УДК 519.63+533.6

СНЕСЕНИЕ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ НА СРЕДИННУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КРЫЛА

И. В. Писарев[1], **А. В. Сетуха**[2]

Рассмотрена трехмерная краевая задача для уравнения Лапласа, возникающая в линейной теории крыла конечного размаха в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. Для численного решения задачи используется подход, основанный на применении метода потенциалов и граничных интегральных уравнений. Осуществлен учет толщины крыла при постановке краевой задачи на срединной поверхности со снесением граничных условий на эту поверхность. В результате задача сведена к системе из двух двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. Построена численная схема решения указанных уравнений, основанная на их дискретизации методом вихревых рамок. Приведены результаты тестирования разработанного численного метода на примере расчета распределения давления по поверхности крыла.

Ключевые слова: численные методы, краевые задачи, уравнение Лапласа, интегральные уравнения, вихревые методы, теория крыла конечного размаха.

1. Введение. Линейная теория крыла конечного размаха на малых дозвуковых скоростях является важным инструментом аэродинамического проектирования летательных аппаратов. В основе этой теории лежит модель обтекания крыла идеальной несжимаемой жидкостью в предположении, что течение является потенциальным всюду вне крыла и вихревого следа, который представляет собой тонкую поверхность тангенциального разрыва поля скоростей, помещаемую в плоскости крыла за его задней кромкой. Физические основы такого подхода были заложены в начале прошлого века в вихревой теории подъемной силы, у истоков которой стояли Н. Е. Жуковский, С. Л. Чаплыгин, Л. Прандтль [1].

В 30-е годы прошлого века широко использовалась модель Прандтля с аппроксимацией крыла тонкой несущей линией, в которой задача об обтекании крыла сводилась к решению одномерного сингулярного интегрального уравнения [1]. В 70–80 годы были развиты численные методы решения задачи об обтекании крыла конечного размаха в трехмерной постановке, основанные на теории потенциала. В указанных методах задача сводится к решению граничных интегральных уравнений на двух поверхностях: на поверхности крыла и на поверхности, аппроксимирующей вихревой след. При этом были развиты как модели, основанные на рассмотрении телесного крыла исходной формы, так и модели, в которых крыло аппроксимируется тонкой срединной поверхностью [2–4].

В дальнейшем методы такого типа нашли применение при расчете аэродинамических характеристик летательных аппаратов [2, 5]. В настоящее время данные подходы широко используются и как составная часть математических моделей описания аэродинамики подвижных или деформируемых несущих поверхностей, которые включают в себя дополнительные уравнения, уточняющие форму поверхности, описывающей вихревой след. В частности, высокую эффективность описываемые методы показали в задачах аэродинамики колеблющихся и машущих крыльев [6–9] и аэродинамики вертолетных винтов [10–13].

Существенная проблема, возникающая при рассмотрении телесного крыла, связана с необходимостью использовать сетку с большим числом ячеек разбиения. Это вызвано, во-первых, тем обстоятельством, что размер ячеек разбиения должен быть существенно меньше толщины профиля, во-вторых, с тем, что ячейки разбиения должны отслеживать закругление передней кромки. В связи с этим приходится применять для ускорения вычислений специальные алгоритмы аппроксимации больших матриц [14].

Значительно сократить вычислительные затраты позволяет использование модели тонкого крыла. Аппроксимация тонкого крыла срединной поверхностью позволяет достаточно точно рассчитать суммарные силы и моменты, действующие на крыло (кроме силы сопротивления, расчет которой требует отдельного рассмотрения), учитывая влияние на них основных геометрических характеристик крыла. При

[1] Орловский государственный университет, физико-математический факультет, ул. Комсомольская, д. 95, 302026, г. Орел; аспирант, e-mail: demoruss@inbox.ru
[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 119992, Москва; вед. науч. сотр., e-mail: setuhaav@rambler.ru

этом правильные результаты получаются при гораздо более грубом разбиении, и к тому же разбиение одной срединной поверхности заменяет разбиение и верхней и нижней поверхностей телесного крыла. За счет этого достигается значительное сокращение вычислительных затрат. Однако модель тонкого крыла не позволяет правильно рассчитать распределения скорости и давления на поверхности крыла, особенно вблизи передней кромки, которые сильно зависят от формы профиля крыла.

В работах [15–16] предложен метод учета реальной телесной формы профиля крыла в рамках решения двумерных задач со снесением граничного условия на среднюю линию профиля, основанный на нанесении на эту линию дополнительного слоя источников. При этом задача об обтекании профиля сводится к системе двух одномерных сингулярных интегральных уравнений, теория и численные схемы решения которых изложены в [4]. Заметим, что указанный подход применялся и при решении трехмерных задач об обтекании крыла конечного размаха, но с привлечением гипотезы плоских сечений.

В настоящей статье рассмотрена аналогичная модель учета телесности крыла в рамках рассмотрения полностью трехмерной краевой задачи на срединной поверхности. Задача сведена к системе из двух граничных уравнений на этой срединной поверхности, которые содержат линейные интегральные операторы от неизвестных функций с несобственными и гиперсингулярными интегралами и внеинтегральными членами, содержащими поверхностный градиент от одной из неизвестных функций. Построена численная схема решения этих уравнений, которая была протестирована на примере расчета распределения давления по поверхности крыла конечного размаха. Осуществлено сравнение результатов расчета с результатами, полученными численно на основе моделей для соответствующего телесного и тонкого крыла (без учета формы профиля), а также с известными экспериментальными данными.

2. Постановка линейной задачи об обтекании крыла конечного размаха. Сначала рассмотрим исходную трехмерную задачу об обтекании телесного или тонкого крыла идеальной несжимаемой жидкостью в линейной стационарной постановке.

Пусть Σ — поверхность крыла. Предположим, что в случае телесного крыла поверхность Σ представляет собой замкнутую простую кусочно-гладкую поверхность, а в случае тонкого крыла — гладкую поверхность с краем $\partial\Sigma$, причем край $\partial\Sigma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая. Будем считать, что в пространстве задана декартова система координат $Ox_1x_2x_3$, в которой плоскость Ox_1x_2 есть вертикальная плоскость симметрии крыла, ось Ox_1 направлена от передней кромки к задней, ось Ox_2 направлена вверх, ось Ox_3 направлена вбок так, что образуется правая система координат. Пусть $\boldsymbol{e}_i$ — орт оси Ox_i, $i = 1, 2, 3$ (рис. 1).

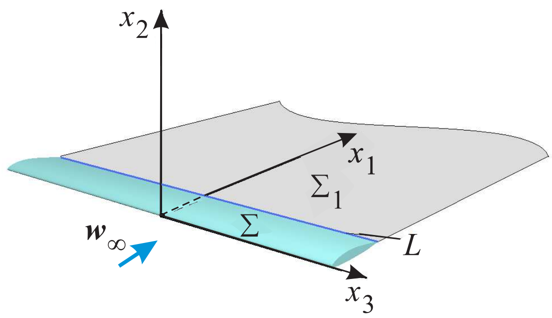


Рис. 1. Схема крыла и вихревого следа

На задней кромке крыла задается линия отрыва L и предполагается, что на этой линии образуется вихревой след, который моделируется поверхностью Σ_1. При этом поверхность Σ_1 — это объединение всевозможных лучей вида $[MN)$, где $M \in L$, $\boldsymbol{MN} = \alpha\boldsymbol{e}_1$, $\alpha \geqslant 0$, и $\Sigma_1 \bigcap \Sigma = L$. С геометрической точки зрения последнее условие означает, что каждый такой луч $[MN)$ не пересекает поверхность крыла при своем продолжении из точки M.

