

УДК 517.97; 539.376

МЕТОД РЕШЕНИЯ ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ

К. С. Бормотин¹, В. С. Логвина²

Рассматриваются функционалы прямых и обратных экстремальных квазистатических задач формообразования деталей в режиме ползучести. Доказывается единственность и устойчивость решения задач в такой формулировке для различных граничных условий неупругого деформирования при достаточных условиях единственности краевых задач. Построенные функционалы используются в численном решении обратных задач с учетом постановок прямых задач неупругого деформирования и упругой разгрузки. Пружинение находится путем решения прямой задачи формообразования методом конечных элементов и используется в итеративном методе для решения обратной задачи. Рассматриваются варианты итеративного метода решения в зависимости от выбора коэффициента и регуляризирующих функционалов. Разработанные методы реализованы в системе MSC.Marc. С помощью программных средств этой системы, предназначенных для введения новых моделей ползучести, решаются обратные задачи формообразования деталей с учетом свойств современных алюминиевых сплавов.

Ключевые слова: обратные задачи формообразования, вариационные неравенства, единственность, устойчивость, методы итеративной регуляризации, метод конечных элементов.

1. Введение. При моделировании процессов изготовления деталей в режиме пластического деформирования и в медленных высокотемпературных режимах можно выделить прямую и обратную задачу формообразования [1, 2]:

— прямая задача формообразования — это задача определения остаточного деформированного состояния после неупругого деформирования в течение заданного времени под действием заданных внешних силовых и кинематических воздействий и последующей упругой разгрузки;

— обратная задача формообразования — это задача определения внешних силовых и кинематических воздействий, под действием которых в течение заданного времени должно происходить неупругое деформирование, обеспечивающее заданную остаточную конфигурацию после упругой разгрузки.

В настоящее время наблюдается значительный интерес к процессам формообразования алюминиевых сплавов в режимах ползучести и оценке пружинения [3–7]. Для расчета пружинения панели после рассматриваемого формообразования вводится новый параметр — эквивалентный модуль [3]. В настоящей статье строятся и используются в численном решении функционалы обратных экстремальных задач теории ползучести с учетом прямых постановок задач неупругого деформирования и упругой разгрузки.

Вариационные принципы квазистатического деформирования позволяют строить уравнения равновесия относительно скоростей перемещений. Выраженные через приращения перемещений эти уравнения удобно использовать при решении общего класса геометрически и физически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела [8]. Достаточные условия единственности краевых задач обеспечивают выпуклость функционалов вариационных принципов [9]. На основе разработанных функционалов обратных задач в теории ползучести строятся вариационные неравенства, которые позволяют построить итеративные методы и доказать их сходимость [10, 11].

2. Формулировка и единственность решения задач формообразования. Пусть $V \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью с достаточно регулярной границей S . Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ векторы текущих и остаточных перемещений $u, \tilde{u} \in [W_2^1(Q)]^3, Q = V \times [0 \leq t \leq T]$.

В настоящей статье для постановки задач формообразования используются функционалы вариационного принципа Хилла [9], описывающие задачи квазистатического деформирования. В этом случае

¹ Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, самолетостроительный факультет, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; доцент, e-mail: cvmi@knastu.ru

² Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, самолетостроительный факультет, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; студент, e-mail: cvmi@knastu.ru

предполагается выполнение кинематических граничных условий $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$ на границе S , условий на остаточные скорости перемещений $\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^*$, соотношений между деформациями и перемещениями и соотношений между напряжениями и деформациями. Обратная задача теории ползучести формулируется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [10, 11]

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}) = \int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_S \dot{p}_i \dot{u}_i dS + \int_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) dV,$$

где $W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{ij} \eta_{kl}$ и $W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \eta_{kl}$ — потенциалы для деформирования в теории ползучести [8]; c_{ijkl} — компоненты симметричного тензора упругих констант; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ — скорости текущих и остаточных деформаций; $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\sigma_{ij}, q_n)$ — скорости деформаций ползучести; q_n — набор структурных параметров; $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots, p$ и

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{ij} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}). \quad (1)$$

Выражения с повторяющимися индексами означают суммирование по ним от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование: $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Достаточными условиями единственности [9] решения задач деформирования и разгрузки с введенными потенциалами являются

$$\int_V \Delta \left(\frac{\partial W(\dot{u}_{ij})}{\partial \dot{u}_{ij}} \right) \Delta \dot{u}_{ij} dV > 0, \quad \int_V \Delta \left(\frac{\partial W(\dot{\tilde{u}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{ij}} \right) \Delta \dot{\tilde{u}}_{ij} dV > 0 \quad (2)$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения (1)), принимающих заданные значения на границе. Здесь Δ означает разность соответствующих решениям величин в любых двух различных формах деформации.

