\overline{Q}} h_t \big(\max_{(x,t)\in\overline{Q}} h\big)^{-1}.$$

Таким образом, единственность $v(x,t)$ не связана со знаком производной H_t (как это и следует из теоремы 2 в силу достаточности условия $H(x,T) > 0$).

Пример 5. В [9, теорема 3.1] утверждается, что существует положительная гладкая функция $h(x,t)$ с производной $h_t(x,t) \leqslant 0$, при которой обратная задача (32)–(34) имеет кроме очевидного решения $u_1 = 0$, $f_1 = 0$ еще и нетривиальное решение $\{u_2, f_2\}$ (как считается в [9], это должно подтвердить важность положительной определенности производной $h_t(x,t)$).

Рассмотрим обратную задачу (32)–(34) с этим коэффициентом $h(x,t)$ из [9] и введем функцию $v(x,t) = u(x,t)\exp(-\lambda t)$, однозначно определяемую по $u(x,t)$ при любом значении λ. Соответствующее уравнение (38) с условиями (36), (37) должно иметь два решения $\{v_1, f_1\}$, $\{v_2, f_2\}$. Однако при соответствующем выборе λ производная функции $H(x,t) = \exp(-\lambda t)h(x,t)$ (см. (38)) является строго положительной. Действительно,

$$H_t = \exp(-\lambda t)(h_t - \lambda h) > 0 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad \text{если} \quad \lambda < 0, \quad |\lambda| > \max_{(x,t)\in\overline{Q}} |h_t| \big(\min_{(x,t)\in\overline{Q}} h\big)^{-1}.$$

Однако тогда при таких значениях λ из достаточных условий [8, 9] вытекает единственность решения обратной задачи (38), (36), (37), а следовательно, и единственность решения $u(x,t) = v(x,t)\exp(\lambda t)$ обратной задачи (32)–(34). Но, как утверждается в [9], при этом коэффициенте $h(x,t)$ свойство единственности потеряно.

Заметим, что в силу теоремы 2 такого противоречия нет: $u(x,t)$ и $v(x,t)$ единственны как решения соответствующих обратных задач (32)–(34) и (38), (36), (37), так как выполнены достаточные условия этой теоремы. Действительно, $h(x,T) > 0$, $H(x,T) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом, утверждение из [9], что обратная задача (32)–(34) может иметь нетривиальное решение при $h_t(x,t) \leqslant 0$, не подтверждается.

3.2. На наш взгляд, примеры 3–5 являются подтверждением того, что проблема единственности решения обратной задачи для параболического уравнения с неизвестной правой частью связана со свойствами самой этой задачи в ее исходной постановке. По-видимому, сформулированные в [8–10] требования (существование производной $h_t(x,t)$ и ее знакоопределенность) относятся не к исходной задаче, а к тому операторному уравнению Фредгольма второго рода, к которому она сведена после целого ряда преобразований, в том числе дифференцирования параболического уравнения по t. Благодаря таким требованиям это уравнение Фредгольма можно рассматривать как регуляризацию исходной некорректной задачи для линейного параболического уравнения с коэффициентами, не зависящими от t (как известно, регуляризирующий оператор может быть неоднозначен). При применении других способов регуляризации такие требования могут и не возникнуть. Например, регуляризирующие методы вариационного типа (метод А. Н. Тихонова, метод квазирешений, итерационные методы) основаны на минимизации функционалов, определенных на решениях соответствующих прямых задач для тех же параболических уравнений (без дифференцирования этих уравнений по t). Отметим, что при таких способах регуляризации сохраняется и физический смысл исходных математических моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольдман Н.Л.* Свойства решений параболических уравнений с неизвестной правой частью и их сопряженных задач // Доклады АН. 2008. **420**, № 2. 151–156.
2. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
4. *Lees M., Protter M.H.* Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities // Duke Math. J. 1961. **28**. 369–383.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
6. *Гольдман Н.Л.* Однозначность определения функции источника в квазилинейной обратной задаче Стефана с финальным наблюдением // Доклады АН. 2012. **444**, № 6. 597–601.
7. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Доклады АН. 1985. **280**, № 3. 533–536.
8. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1987. **23**, № 11. 1971–1980.
9. *Isakov V.* Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Commun. on Pure and Applied Math. 1991. **14**, N 2. 185–209.
10. *Костин А.Б.* О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи // Доклады АН. 2013. **453**, № 2. 138–141.
11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
12. *Egger H., Engl H.W., Klibanov M.V.* Global uniqueness and Hölder stability for recovering a nonlinear source term in a parabolic equation // Inverse Problems. 2005. **21**, N 1. 271–290.
13. *Isakov V.* On uniqueness in the inverse conductivity problem with local data // Inverse Problems and Imaging. 2007. **1**. 95–105.
14. *Wang Y.B., Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M.* A numerical method for solving the inverse heat conduction problem without initial value // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. **18**, N 5. 655–671.
15. *Slodička M., Lesnic D., Onyango T.T.M.* Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. **18**, N 1. 65–81.
16. *Salva N.N., Tarzia D.A.* Simultaneous determination of unknown coefficients through a phase-change process with temperature-dependent thermal conductivity // JP J. of Heat and Mass Transfer. 2011. **5**, N 1. 11–39.
17. *Pyatkov S.G.* On some classes of inverse problems for parabolic and elliptic equations // J. of Evolution Equations. 2011. **11**, N 1. 155–186.
18. *Erdem A., Lesnic D., Hasanov A.* Identification of a spacewise dependent heat source // Applied Math. Modelling. 2013. **37**, N 24. 10231–10244.
19. *Wen J., Yamamoto M., Wei T.* Simultaneous determination of a time-dependent heat source and the initial temperature in an inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2013. **21**, N 3. 485–499.
20. *Hào D.N., Thanh P.X., Lesnic D., Ivanchov M.* Determination of a source in the heat equation from integral observations // J. of Computations and Applied Mathematics. 2014. **264**, N 1. 82–98.