Пусть Ω — область пространства вне поверхностей Σ и Σ_1. Пусть $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — орт вектора нормали к поверхностям Σ и Σ_1, где $\boldsymbol{x}$ — точка гладкости поверхности крыла Σ или поверхности Σ_1. В случае телесного крыла будем считать, что $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} \in \Sigma$, есть вектор внешней нормали. При $\boldsymbol{x} \in \Sigma_1$ и при $\boldsymbol{x} \in \Sigma$ в случае тонкого крыла полагаем, что $\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_2 \geqslant 0$ (это означает, что вектор $\boldsymbol{n}$ направлен вверх).

В основе физической постановки задачи лежат предположения о том, что [17]

— задан вектор $\boldsymbol{w}_\infty$ скорости набегающего потока;

— поверхность тела является непроницаемой для жидкости;

— жидкость является несжимаемой всюду вне вихревого следа, который аппроксимируется поверхностью Σ_1, а течение является безвихревым;

— вихревой след представляет собой поверхность Σ_1 разрыва поля скоростей, на которой нормальная компонента скорости w_2, а также компонента скорости w_1 являются непрерывными (скачок терпит только компонента w_3);

— поле скоростей должно быть ограничено на задней кромке крыла (в аэродинамике это условие известно как условие Чаплыгина–Жуковского).

В линейной теории крыла полагается, что $\boldsymbol{w}_\infty = W_\infty(\cos\alpha\cos\beta,\ \sin\alpha\cos\beta,\ \sin\beta)$, где W_∞ — модуль вектора скорости набегающего потока, α — угол атаки, β — угол скольжения, причем рассматривается случай, когда углы α и β малы.

С математической точки зрения необходимо найти поле скоростей жидкости $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ в области Ω, удовлетворяющее уравнениям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{w} = 0 \tag{1}$$

и следующему условию на бесконечности:

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad \rho(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) \to \infty. \tag{2}$$

Здесь $\rho(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до множества $\partial\Omega = \Sigma \bigcup \Sigma_1$. Предполагается, что в каждой точке гладкости поверхностей Σ и Σ_1, не лежащей на краю этих поверхностей, поле $\boldsymbol{w}$ имеет краевые значения

— на обеих сторонах поверхности Σ_1;

— на поверхности Σ со стороны области Ω в случае телесного крыла и на обеих сторонах в случае тонкого крыла.

На поверхности крыла Σ должно выполняться следующее условие непротекания (в случае тонкого крыла на обеих сторонах поверхности Σ):

$$\boldsymbol{w}\boldsymbol{n} = 0. \tag{3}$$

На поверхности Σ_1 ставятся условия

$$w_2^+ = w_2^-, \quad w_1^+ = w_1^-. \tag{4}$$

Кроме того, в окрестности каждой точки линии отрыва $x \in L$, не являющейся ее концом, поле скоростей должно быть ограничено. В окрестности любой другой линии $\widetilde{L}$, являющейся краем поверхностей Σ и Σ_1 или ребром поверхности Σ, должно выполняться условие $\left|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\right| \leqslant \dfrac{C}{\rho\big(\boldsymbol{x}, \widetilde{L}\big)^\alpha}$, где C и $\alpha < 1$ — некоторые константы.

В силу условий (1) и (2) поле скоростей будем искать в виде

$$\boldsymbol{w}(x) = \boldsymbol{w}_\infty + \boldsymbol{w}^*, \quad \boldsymbol{w}^* = \operatorname{grad} u. \tag{5}$$

Потенциал u должен являться решением краевой задачи

$$\Delta u = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности} \quad \Sigma, \tag{7}$$

где $f = -\boldsymbol{w}_\infty \boldsymbol{n}$. Из условий (4) вытекают условия

$$\frac{\partial\big(u^+ - u^-\big)}{\partial x_1} = \frac{\partial\big(u^+ - u^-\big)}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на поверхности} \quad \Sigma_1. \tag{8}$$

Ставятся также условие ограниченности потенциала в области Ω и условие на бесконечности вдоль вектора $-\boldsymbol{e}_1$:

$$u(\boldsymbol{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{9}$$

Заметим, что здесь в общем случае потенциал не может стремиться к нулю на бесконечности, поскольку в силу условия (8) при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ вдоль вектора $+\boldsymbol{e}_1$ разность $u^+ - u^-$ является константой и при ненулевом решении задачи не будет стремиться к нулю. Однако можно доказать, что при этом $u \to 0$ при удалении на бесконечность вдоль любого вектора, не параллельного $+\boldsymbol{e}_1$.

Поставленная задача может быть решена методом граничных интегральных уравнений с применением теории потенциала. Неизвестный потенциал u, представляющий собой решение задачи (6)–(9), ищем в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = U[\Sigma, g](\boldsymbol{x}) + U[\Sigma_1, g_1](\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

где $U[\Sigma, g]$ — потенциал двойного слоя с плотностью g, размещенного на поверхности Σ :

$$U[\Sigma, g](\boldsymbol{x}) = \int\limits_\Sigma g(\boldsymbol{y}) \, \frac{\partial F(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{\partial n_y} \, d\boldsymbol{y}, \quad F(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi} \, \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \, . \tag{11}$$

Здесь интеграл понимается как поверхностный интеграл 1-го рода. При этом уравнение Лапласа (6) выполнено автоматически, а из граничных условий (7) и (8) возникают интегральное уравнение и соответствующее условие:

$$\int\limits_{\Sigma} g(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial n_x}\,\frac{\partial F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_y}\,d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\Sigma_1} g_1(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial n_x}\,\frac{\partial F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_y}\,d\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma, \tag{12}$$

$$\frac{\partial g_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma_1. \tag{13}$$

В уравнении (12) первый из интегралов следует понимать в смысле конечного значения по Адамару [18].

Поскольку поверхность Σ_1 может быть получена движением линии отрыва L вдоль оси Ox_1, из условия (13) следует, что функция g_1 определяется своими значениями на этой линии.

В случае телесного крыла потенциал двойного слоя вида (10) определен и в области, внутренней по отношению к поверхности крыла Σ. Для краевых значений потенциала u выполнены соотношения $u^+ - u^- = g$ на Σ и $u^+ - u^- = g_1$ на Σ_1.