Пусть символ $(\cdot, \cdot)_S$ означает скалярное произведение в $L_2(S)$: $(u, v)_S = \int_S \sum_{i=1}^3 u_i v_i dS$. Соответствующая скалярному произведению норма имеет вид $\|u\|_S = \sqrt{(u, v)_S} = \left\{ \int_S \sum_{i=1}^3 u_i^2 dS \right\}^{1/2}$. Кроме того,

$$\text{обозначим } a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{u}_{ij})}{\partial \dot{u}_{ij}} \dot{v}_{ij} dV, \quad a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{v}}) = \int_V \frac{\partial W(\dot{\tilde{u}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{u}}_{ij}} \dot{\tilde{v}}_{ij} dV.$$

Учитывая условия на остаточные скорости перемещений $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$ на границе S методом штрафа [12], можно построить функционал обратной задачи формообразования

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}) = a(\dot{u}, \dot{u}) - (\dot{p}, \dot{u})_S + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_S^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3)$$

Вариационное неравенство для этого функционала имеет вид

$$a(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) - (\dot{p}, \dot{v} - \dot{u})_S + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{v} - \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{v} - \dot{\tilde{u}})_S \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{\tilde{v}}. \quad (4)$$

Аналогично учитывая ограничения методом штрафа, можно построить функционал обратной задачи кинематического формообразования

$$J(\dot{u}, \dot{\tilde{u}}) = \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\dot{u} - \dot{u}^*\|_S^2 + a(\dot{u}, \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*\|_S^2, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0. \quad (5)$$

С учетом выпуклости последнего функционала запишем вариационное неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon_1} (\dot{u} - \dot{u}^*, \dot{v} - \dot{u})_S + a(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) + a(\dot{\tilde{u}}, \dot{v} - \dot{\tilde{u}}) + \frac{1}{\varepsilon_2} (\dot{\tilde{u}} - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{v} - \dot{\tilde{u}})_S \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{\tilde{v}}. \quad (6)$$

В выписанном выше функционале первое и последнее слагаемые в зависимости от рассмотрения прямой или обратной задачи представляют собой, кроме того, регуляризирующие функционалы [13–15].

Для случая прямой задачи последнее слагаемое может быть представлено в виде $\|\dot{\tilde{u}}\|_S^2$. Такие выражения использовались в функционалах обратных экстремальных задач тепломассопереноса [16] и позволяют доказывать устойчивость и единственность решения. Для случая обратной задачи формообразования в качестве \dot{u}^* берется произвольное приближенное решение.

Теорема 1. Пусть выполнены достаточные условия единственности (2) решения задач деформирования и разгрузки. Тогда решение задачи формообразования единственно.

Доказательство. Пусть имеются два решения задачи формообразования с полями \dot{u}_i^1, \dot{u}_i^1 и \dot{u}_i^2, \dot{u}_i^2 в объеме V , соответствующих нагрузкам \dot{p}_i^1 и \dot{p}_i^2 на поверхности S , причем $\dot{p}_i^2 - \dot{p}_i^1 = \Delta\dot{p}_i = 0$. Для каждого решения выполняются неравенства (4):

$$a(\dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^1) - (\dot{p}^1, \dot{v} - \dot{u}^1)_S + a(\dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^1) + \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\tilde{u}}^1 - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^1)_S \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{\tilde{v}},$$

$$a(\dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^2) - (\dot{p}^2, \dot{v} - \dot{u}^2)_S + a(\dot{\tilde{u}}^2, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^2) + \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^2)_S \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{\tilde{v}}.$$