Поступила в редакцию
04.02.2014

Application of the Duality Principle in Inverse Problems for Parabolic Equations with Unknown Right-Hand Sides

N. L. Gol'dman[1]

[1] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: goldman@srcc.msu.ru*

Received February 4, 2014

Abstract: The duality principle is considered to prove uniqueness theorems for inverse parabolic problems with final overdetermination. The solutions of such ill-posed problems may fail to exist or be unstable with respect to errors in the input data (the corresponding example is constructed). However, we show that, if a solution exists, it can be unique. The proposed approach allows one to clarify a relationship between the uniqueness property and the density properties of solutions of the corresponding adjoint problems. It is shown that these adjoint problems can be considered as control problems with a control function given in the initial conditions. It is also shown that such density properties follow, in their turn, from the known inverse uniqueness for linear parabolic operators. A number of examples are discussed to illustrate the sufficiency of the uniqueness conditions proved on the basis of the duality principle. Application of this principle makes it possible to study the uniqueness problem for ill-posed inverse problems in their original formulations in the context of the theory of parabolic equations.

Keywords: parabolic equations, inverse problems, adjoint problems, control problems, duality principle, uniqueness theorems, Hölder spaces.

References

1. N. L. Gol'dman, "Properties of Solutions of Parabolic Equations with Unknown Right-Hand Side and Adjoint Problems," Dokl. Akad. Nauk **420** (2), 151–156 (2008) [Dokl. Math. **77** (3), 350–353 (2008)].

2. R. Lattès and J.-L. Lions, *The Method of Quasi-Reversibility; Applications to Partial Differential Equations* (Elsevier, New York, 1969; Mir, Moscow, 1970).

3. J.-L. Lions, *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations* (Springer, Heidelberg, 1971; Mir, Moscow, 1972).

4. M. Lees and M. H. Protter, "Unique Continuation for Parabolic Differential Equations and Inequalities," Duke Math. J. **28**, 369–383 (1961).

5. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964; Mir, Moscow, 1968).

6. N. L. Gol'dman, "Uniqueness of Determination of a Source Function in a Quasilinear Inverse Stefan Problem with Final Overdetermination," Dokl. Akad. Nauk **444** (6), 597–601 (2012) [Dokl. Math. **85** (3), 406–410 (2012)].

7. M. V. Klibanov, "On a Class of Inverse Problems for Nonlinear Parabolic Equations," Dokl. Akad. Nauk SSSR **280** (3), 533–536 (1985) [Sov. Math. Dokl. **31**, 104–107 (1985)].

8. A. I. Prilepko and V. V. Solov'ev, "Solvability Theorems and Rothe's Method for Inverse Problems for a Parabolic Equation," Differ. Uravn. **23** (11), 1971–1980 (1987) [Differ. Equ. **23** (11), 1341–1349 (1987)].

9. V. Isakov, "Inverse Parabolic Problems with the Final Overdetermination," Commun. Pure Appl. Math. **14** (2), 185–209 (1991).

10. A. B. Kostin, "Complex Eigenvalues of Elliptic Operators and an Example of an Inverse Problem with Nonunique Solution," Dokl. Akad. Nauk **453** (2), 138–141 (2013) [Dokl. Math. **88** (3), 651–654 (2013)].

11. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967; SIAM, Providence, 1968).

12. H. Egger, H. W. Engl, and M. V. Klibanov, "Global Uniqueness and Hölder Stability for Recovering a Nonlinear Source Term in a Parabolic Equation," Inverse Probl. **21** (1), 271–290 (2005).

13. V. Isakov, "On Uniqueness in the Inverse Conductivity Problem with Local Data," Inverse Probl. Imaging **1** (1), 95–105 (2007).

14. Y. B. Wang, J. Cheng, J. Nakagawa, and M. Yamamoto, "A Numerical Method for Solving the Inverse Heat Conduction Problem without Initial Value," Inverse Probl. Sci. Eng. **18** (5), 655–671 (2010).

15. M. Slodička, D. Lesnic, and T. T. M. Onyango, "Determination of a Time-Dependent Heat Transfer Coefficient in a Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem," Inverse Probl. Sci. Eng. **18** (1), 65–81 (2010).

16. N. N. Salva and D. A. Tarzia, "Simultaneous Determination of Unknown Coefficients through a Phase-Change Process with Temperature-Dependent Thermal Conductivity," JP J. Heat Mass Transf. **5** (1), 11–39 (2011).

17. S. G. Pyatkov, "On Some Classes of Inverse Problems for Parabolic and Elliptic Equations," J. Evol. Equ. **11** (1), 155–186 (2011).

18. A. Erdem, D. Lesnic, and A. Hasanov, "Identification of a Spacewise Dependent Heat Source," Appl. Math. Model. **37** (24), 10231–10244 (2013).

19. J. Wen, M. Yamamoto, and T. Wei, "Simultaneous Determination of a Time-Dependent Heat Source and the Initial Temperature in an Inverse Heat Conduction Problem," Inverse Probl. Sci. Eng. **21** (3), 485–499 (2013).

20. D. N. Hào, P. X. Thanh, D. Lesnic, and M. Ivanchov, "Determination of a Source in the Heat Equation from Integral Observations," J. Comput. Appl. Math. **264** (1), 82–98 (2014).