В силу ограниченности поля скоростей на линии отрыва, для каждой точки $\boldsymbol{x}_0 \in L$ и для каждой достаточно малой окрестности этой точки $U(\boldsymbol{x}_0)$, которая при пересечении с областью Ω распадается на две области $U_1(\boldsymbol{x}_0)$ и $U_2(\boldsymbol{x}_0)$ (верхнюю и нижнюю по отношению к поверхностям крыла и вихревого следа), потенциал u имеет пределы в точке $\boldsymbol{x}_0$ при $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ по каждой из этих областей. Тогда на линии отрыва справедливы соотношения

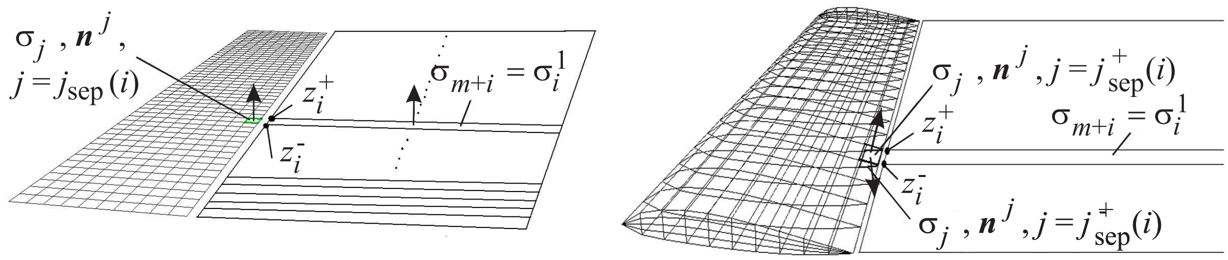
$$g_1(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in L \quad \text{в случае тонкого крыла;} \tag{14}$$

$$g_1(\boldsymbol{x}) = g^+(\boldsymbol{x}) - g^-(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in L \quad \text{в случае телесного крыла,} \tag{15}$$

где $g^+(\boldsymbol{x})$ — предельное значение функции g в точке $\boldsymbol{x}\in L$ на верхней поверхности крыла, $g^-(\boldsymbol{x})$ — на нижней поверхности. Кроме того, в случае телесного крыла, плотность потенциала двойного слоя g определена с точностью до постоянного слагаемого [4]. Для выделения единственного решения в случае замкнутой поверхности Σ можно использовать условие

$$\int\limits_{\Sigma} g(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = G, \tag{16}$$

где G — произвольная константа.



а) б)

Рис. 2. Схема дискретизации задачи: а) случай тонкого крыла; б) случай телесного крыла

Уравнения (12)–(16) относительно неизвестных плотностей потенциала двойного слоя g и g_1 можно решить численно методом вихревых рамок. Опишем схему этого метода, следуя работе [4] (рис. 2).

Поверхность Σ аппроксимируется ячейками σ_i, $i = 1,\ldots,n$, имеющими четырехугольную форму. Пусть s_i — площадь ячейки σ_i. В центре каждой ячейки σ_i, под которым понимается пресечение отрезков, соединяющих середины противоположных сторон ячейки, размещаем контрольную точку $\boldsymbol{x}^i$ и строим вектор нормали к ячейке $\boldsymbol{n}^i = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^i)$. Приближенно считается, что $\boldsymbol{n}^i$ — перпендикуляр к указанным отрезкам, а площадь s_i приближенно вычисляется как площадь параллелограмма, для которого эти отрезки есть середины сторон. Может возникнуть необходимость использования в некоторых местах поверхности треугольных ячеек. Такие ячейки следует рассматривать как вырожденный случай четырехугольных при совпадении двух угловых точек, а контрольную точку следует помещать в середину медианы, опущенной из сдвоенной точки.

Линия отрыва предполагается состоящей из отрезков $\left[\boldsymbol{z}_i^-, \boldsymbol{z}_i^+\right]$, $i = 1, \ldots, m$, где $\boldsymbol{z}_i^-$ — начало отрезка с номером i и $\boldsymbol{z}_i^+$ — конец этого отрезка. При этом начало следующего отрезка является концом предыдущего: $\boldsymbol{z}_{i+1}^- = \boldsymbol{z}_i^+$; предполагается, что отрезок $\left[\boldsymbol{z}_i^-, \boldsymbol{z}_i^+\right]$ является в случае телесного крыла стороной ячейки с номером $j_{\text{sep}}^+(i)$ на верхней поверхности и стороной ячейки с номером $j_{\text{sep}}^-(i)$ на нижней поверхности, а в случае плоского крыла — стороной ячейки $j_{\text{sep}}(i)$.

Построим разбиение поверхности Σ_1 на полубесконечные ячейки, которые затем аппроксимируем конечными ячейками большой длины $\sigma_j^1 \equiv \sigma_{n+j}$, $j = 1, \ldots, m$, так, что σ_j^1 — четырехугольник с вершинами $\boldsymbol{z}_i^-$, $\boldsymbol{z}_i^+$, $\boldsymbol{q}_i^+$ и $\boldsymbol{q}_i^-$, где $\boldsymbol{q}_i^+ = z_i^+ + D\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{q}_i^- = \boldsymbol{z}_i^- + D\boldsymbol{e}_1$ и D — некоторое большое число.

Приближенное распределение плотности потенциала двойного слоя ищем в виде кусочно-постоянной функции, принимающей постоянное значение g_i, $i = 1, \ldots, n+m$, на каждой из ячеек разбиения. Пусть $\boldsymbol{V}_j$ — градиент потенциала двойного слоя с плотностью $g_0 = -1$, размещенного на поверхности σ_j с краем. По закону Био–Савара [19] векторное поле $\boldsymbol{V}_j$ представляется как поле скоростей, индуцируемое вихревой нитью с циркуляцией $\Gamma_0 = 1$, размещенной на контуре $\partial\sigma_j$, т.е. на краю поверхности σ_j:

$$\boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}) = -\big(\text{grad}\ U[\sigma_j, g_0]\big)(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\sigma_j} \frac{\tau_y \times (\boldsymbol{r}_x - \boldsymbol{r}_y)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^3}\, ds_y. \tag{17}$$

Здесь $\boldsymbol{r}_x$ и $\boldsymbol{r}_y$ — радиус-векторы точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, ds_y — элемент длины дуги, $\boldsymbol{\tau}_y$ — орт вектора касательной на контуре $\partial\sigma_j$ (направление обхода контура $\partial\sigma_j$ выбирается так, что если при обходе вектор нормали $\boldsymbol{n}$ направлен вверх, то поверхность остается слева) и “$\times$” — векторное произведение. Заметим, что если $\partial\sigma_j$ — ломаная линия, то интеграл в правой части формулы (16) вычисляется аналитически [4], при этом скорость жидкости в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$ аппроксимируется выражением

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_\infty + \sum_{j=1}^{n+m} \Gamma_j \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}), \tag{18}$$

где Γ_j — циркуляция вихревой нити (вихревой рамки), размещенной по контуру ячейки σ_j, связанная со значениями потенциала двойного слоя формулой

$$\Gamma_j = -g_j, \quad j = 1, \ldots, n+m. \tag{19}$$

Неизвестные циркуляции вихревых рамок в случае задачи об обтекании тонкого крыла ищутся из системы линейных уравнений, которые аппроксимируют уравнение (12), записанное в точках коллокации $\boldsymbol{x}^i$, $i = 1, \ldots, n$, и из соотношения (14):

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}\Gamma_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

$$\Gamma_{n+i} = s(i)\Gamma_{j_{\text{sep}}(i)}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{21}$$

$$a_{ij} = \boldsymbol{V}_j\big(\boldsymbol{x}^i\big)\boldsymbol{n}^i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n+m, \quad f_i = -\boldsymbol{w}_\infty \boldsymbol{n}^i. \tag{22}$$

Здесь $s(i)$, $i = 1, \ldots, m$, — коэффициенты, указывающие на согласование ориентаций ячеек: $s(i) = 1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j \geqslant 0$ и $s(i) = -1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j < 0$, $j = j_{\text{sep}}(i)$.