Положим $\dot{v}_i = \dot{\tilde{u}}_i^1 - \dot{w}_i, \dot{\tilde{v}}_i = \dot{u}_i^1 + \dot{w}_i$ в первом неравенстве и $\dot{v}_i = \dot{\tilde{u}}_i^2 - \dot{w}_i, \dot{\tilde{v}}_i = \dot{u}_i^2 + \dot{w}_i$ во втором неравенстве для всех \dot{w}_i . Учитывая $\dot{u}_i^{ek} = \dot{\tilde{u}}_i^k - \dot{u}_i^k$, найдем

$$a(\dot{u}^1, \dot{u}^{e1} - \dot{w}) - (\dot{p}^1, \dot{u}^{e1} - \dot{w})_S + a(\dot{\tilde{u}}^1, \dot{w} - \dot{u}^{e1}) + \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\tilde{u}}^1 - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{w} - \dot{u}^{e1})_S \quad \forall \dot{w},$$

$$a(\dot{u}^2, \dot{u}^{e2} - \dot{w}) - (\dot{p}^2, \dot{u}^{e2} - \dot{w})_S + a(\dot{\tilde{u}}^2, \dot{w} - \dot{u}^{e2}) + \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^*, \dot{w} - \dot{u}^{e2})_S \quad \forall \dot{w}.$$

Затем в первом неравенстве примем $\dot{w}_i = \dot{u}_i^{e2}$, во втором $\dot{w}_i = \dot{u}_i^{e1}$ и сложим неравенства:

$$a(\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u}^e) - (\Delta\dot{p}, \Delta\dot{u}^e)_S - a(\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e) - \frac{1}{\varepsilon} (\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e)_S.$$

Отсюда имеем

$$a(\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u}^e) - a(\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e) = \int_V c_{ijpl} (\Delta\dot{u}_{pl} - \Delta\eta_{pl}) \Delta\dot{u}_{ij}^e dV - \int_V c_{ijpl} (\Delta\dot{\tilde{u}}_{pl} - \Delta\eta_{pl}) \Delta\dot{u}_{ij}^e dV =$$

$$= - \int_V c_{ijpl} \Delta\dot{u}_{p,i}^e \Delta\dot{u}_{ij}^e dV.$$

В силу выполнения достаточного признака единственности для задачи упругого деформирования получим $\int_V c_{ijpl} \Delta\dot{u}_{p,i}^e \Delta\dot{u}_{ij}^e dV \geq 0$. Тогда $-(\Delta\dot{p}, \Delta\dot{u}^e)_S - \frac{1}{\varepsilon} (\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e)_S \geq 0$, или

$$0 \geq (\Delta\dot{p}, \Delta\dot{u}^e)_S + \frac{1}{\varepsilon} (\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e)_S \geq 0. \tag{7}$$

Так как $\Delta\dot{p}_i = 0$ на поверхности S , то $\Delta\dot{u} = 0$ (в силу выполнения достаточного условия единственности задачи деформирования) и $\Delta\dot{u}_i^e = \Delta\dot{\tilde{u}}_i$; тогда $0 \geq \|\Delta\dot{\tilde{u}}\|_S^2 \geq 0$. Следовательно, $\Delta\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на поверхности S . В случае рассмотрения функционала (5) или вариационного неравенства (6) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon_1} (\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u}^e)_S - \frac{1}{\varepsilon_2} (\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{u}^e)_S \geq 0. \tag{8}$$

В случае прямой задачи имеем $\Delta\dot{u} = 0$ на поверхности S ; тогда $\Delta\dot{u}_i^e = \Delta\dot{\tilde{u}}_i$ и $0 \geq \|\Delta\dot{\tilde{u}}\|_S^2 \geq 0$. Следовательно, $\Delta\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на поверхности S . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены достаточные условия единственности (2) решения задач деформирования и разгрузки. Тогда решение обратной задачи формообразования единственно.

Доказательство. Пусть имеются два решения задачи формообразования с полями \dot{u}_i^1, \dot{u}_i^1 и \dot{u}_i^2, \dot{u}_i^2 в объеме V , соответствующих нагрузкам \dot{p}_i^1 и \dot{p}_i^2 на поверхности S , причем $\dot{\tilde{u}}_i^2 - \dot{\tilde{u}}_i^1 = \Delta\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на поверхности S . Так же как и в доказательстве теоремы 1, на основе функционала (3) строим для каждого решения

неравенство (4). Выполняя такие же преобразования, приходим к неравенству (7). Так как $\Delta \dot{u}_i = 0$ на поверхности S , то $\Delta \dot{u}_i^e = -\Delta \dot{u}_i$ на поверхности S и $0 \geq -(\Delta \dot{p}, \Delta \dot{u})_S \geq 0$, или $(\Delta \dot{p}, \Delta \dot{u})_S = 0$, но из разности двух вариационных неравенств задачи деформирования имеем $(\Delta \dot{p}, \Delta \dot{u})_S \geq a(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u})$, или $a(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u}) = 0$, что возможно при учете достаточного признака единственности только при $\Delta \dot{u}_i = 0$.

В случае рассмотрения функционала (5) или вариационного неравенства (6) будем иметь неравенство (8). Для обратной задачи выполняется условие $\Delta \dot{u}_i = 0$ на поверхности S , тогда $\Delta \dot{u}_i^e = -\Delta \dot{u}_i$ на поверхности S . В результате имеем $0 \geq \|\Delta \dot{u}\|_S^2 \geq 0$, или $\Delta \dot{u}_i = 0$ на поверхности S . Теорема доказана.

В работах [10, 11] построен итеративный метод решения обратных задач в режиме ползучести:

$$A_1^k (\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1})_S + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}) + a(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*) + A_2^k (\dot{u}^* - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^*)_S \geq 0 \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{v}^*.$$

Здесь $A_1^k > 0$, $A_2^k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = \infty$.

Покажем устойчивость этого итеративного метода. В настоящей статье доказательство устойчивости отличается от выводов в [10]. Пусть скорости текущих перемещений \dot{u}^1 изменились на $\Delta \dot{u}$: $\dot{u}^2 = \dot{u}^1 + \Delta \dot{u}^1$, а скорости остаточных перемещений \dot{u}^1 — на $\Delta \dot{u}$: $\dot{u}^2 = \dot{u}^1 + \Delta \dot{u}$; тогда можно записать неравенства

$$\begin{aligned} A_1 (\dot{u}^2 - \dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^2)_S + a(\dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^2) + a(\dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^*) + A_2 (\dot{u}^* - \dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^*)_S &\geq 0 \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{v}^*, \\ A_1 (\dot{u}^1 - \dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^1)_S + a(\dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^1) + a(\dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^*) + A_2 (\dot{u}^* - \dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^*)_S &\geq 0 \quad \forall \dot{v}, \forall \dot{v}^*. \end{aligned}$$

Штрафные коэффициенты, очевидно, можно взять одинаковыми, выбрав наибольшие. Примем $\dot{v}_i = \dot{u}_i^2 - \dot{w}_i + \Delta \dot{u}_i$, $\dot{v}_i^* = \dot{u}_i^* - \Delta \dot{u}_i + \dot{w}_i$ в первом неравенстве и $\dot{v}_i = \dot{u}_i^1 - \Delta \dot{u}_i + \dot{w}_i$, $\dot{v}_i^* = \dot{u}_i^* + \Delta \dot{u}_i - \dot{w}_i$ во втором неравенстве:

$$\begin{aligned} A_1 (\dot{u}^2 - \dot{u}^1, \Delta \dot{u} - \dot{w})_S + a(\dot{u}^1, \Delta \dot{u} - \dot{w}) + a(\dot{u}^1, \dot{w} - \Delta \dot{u}) + A_2 (\dot{u}^* - \dot{u}^1, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S &\geq 0 \quad \forall \dot{w}, \\ A_1 (\dot{u}^1 - \dot{u}^2, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S + a(\dot{u}^2, \dot{w} - \Delta \dot{u}) + a(\dot{u}^2, \Delta \dot{u} - \dot{w}) + A_2 (\dot{u}^* - \dot{u}^2, \Delta \dot{u} - \dot{w})_S &\geq 0 \quad \forall \dot{w}. \end{aligned}$$

Суммируя неравенства, получим

$$-2A_1 (\dot{u}^2 - \dot{u}^1, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S + a(\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u}) - a(\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u}) + A_2 (\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S \geq 0 \quad \forall \dot{w}.$$