В случае телесного крыла, поскольку циркуляции рамок σ_i на поверхности Σ определены с точностью до постоянного слагаемого, используется подход, основанный на записи дополнительного уравнения и введении регуляризирующей переменной γ_0 [4]:

$$\gamma_0 + \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}\Gamma_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma_j s_j = 0, \quad \Gamma_{n+i} = s^+(i)\Gamma_{j_{\text{sep}}^+(i)} + s^-(i)\Gamma_{j_{\text{sep}}^-(i)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Коэффициенты и правые части уравнений (23) определяются формулами (22), $s^+(i) = 1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j \geqslant 0$, $s^+(i) = -1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j < 0$, $j = j_{\text{sep}}^+(i)$, $s^-(i) = 1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j \geqslant 0$, $s^-(i) = -1$ при $\boldsymbol{n}^i\boldsymbol{n}^j < 0$ и $j = j_{\text{sep}}^-(i)$.

3. Постановка задачи со снесением граничных условий и учетом толщины. Рассмотрим сформулированную задачу об обтекании телесного крыла. Предположим, что поверхность телесного крыла Σ устроена следующим образом (рис. 3). Имеется некоторая средняя поверхность Σ_0. Для каждой точки $\boldsymbol{z} \in \Sigma_0$ определены точки $\boldsymbol{z}^{\pm}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z} \pm \lambda(\boldsymbol{z})\boldsymbol{n}/2$, где $\lambda(\boldsymbol{z}) \geqslant 0$ во всех точках поверхности Σ_0 и $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности Σ_0. Точки $\boldsymbol{z}^{\pm}(z)$ образуют поверхности Σ^+ и Σ^- соответственно. При этом поверхность телесного крыла разбивается на части $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \Sigma_{\text{бок } 1} \bigcup \Sigma_{\text{бок } 2}$, где $\Sigma_{\text{бок } 1}$ и $\Sigma_{\text{бок } 2}$ — боковые поверхности (торцы крыла). Считаем, что на поверхностях Σ^+ и Σ^- определены орты нормалей $\boldsymbol{n}^+$ и $\boldsymbol{n}^-$ соответственно, внешние по отношению к поверхности Σ. Предполагается, что $\lambda(\boldsymbol{z}) = 0$ на задней и передней кромках поверхности Σ_0, причем на задней кромке расположена линия отрыва L и на ней образована поверхность вихревого следа Σ_1. Боковыми поверхностями пренебрегаем.

Пусть Ω_0 — область пространства вне объединения поверхностей Σ_0 и Σ_1. Приближенное решение задачи обтекания телесного крыла предлагается искать из следующей краевой задачи для тонкого крыла, моделируемого поверхностью Σ_0. Будем искать поле скоростей $\boldsymbol{w}$ вида (5), определенное в области Ω_0, удовлетворяющее вместо условия (3) условиям $\boldsymbol{w}^+\boldsymbol{n}^+ = 0$ и $\boldsymbol{w}^-\boldsymbol{n}^- = 0$, а также всем остальным уравнениям и условиям, возникающим в задаче об обтекании тонкого крыла, расположенного на поверхности Σ_0. При этом для неизвестного потенциала u возникает краевая задача (6)–(9) с заменой граничного условия (7) на условие

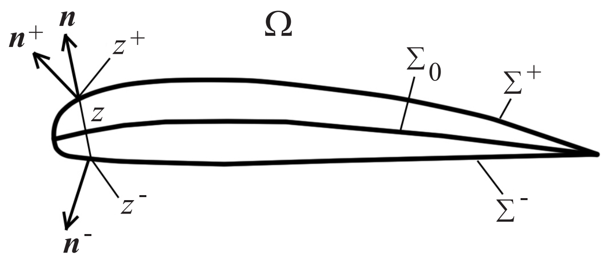


Рис. 3. Поперечное сечение крыла

$$(\text{grad } u)^+\boldsymbol{n}^+ = f^+, \quad (\text{grad } u)^-\boldsymbol{n}^- = f^- \quad \text{на} \quad \Sigma_0, \tag{24}$$

где $f^+ = -\boldsymbol{w}_\infty\boldsymbol{n}^+$ и $f^- = -\boldsymbol{w}_\infty\boldsymbol{n}^-$.

Решение такой задачи ищем в виде $u(\boldsymbol{x}) = U[\Sigma_0, g](\boldsymbol{x}) + V[\Sigma_0, \mu](\boldsymbol{x}) + U[\Sigma_1, g_1](\boldsymbol{x})$, где $U[\Sigma, g]$ — потенциал двойного слоя, определяемый выражением (11), и $V[\Sigma_0, g]$ — потенциал простого слоя, определяемый выражением $V[\Sigma_0, \mu](\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\Sigma_0} \mu(\boldsymbol{y})F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$. При этом уравнение Лапласа (6) выполнено автоматически. Для граничных значений векторного поля $\boldsymbol{w}$ на поверхности Σ_0 в предположении, что функция g имеет на поверхности Σ_0 поверхностный градиент $\operatorname{Grad} g$ и что функции μ и $\operatorname{Grad} g$ непрерывны по Гельдеру, выполнены следующие соотношения [20]:

$$\boldsymbol{w}^{\pm} = \boldsymbol{w}_\infty + (\nabla u)^{\pm} = \boldsymbol{w} \mp \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{n} \pm \frac{1}{2}\,[\gamma \times \boldsymbol{n}]. \tag{25}$$

Здесь

$$\gamma = \boldsymbol{n} \times \operatorname{Grad} g \tag{26}$$

и $\boldsymbol{w}$ — прямое значение вектора скорости, получаемое из интегрального представления

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_\infty + \int\limits_{\Sigma_0} \gamma(\boldsymbol{y}) \times \nabla_x F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\Sigma_1} g_1(\boldsymbol{y})\nabla_x \frac{\partial F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_y}\,d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\Sigma_0} \mu(\boldsymbol{y})\nabla_x F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}, \tag{27}$$

в котором интегралы понимаются в смысле главного значения. Заметим, что, как показано в [18], для краевых значений нормальной производной функции $u_0 = U[\Sigma_0, g]$ справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}\int\limits_{\Sigma_0} \gamma(\boldsymbol{y}) \times \nabla_x F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Sigma_0} g(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial}{\partial n_x}\,\frac{\partial F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_y}\,d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \Sigma_0,$$

где последний интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару. Тогда из равенств (25) имеем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Sigma_0} g(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_x \partial n_y}\,d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\Sigma_1} g_1(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_x \partial n_y}\,d\boldsymbol{y} + \int\limits_{\Sigma_0} \mu(\boldsymbol{y})\,\frac{\partial F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{\partial n_x}\,d\boldsymbol{y} \mp \\ \mp \frac{1}{2}\,\mu(\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^{\pm}\big) \pm \frac{1}{2}\,\big[\gamma(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{n}\big]\boldsymbol{n}^{\pm} = f^{\pm}, \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{n}^{\pm} = \boldsymbol{n}^{\pm}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Sigma,\end{gathered} \tag{28}$$

где функция $\gamma(\boldsymbol{x})$ определяется выражением (26), а функции $f^{\pm}$ те же, что и в уравнениях (24). Кроме того, функции g и g_1 связаны соотношениями (14).