Рассмотрим отдельно следующее выражение, в котором перейдем к исходным обозначениям:

$$\begin{aligned} a(\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u}) - a(\Delta \dot{u}, \dot{w}) &= \int_V c_{ijpl} (\Delta \dot{\epsilon}_{pl} - \Delta \eta_{pl}^k) (\dot{w}_i - \Delta \dot{u}_i)_{,j} dV - \int_V c_{ijpl} (\Delta \dot{\epsilon}_{pl}^k - \Delta \eta_{pl}^k) (\dot{w}_i - \Delta \dot{u}_i)_{,j} dV = \\ &= - \int_V c_{ijpl} \Delta \dot{u}_{pl}^e (\dot{w}_i - \Delta \dot{u}_i)_{,j} dV. \end{aligned}$$

Согласно [12], для каждого упругого решения выполняется уравнение $\int_V c_{ijpl} \dot{u}_{pl}^e (\dot{w}_i - \Delta \dot{u}_i)_{,j} dV = 0$,

поэтому $\int_V c_{ijpl} \Delta \dot{u}_{pl}^e (\dot{w}_i - \Delta \dot{u}_i)_{,j} dV = 0$. Этому уравнению удовлетворяет решение задачи упругой разгрузки из положения остаточной формы в положение, полученное деформированием в режиме ползучести.

Тогда для всех \dot{w} получаем неравенство $\frac{A_2}{A_1} (\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S \geq 2(\Delta \dot{u}, \dot{w} - \Delta \dot{u})_S$.

Пусть $\dot{w} = 2\Delta \dot{u}$, тогда $\frac{A_2}{A_1} (\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u})_S \geq 2(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u})_S$. Известно, что $(\Delta \dot{u}, \Delta \dot{u})_S \leq \|\Delta \dot{u}\|_S \|\Delta \dot{u}\|_S$, поэтому $\frac{A_2}{A_1} \|\Delta \dot{u}\|_S \|\Delta \dot{u}\|_S \geq 2\|\Delta \dot{u}\|_S^2$, или $\frac{A_2}{A_1} \|\Delta \dot{u}\|_S \geq 2\|\Delta \dot{u}\|_S$. Таким образом, при $\frac{A_2}{A_1} \leq 2$ получим неравенство, гарантирующее непрерывную зависимость остаточных скоростей перемещений от текущих.

3. Модификации итеративного метода решения обратных задач и анализ сходимости решения обратных задач. В работах [10, 11] на основе представленных функционалов построен итеративный метод в виде

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k (\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k), \quad 0 < \alpha^k < 2, \quad (9)$$

и доказана сходимость его к решению обратных задач формообразования. В [10, 11] исследования сходимости рассматривались при одинаковых коэффициентах. Результаты расчетов показывают неустойчивость при достижении отклонения некоторого малого значения. С целью ускорения сходимости и повышения точности решения предлагаются модификации данного метода, сходимость которых анализируется на решениях конкретных задач.

В качестве первого варианта рассмотрим итеративный метод (9) с априорным заданием коэффициента (как и в градиентных методах [13]) по формуле $\alpha^k = c(k + 1)^{-\alpha}$, $c > 0$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.

Второй вариант представляет собой итеративный регуляризованный метод [17]

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k \left((\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) + \epsilon^k \dot{u}_i^k \right), \quad \dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k \left((\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) + \epsilon^k \dot{u}_i^k \right), \quad (10)$$

где α^k , ϵ^k — постоянные, зависящие от итераций.

Третий вариант представляет собой также итеративный регуляризованный метод [14, 15, 18] в виде

$$\dot{u}_i^{k+1} = \dot{u}_i^k + \alpha^k \left((\dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k) + \epsilon^k \left| \dot{u}_i^k - \dot{u}_i^{k-1} \right| \right). \quad (11)$$

В этих модификациях коэффициенты принимаются такими, чтобы выполнялось условие $0 < \alpha^k < 2$. Конкретные значения коэффициентов методов, обеспечивающие сходимость к решению, определялись в результате расчетов.

Применение итеративных методов рассмотрим на примере решения методом конечных элементов двух задач. В первой определяется упреждающий изгиб стержня в плоской деформации. На рис. 1 представлена исходная конечно-элементная модель стержня (длина $a = 10$ мм, высота $b = 0.3$ мм) и заданная остаточная форма (кривая прерывистая линия).

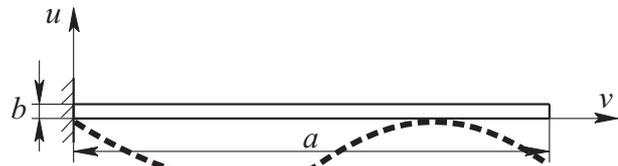


Рис. 1

Во второй задаче рассматривается квадратная пластинка толщиной h и с длиной стороны a . Известен прогиб пластинки, моделирующий кручение [19] в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки. Для более полного анализа рассматривается объемная постановка задачи.

В расчетах используются характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластинки. Материал изотропен, и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: $E = 7000$ кг/мм² (модуль Юнга), $\nu = 0.4$ (коэффициент Пуассона). Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента B для каждого из этих видов деформирования. При сжатии значение $B_1 = 0.25 \times 10^{-14}$ (кг/мм²)^{-n₁} (час)⁻¹, $n_1 = 8$. При растяжении значение равно $B_2 = 0.525 \times 10^{-14}$ (кг/мм)^{-n₂} (час)⁻¹, $n_2 = 8$.

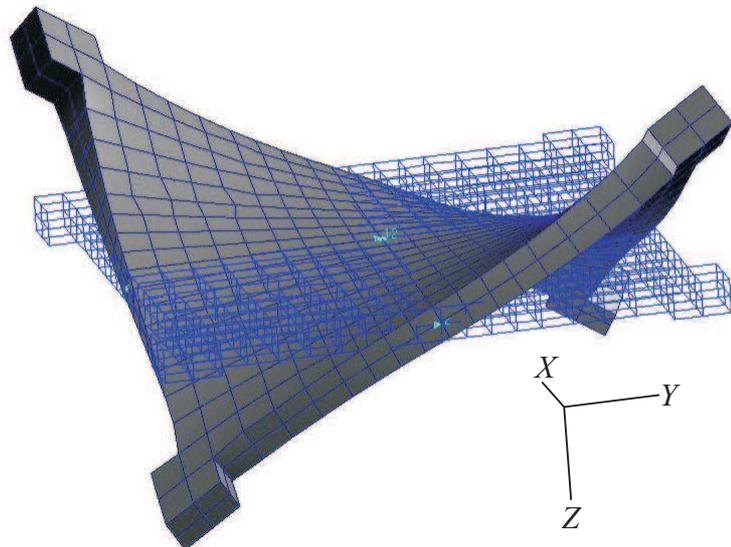


Рис. 2

На рис. 2 представлена заданная остаточная форма пластинки, для которой необходимо найти упреждающую форму, и ее плоская модель.

На рис. 3 представлены графики сходимости по среднеквадратичной норме $e = \sqrt{\sum_S (\tilde{w}^* - \tilde{w}^i)^2}$, где S — нижняя поверхность панели, а i — номер итерации для различных реализаций итеративного метода в решении задачи в случае стержня. На рис. 3 введено следующее обозначение кривых:

- 1) итеративный метод (9) с постоянным коэффициентом $\alpha^k = 1$;
- 2) итеративный метод (9) с априорным заданием коэффициента $\alpha^k = 1.78(k+1)^{-0.75}$;
- 3) итеративный регуляризованный метод (11) $\alpha^k = 0.9$, $\epsilon^k = (k+1)^{-7}$;
- 4) итеративный регуляризованный метод (10) $\alpha^k = 1.78(k+1)^{-0.75}$, $\epsilon^k = (k+1)^{-7}$;
- 5) итеративный регуляризованный метод (11) $\alpha^k = 1.78(k+1)^{-0.75}$, $\epsilon^k = (k+1)^{-7}$.

Из графиков сходимости следует, что для данной задачи решение методом (9) с постоянным коэффициентом имеет большее отклонение и колебания, чем в других случаях.