4. Численная схема решения задачи со снесенными граничными условиями. Так же, как и в численной схеме (19)–(22) для тонкого крыла, поверхность Σ_0 аппроксимируем ячейками σ_i, $i = 1, \ldots, n$, поверхность Σ_1 аппроксимируем конечными ячейками большой длины $\sigma_j^1 \equiv \sigma_{n+j}$, $j = 1, \ldots, m$. В центре каждой ячейки σ_i, $i = 1, \ldots, n$, размещаем контрольную точку $\boldsymbol{x}^i$ и строим вектор нормали к ячейке $\boldsymbol{n}^i = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^i)$.

Предположим, что угловые точки ячеек σ_i, $i = 1, \ldots, n$, лежат на поверхности Σ_0. Тогда для каждой вершины $\boldsymbol{z}$ каждой такой ячейки определены точки $z^{\pm}(\boldsymbol{z})$ на верхней и нижней поверхностях крыла. Тем самым определены системы ячеек σ_i^+ и σ_i^-, $i = 1, \ldots, n$, аппроксимирующих верхнюю и нижнюю поверхности исходного крыла Σ^+ и Σ^- соответственно. Пусть $\boldsymbol{n}^{i\,+}$ и $\boldsymbol{n}^{i\,-}$ — векторы нормалей к ячейкам σ_i^+ и σ_i^-, $i = 1, \ldots, n$, соответственно, которые можно опять построить как перпендикуляры к отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон ячеек. Приближенный потенциал u ищем в форме

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n+m} g_j \int\limits_{\sigma_j} \frac{\partial F(x-y)}{\partial n_y}\, d\sigma_y + \sum_{i=1}^{n} \mu_i F\bigl(x - x^i\bigr) s_i,$$

где s_i — площади ячеек. Соответствующее приближенное поле скоростей определяется в виде

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w}_\infty + \sum_{j=1}^{n+m} \Gamma_j \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \boldsymbol{V}_\mu\bigl(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i\bigr) s_i, \quad x \in \Omega, \tag{29}$$

где функция $\boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x})$ определяется выражением (17), числа Γ_j определяются выражением (19) и

$$\boldsymbol{V}_\mu(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i) = \frac{1}{4\pi}\, \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i}{\bigl|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i\bigr|^3} = -\nabla_x F\bigl(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^i\bigr).$$

Когда $\mu_j = \mu\bigl(\boldsymbol{x}^j\bigr)$, $j = 1, \ldots, n$, и

$$\Gamma_j = \begin{cases} -g(\boldsymbol{x}^j), & j = 1, \ldots, n, \\ -g_1\bigl(\boldsymbol{x}^j\bigr), & j = n+1, \ldots, n+m \end{cases}$$

(здесь мы опять считаем, что $\boldsymbol{x}^j$ — центр ячейки σ_j), выражение (29) — это квадратурная формула, которая аппроксимирует поле скоростей, определяемое выражением (27) для точек $\boldsymbol{x} \in \Omega_0$, расстояние от которых до поверхностей Σ_0 и Σ_1 много больше диаметра разбиения. Для нахождения краевых значений вектора скорости, которые представляются в виде (25), используем квадратурные формулы, предложенные в [21], согласно которым прямое значение вектора $\boldsymbol{w}$ в точке $\boldsymbol{x}^i$ (центр ячейки σ_i) вычисляется напрямую по формуле (29), аппроксимирующей выражение (27), а приближенное значение γ_i вектора $\gamma\bigl(\boldsymbol{x}^i\bigr)$ находится по формуле (рис. 4)

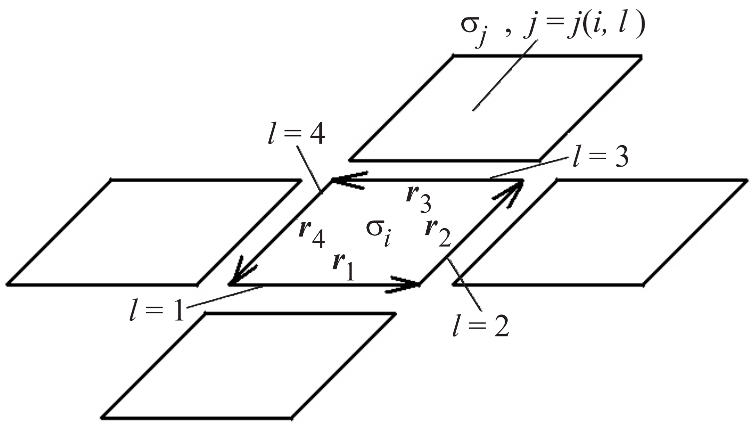


Рис. 4. Нахождение интенсивности вихревого слоя

$$\gamma_i = \frac{\boldsymbol{\Gamma}_1^i + \boldsymbol{\Gamma}_2^i + \boldsymbol{\Gamma}_3^i + \boldsymbol{\Gamma}_4^i}{s_i}\,, \tag{30}$$

где векторы $\boldsymbol{\Gamma}_l^i$ ($l = 1, 2, 3, 4$ — номера сторон рассматриваемой ячейки) вычисляются по следующим формулам:

а) $\boldsymbol{\Gamma}_l^i = (\Gamma_i - \Gamma_{j(l,i)})\boldsymbol{r}_l/2$, где $j(l, i)$ — номер соседней ячейки разбиения поверхности Σ_0, граничащей с данной ячейкой σ_i по стороне с номером l, если таковая есть;

б) $\boldsymbol{\Gamma}_l^i = 0$, если сторона с номером l лежит на линии отрыва;

в) $\boldsymbol{\Gamma}_l^i = \Gamma_i \boldsymbol{r}_l$, если сторона с номером l не лежит на линии отрыва и никакая из ячеек разбиения поверхности Σ_0 не граничит с данной ячейкой σ_i по стороне с номером l.

Выше символом $\boldsymbol{r}_l$ обозначен вектор, лежащий на стороне с номером l рассматриваемой ячейки σ_i в направлении положительного обхода границы ячейки.

Записывая уравнения (28) в точках коллокации и учитывая условие (14), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных Γ_i, $i = 1, \dots, n+m$, μ_i, $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}^{+}\Gamma_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{+}\mu_j + \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{n}_i]\boldsymbol{n}_i^{+} - \frac{1}{2}\,\mu_i \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^{+} = f_i^{+},$$
$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij}^{-}\Gamma_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{-}\mu_j - \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{n}_i]\boldsymbol{n}_i^{-} + \frac{1}{2}\,\mu_i \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{n}_i^{-} = f_i^{-}, \Gamma_{n+i} = s(i)\Gamma_{j_{\text{sep}(i)}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$f_i^{+} = -\boldsymbol{w}_\infty \boldsymbol{n}^{i+}, \quad f_i^{-} = -\boldsymbol{w}_\infty \boldsymbol{n}^{i-}, \quad i = 1, \dots, n;$$
$$a_{ij}^{\pm} = \boldsymbol{V}_j(\boldsymbol{x}^i)\boldsymbol{n}^{i\pm}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n+m;$$
$$b_{ij}^{\pm} = \boldsymbol{V}_\mu\big(\boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^j\big)\boldsymbol{n}^{i\pm}s_j \quad \text{при} \quad i \neq j; \quad b_{ii}^{\pm} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n;$$

а векторы γ_i, $i = 1, \dots, n$, определяются выражением (30). Заметим, что при этом для каждого $i = 1, \dots, n$ выражения $[\boldsymbol{\Gamma}_i \times \boldsymbol{n}_i]\boldsymbol{n}_i^{\pm}$ — это линейные комбинации неизвестных Γ_j, $j = 1, \dots, n$, коэффициенты которых могут быть рассчитаны на основании формулы (30).