На рис. 4 представлены графики сходимости для разных вариантов итеративного метода в решении задачи для пластинки:

- 1) итеративный метод (9) с постоянным коэффициентом $\alpha^k = 1$;
- 2) итеративный регуляризованный метод (10) $\alpha^k = 1.9(k+1)^{-0.8}$, $\epsilon^k = (k+1)^{-7}$;
- 3) итеративный метод (9) с априорным заданием коэффициента $\alpha^k = 1.9(k+1)^{-0.5}$;
- 4) итеративный метод (9) с априорным заданием коэффициента $\alpha^k = 1.9(k+1)^{-0.9}$.

Из рис. 4 также следует, что для данной задачи решение методом (9) с постоянным коэффициентом имеет большее отклонение. Таким образом, наиболее предпочтительным методом является метод с априорным заданием коэффициента.

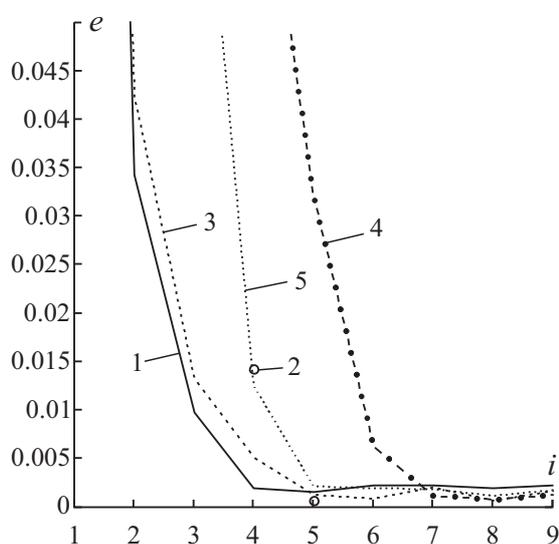


Рис. 3

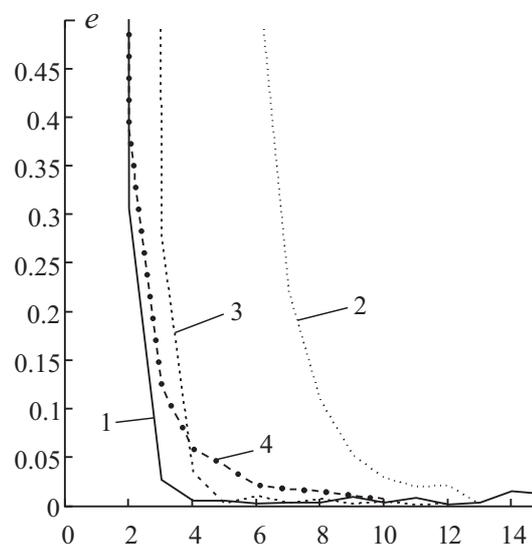


Рис. 4

4. Заключение. Показано, что обратные задачи формообразования формулируются в виде минимизации функционалов. Доказана единственность и устойчивость решения данных задач с использованием вариационных неравенств, построенных по этим функционалам. Предложены улучшенные итеративные методы решения обратных задач формообразования. Предложенные алгоритмы могут применяться при моделировании процессов формообразования панелей крыла самолета [20].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-08-00845-а), государственного задания Минобрнауки РФ (проект 1.2582.2011) и Совета по грантам Президента РФ (МК-481.2013.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Банищикова И.А., Горев Б.В., Сухоруков И.В. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2002. **43**, № 3. 129–139.
2. Цвелодуб И.Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
3. Adachi T., Kimura S., Nagayama T., Takehisa H., Shimanuki M. Age forming technology for aircraft wing skin // Materials Forum. 2004. **28**. 202–207.
4. Lihua Z., Janguo L., Minghui H. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // Advanced Science Letters. 2013. **19**, N 1. 75–79.
5. Laurent H., Coër J., Grèze R., Manach P.Y., Andrade-Campos A., Oliveira M.C., Menezes L.F. Mechanical behaviour and springback study of an aluminium alloy in warm forming conditions // ISRN Mechanical Engineering. 2011. Article ID 381615 (<http://dx.doi.org/10.5402/2011/381615>).