5. Расчет нагрузок. Полную информацию о силах, действующих на крыло в рамках модели идеальной жидкости, дает распределение по его поверхности коэффициента давления $C_p = \dfrac{p - p_\infty}{q}$, где p — давление в рассматриваемой точке жидкости, p_∞ — давление невозмущенного потока на бесконечности, $q = \rho W_\infty^2/2$ — скоростной напор, ρ — плотность жидкости. При этом давление в каждой точке течения связано с полем скоростей интегралом Бернулли $p + \dfrac{\rho W^2}{2} = p_\infty + \dfrac{\rho W_\infty^2}{2}$.

В случае телесного крыла поле скоростей жидкости задается выражениями (5), (10), которые определены и во внутренней области Ω^-, ограниченной поверхностью Σ. При этом для краевых значений вектора скорости справедливы соотношения $\boldsymbol{w} = \dfrac{\boldsymbol{w}^+ + \boldsymbol{w}^-}{2}$, $(\boldsymbol{w}^+ - \boldsymbol{w}^-)\boldsymbol{n} = 0$, где $\boldsymbol{w}$ — прямое значение вектора скорости, которое приближенно может быть вычислено в точках коллокации из выражения (18) [21]. В силу уравнений (1) и условия (3) справедливо равенство $\boldsymbol{w} \equiv 0$ в области Ω^-, откуда имеем на поверхности Σ соотношение $\boldsymbol{w}^+ = 2\boldsymbol{w}$, где $\boldsymbol{w}^+$ — краевое значение вектора скорости на поверхности крыла, $\boldsymbol{w}$ — прямое значение вектора скорости, получаемое из интегрального представления. Поэтому из интеграла Бернулли для краевого значения коэффициента давления на внешней поверхности крыла справедливо выражение $C_p = 1 - 2\,\dfrac{\boldsymbol{w}^2}{W_\infty^2}$.

В случае тонкой поверхности Σ_0, когда поле скоростей определяется выражением (27), ищем краевые значения коэффициента давления, для которых справедливо выражение $C_p^{\pm} = 1 - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\boldsymbol{w}^{\pm 2}}{W_\infty^2}$, при этом для краевых значений вектора скорости справедливо выражение (25).

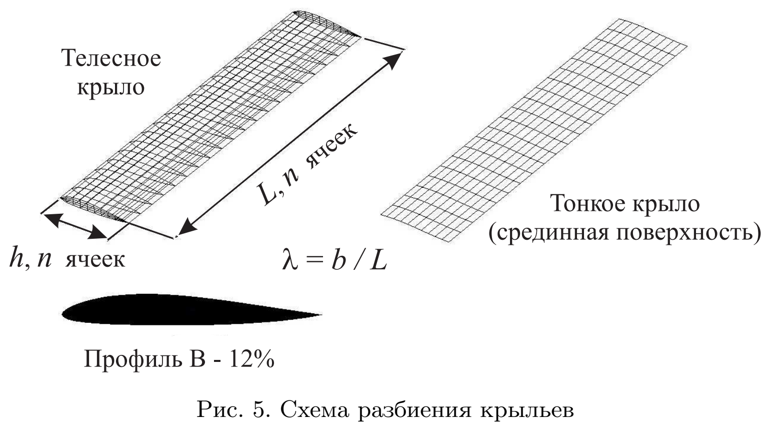
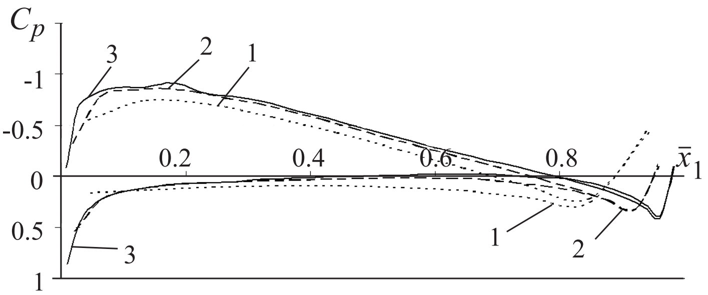


Рис. 5. Схема разбиения крыльев

При приближенном нахождении краевых значений коэффициента давления в точках коллокации $\boldsymbol{x}^i$, $i = 1, \dots, n$, на основе найденных численно значений неизвестных Γ_i, $i = 1, \dots, n+m$, и μ_i, $i = 1, \dots, n$, используем выражение (29) для нахождения прямого значения вектора скорости $\boldsymbol{w}$ и формулу (30) для нахождения вектора γ. Заметим, что в задаче об обтекании тонкого крыла (без учета телесности) используются те же самые формулы, в которых Γ_i, $i = 1, \dots, n+m$, представляют собой решения системы (20), (21), а $\mu_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

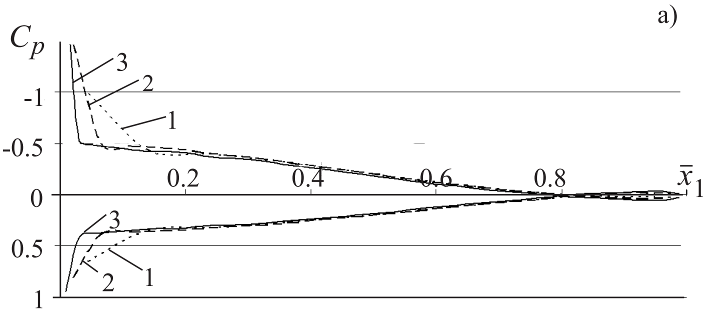
6. Примеры расчетов и выводы. Для тестирования предложенной вычислительной модели были проведены расчеты обтекания при малых углах атаки прямоугольного крыла с удлинением $\lambda = 5$ и профилем серии В толщиной 12%.

На рис. 5 показана схема разбиения телесного крыла и срединной поверхности. Сначала строилась расчетная сетка, описывающая телесное крыло, с разбиением верхней и нижней поверхностей на одинаковое число ячеек, а затем строились ячейки разбиения срединной поверхности путем осреднения соответствующих координат верхней и нижней поверхности.



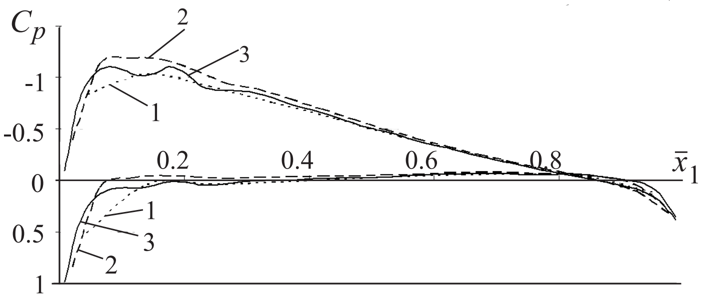
Разбиение	10×20	20×20	40×40	80×40
C_p	0.357	0.388	0.394	0.402

а)



Разбиение	10×20	20×20	40×40	80×40
C_p	0.399	0.390	0.379	0.384

б)



Разбиение	10×20	20×20	40×40	80×40
C_p	0.452	0.455	0.435	0.434

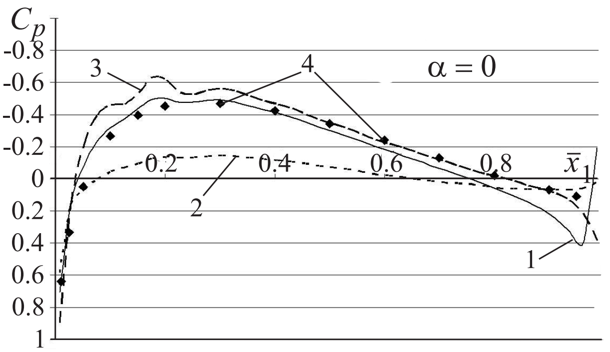
в)

Рис. 6. Распределение давления по поверхности крыла в срединном сечении: а) телесное крыло, б) тонкое крыло, в) тонкое крыло с учетом телесности. Влияние расчетной сетки, варианты разбиения $n_1 \times n_2$: 1) 10×20, 2) 20×20, 3) 40×40

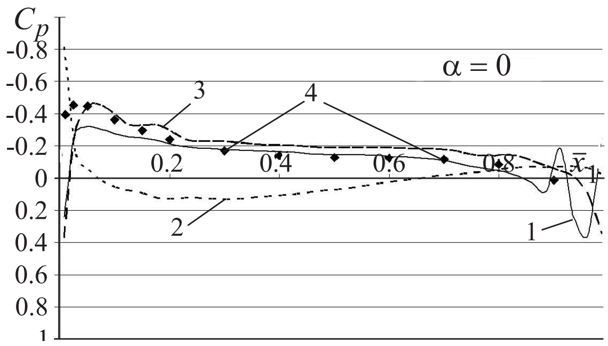
На рис. 6 приведены распределения давления по поверхности крыла в срединном сечении крыла (сечении плоскостью $x_3 = 0$) при значении угла атаки $\alpha = 5^\circ$ без скольжения (угол скольжения $\beta = 0$), при различных разбиениях поверхности крыла, характеризуемых форматом разбиения $n_1 \times n_2$, и с использованием различных моделей расчета: модели телесного крыла, модели тонкого крыла (без учета формы профиля с заменой крыла срединной поверхностью) и по предложенной численной модели, основанной на учете телесности профиля при снесении граничных условий на срединную поверхность. На графиках по оси абсцисс отложено расстояние от передней кромки в долях хорды $\overline{x}_1 = x_1/b$. На всех графиках верхние кривые соответствуют распределению по верхней поверхности, нижние — по нижней поверхности. Кроме того, на этом рисунке приведены таблицы значений коэффициента нормальной силы крыла $C_y = \dfrac{\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_2}{qS}$, где $\boldsymbol{F}$ — вектор аэродинамической силы, действующей на крыло; $S = Lb$ — площадь проекции крыла на строительную плоскость и q — скоростной напор.

Из приведенных результатов видно, что при сгущении расчетной сетки наблюдается сближение получаемых результатов для каждой из моделей (тенденция к сходимости). При этом на самой крупной сетке для модели телесного крыла различие между этими результатами и результатами, получаемыми по той же модели на более мелких сетках, значительно больше, чем для моделей с записью граничных условий на срединной поверхности.

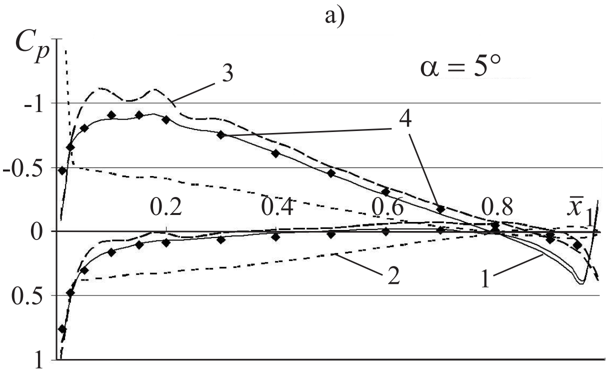
На рис. 7 приведены для сравнения графики распределения коэффициента давления в среднем сечении крыла, полученные по трем рассматриваемым моделям для значений угла атаки $\alpha = 0$ и $\alpha = 5^\circ$ при расчете с разбиением поверхности $n_1 = 40$, $n_2 = 40$. Кроме того, на этом рисунке приведены распределения давления, полученные пересчетом экспериментальных данных (см. Ушаков В.А., Красильщиков П.П., Волков А.К., Гржегоржевский А.Н. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев. М.: БНТ НКАП при ЦАГИ, 1940.) В указанном атлсе приведена серия распределений коэффициента давления в среднем сечении, соответствующих набору значений коэффициента подъемной силы среднего сечения. Для проведения сравнения сначала на основе модели телесного крыла был рассчитан коэффициент подъемной силы среднего сечения по формуле $C_{ya\,\mathrm{sec}} = \dfrac{2G}{bW_\infty}$, в которой b — хорда крыла, G — циркуляция вектора скорости жидкости по контуру, охватывающему среднее сечение, причем $G = |\Gamma_{\mathrm{sec}}|$, где Γ_{sec} — циркуляция вихревой рамки, лежащей в вихревом следе в срединном сечении. Далее осуществлялся пересчет распределений давления для полученного значения коэффициента $C_{ya\,\mathrm{sec}}$ путем линейной интерполяции экспериментальных данных. Кроме того, приведены значения коэффициента нормальной силы (всего крыла), полученные в этих же расчетах в сравнении с экспериментальными данными.



а)



б)



в)

Схема расчета (разбиение 40×40)	C_y, α = 0	C_y, α = 5°
Телесное крыло	0.047	0.394
Тонкое крыло	0.030	0.379
Тонкое крыло с учетом телесности	0.057	0.435
Эксперимент	0.063	0.398

Рис. 7. Распределение давления по поверхности крыла в срединном сечении: а) верхняя поверхность, б) нижняя поверхность, в) верхняя и нижняя поверхности. Сравнение результатов расчета по разным схемам с экспериментом: 1) телесное крыло, 2) тонкое крыло, 3) тонкое крыло с учетом телесности, 4) эксперимент

Из приведенных данных, во-первых, видно, что при удовлетворительном согласовании суммарных значений коэффициента подъемной силы, получаемых для телесного и тонкого крыла, на тонком крыле получаются существенно другие распределения коэффициента давления. В частности, модель тонкого крыла не позволяет даже приближенно оценить максимальные по модулю значения коэффициента давления вблизи передней кромки. Во-вторых, модель с учетом телесности путем снесения граничных условий на срединную поверхность позволяет получить распределения давления, согласующиеся с результатами расчета телесного крыла. В свою очередь, последние хорошо согласуются с данными эксперимента.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13–01–12061). Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии” (ПаВТ–2014; http://agora.guru.ru/pavt2014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Katz J., Plotcin A.* Low-speed aerodynamics. New York: Cambridge Univ. Press, 2001.

3. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
4. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.
5. *Fearn R.L.* Airfoil aerodynamics using panel methods // The Mathematica J. 2008. **10**, N 4. 725–739.
6. *Clark R.P., Smits A.J.* Thrust production and wake structure of a batoid-inspired oscillating fin // J. Fluid Mech. 2006. **562**. 415–429.
7. *Persson P.-O., Willis D.J., Peraire J.* Numerical simulation of flapping wings using a panel method and a high-order Navier–Stokes solver // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2012. **89**, N 10. 1296–1316.
8. *Stanford B.K., Beran P.S.* Analytical sensitivity analysis of an unsteady vortex-lattice method for flapping-wing optimization // J. Aircraft. 2010. **47**, N 2. 647–662.
9. *Uzol O., Yavrucuk I., Sezer-Uzol N.* Panel-method-based path planning and collaborative target tracking for swarming micro air vehicles // J. Aircraft. 2010. **47**, N 2. 544–550.
10. *Kim J.W., Park S.H., Yu Y.H.* Euler and Navier–Stokes simulations of helicopter rotor blade in forward flight using an overlapped grid solver // Proc. 19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conf. 2009. AAIA Paper 2009-4268, pp. 1–13.
11. *Seong Y.W., Seongkyu L., Duck J.L.* Potential panel and time-marching free-wake coupling analysis for helicopter rotor // J. Aircraft. 2009. **46**, N 3. 1030–1041.
12. *Gennaretti M., Bernardini G.* Novel boundary integral formulation for blade–vortex interaction aerodynamics of helicopter rotors // AIAA J. 2007. **45**, N 6. 1169–1176.
13. *Voutsinas S.G.* Vortex methods in aeronautics: how to make things work // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2006. **20**, N 1. 3–18.
14. *Willis D.J., Peraire J., White J.K.* A combined pFFT-multipole tree code, unsteady panel method with vortex particle wakes // Int. J. Numer. Meth. Fl. 2007. **53**, N 8. 1399–1422.
15. *Шипилов С.Д.* Применение сингулярных интегральных уравнений второго рода к расчету давления на профиле умеренной толщины // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1986. Вып. 1313. 476–487.
16. *Lifanov I.K., Matveev A.F., Molyakov I.M.* Flow around permeable and thick airfoils and numerical solution of singular integral equations // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1992. **7**, N 2. 109–144.
17. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
18. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус, 2001.
19. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
20. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
21. *Гутников В.А, Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2006. № 4. 78–92.

Поступила в редакцию
04.01.2014

Transferring the Boundary Conditions to the Middle Surface for the Numerical Solution of a Boundary Value Problem in the Linear Wing Theory

I. V. Pisarev [1] **and A. V. Setukha** [2]

[1] *Orlov State University, Faculty of Physics and Mathematics; ulitsa Komsomol'skaya 95, Orel, 302026, Russia; Graduate Student, e-mail: demoruss@inbox.ru*

[2] *Research Computing Center, Lomonosov Moscow State University; Leninskie Gory, Moscow, 119992, Russia; Ph.D., Leading Scientist, e-mail: setuhaav@rambler.ru*

Received January 4, 2014

Abstract: A three-dimensional boundary value problem is considered for the Laplace equation in the framework of an ideal incompressible fluid model in the linear theory of finite span wings. For the numerical solution of this problem, an approach based on the method of potentials and boundary integral equations is used. The thickness of the wing is taken into account in the formulation of the boundary value problem at the middle surface with transferring the boundary conditions to this surface. As a result, the problem is reduced to a system of two-dimensional singular integro-differential equations. A numerical method is proposed for solving these equations on the basis of the vortex-frame method. The efficiency of the proposed method is illustrated by the example of determining the pressure distribution along the surface of the wing.

Keywords: numerical methods, boundary value problems, Laplace equation, integral equations, vortex methods, theory of finite span wings.

References

1. L. G. Loitsyanskii, *Mechanics of Liquid and Gas* (Fizmatgiz, Moscow, 1959; Pergamon Press, Oxford, 1966).

2. J. Katz and A. Plotcin, *Low-Speed Aerodynamics* (Cambridge Univ. Press, New York, 2001).

3. S. M. Belotserkovskii and M. I. Nisht, *Separated and Unseparated Flow Past Thin Wings by Ideal Liquid* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].

4. I. K. Lifanov, *The Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment* (Yanus, Moscow, 1995) [in Russian].

5. R. L. Fearn, "Airfoil Aerodynamics Using Panel Methods," The Mathematica J. **10** (4), 725–739 (2008).

6. R. P. Clark and A. J. Smits, "Thrust Production and Wake Structure of a Batoid-Inspired Oscillating Fin," J. Fluid Mech. **562**, 415–429 (2006).

7. P.-O. Persson, D. J. Willis, and J. Peraire, "Numerical Simulation of Flapping Wings Using a Panel Method and a High-Order Navier–Stokes Solver," Int. J. Numer. Meth. Engng. **89** (10), 1296–1316 (2012).

8. B. K. Stanford and P. S. Beran, "Analytical Sensitivity Analysis of an Unsteady Vortex-Lattice Method for Flapping-Wing Optimization," J. Aircraft **47** (2), 647–662 (2010).

9. O. Uzol, I. Yavrucuk, and N. Sezer-Uzol, "Panel-Method-Based Path Planning and Collaborative Target Tracking for Swarming Micro Air Vehicles," J. Aircraft **47** (2), 544–550 (2010).

10. J. W. Kim, S. H. Park, and Y. H. Yu, "Euler and Navier–Stokes Simulations of Helicopter Rotor Blade in Forward Flight Using an Overlapped Grid Solver," in *Proc. 19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conf. 2009*, AAIA Paper 2009-4268, pp. 1–13.

11. Y. W. Seong, L. Seongkyu, and J. L. Duck, "Potential Panel and Time-Marching Free-Wake Coupling Analysis for Helicopter Rotor," J. Aircraft **46** (3), 1030–1041 (2009).

12. M. Gennaretti and G. Bernardini, "Novel Boundary Integral Formulation for Blade–Vortex Interaction Aerodynamics of Helicopter Rotors," AIAA J. **45** (6), 1169–1176 (2007).

13. S. G. Voutsinas, "Vortex Methods in Aeronautics: How to Make Things Work," Int. J. Comput. Fluid Dyn. **20** (1), 3–18 (2006).

14. D. J. Willis, J. Peraire, and J. K. White, "A Combined pFFT-Multipole Tree Code, Unsteady Panel Method with Vortex Particle Wakes," Int. J. Numer. Meth. Fl. **53** (8), 1399–1422 (2007).

15. S. D. Shipilov, "Application of Singular Integral Equations of the Second Kind to Calculating the Pressure on a Moderate Thickness Airfoil," Tr. Central Aerohydrodynam. Inst. im. N. E. Zhukovskogo, No. 1313, 476–487 (1986).

16. I. K. Lifanov, A. F. Matveev, and I. M. Molyakov, "Flow around Permeable and Thick Airfoils and Numerical Solution of Singular Integral Equations," Russian J. Numer. Anal. Math. Model. **7** (2), 109–144 (1992).

17. S. V. Vallander, *Lectures on Hydroaeromechanics* (Leningrad Gos. Univ., Leningrad, 1978) [in Russian].

18. G. M. Vainikko, I. K. Lifanov, and L. N. Poltavskii, *Numerical Methods in Hypersingular Integral Equations and Their Applications* (Yanus, Moscow, 2001) [in Russian].

19. N. E. Kochin, I. A. Kibel', and N. V. Roze, *Theoretical Hydromechanics* (Fizmatgiz, Moscow, 1963; Interscience, New York, 1964).

20. D. Colton and R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory* (Wiley, New York, 1983; Mir, Moscow, 1987).

21. V. A. Gutnikov, I. K. Lifanov, and A. V. Setukha, "Simulation of the Aerodynamics of Buildings and Structures by Means of the Closed Vortex Loop Method," Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza, No. 4, 78–92 (2006) [Fluid Dyn. **41** (4), 555–567 (2006)].