6. Zhan L.H., Tan S.G., Huang M.H., Niu J. Creep age-forming experiment and springback prediction for AA2524 // *Advanced Materials Research*. 2012. **122**. 457–458.
7. Alfaidi M.F., Xiaoxing L. Determination of springback in sheet metal forming // *The Annals of "Dunarea De Jos" University of Galati. Fascicle V, Technologies in Machine Building*. 2009. 129–134.
8. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. Hill R. On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // *J. Mech. Phys. Solids*. 1957. **5**, N 4. 229–241.
10. Бормотин К.С. Итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // *Вычислительные методы и программирование*. 2013. **14**. 141–148.
11. Бормотин К.С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. **53**, № 12. 2091–2099.
12. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
14. Wang Y., Yagola A.G., Yang C. Optimization and regularization for computational inverse problems and applications. Heidelberg: Springer, 2010.
15. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Эдиториал, 2004.
16. Алексеев Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // *Сибирский математический журнал*. 2001. **42**, № 5. 971–991.
17. Антипин А.С., Васильев Ф.П. Регуляризованный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств // *Вычислительные методы и программирование*. 2002. **3**. 237–244.
18. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
19. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**. 346–365.
20. Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // *Прикладная математика и техническая физика*. 2010. **51**, № 4. 155–165.

Поступила в редакцию
22.12.2013

A Method of Iterative Regularization for Solving Inverse Problems of Forming Structural Components

K. S. Bormotin¹ and V. S. Logvina²

¹ *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Faculty of Aircraft Construction; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: cvmi@knastu.ru*

² *Komsomol'sk-na-Amure State Technical University, Faculty of Aircraft Construction; prospekt Lenina 27, Komsomol'sk-na-Amure, 681013, Russia; student, e-mail: cvmi@knastu.ru*

Received December 22, 2013

Abstract: Functionals of the direct and inverse extreme quasistatic problems of forming structural components are considered. The uniqueness and stability of the solution to such a problem is proved for various boundary conditions of inelastic deformation when the sufficient uniqueness conditions are satisfied for the corresponding boundary value problems. The constructed functionals are used to solve the inverse problems numerically with consideration of the formulation of direct problems of inelastic deformation and elastic unloading. The springback is determined by solving the direct forming problem with a finite element method and is used in an iterative method for solving the inverse problem. A number of modifications for this iterative method are proposed depending on the choice of coefficients and regularizing functionals. The developed methods are realized in the MSC.Marc system. The software tools of this system intended for the introduction of new creep models are used to solve the inverse forming problems with consideration of properties of modern aluminum alloys.

Keywords: inverse forming problems, variational inequalities, uniqueness, stability, iterative regularization methods, finite element method.

References

1. I. A. Banshchikova, B. V. Gorev, and I. V. Sukhorukov, "Two-Dimensional Problems of Beam Forming Under Conditions of Creep," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **43** (3), 129–139 (2002) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **43** (3), 448–456 (2002)].
2. I. Yu. Tselodub, *A Stability Postulate and Its Applications in the Theory of Creep for Metallic Materials* (Hydrodynamics Inst., Novosibirsk, 1991) [in Russian].
3. T. Adachi, S. Kimura, T. Nagayama, et al., "Age Forming Technology for Aircraft Wing Skin," *Mater. Forum* **28**, 202–207 (2004).
4. Z. Lihua, L. Jianguo, and H. Minghui, "Study on Springback Behavior in Creep Age Forming of Aluminium Sheets," *Adv. Sci. Lett.* **19** (1), 75–79 (2013).
5. H. Laurent, J. Coër, R. Grèze, et al., "Mechanical Behaviour and Springback Study of an Aluminium Alloy in Warm Forming Conditions," *ISRN Mech. Eng.*, Art. ID 381615 (2011), available at <http://dx.doi.org/10.5402/2011/381615/>.
6. L. H. Zhan, S. G. Tan, M. H. Huang, and J. Niu, "Creep Age-Forming Experiment and Springback Prediction for AA2524," *Adv. Mater. Res.* **122**, 457–458 (2012).
7. M. F. Alfaidi and L. Xiaoxing, "Determination of Springback in Sheet Metal Forming," *Ann. Dunarea De Jos Univ. Galati, Fascicle V: Tech. Mach. Build.*, 129–134 (2009).
8. S. N. Korobeinikov, *Nonlinear Deformation of Solids* (Izd. Ross. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
9. R. Hill, "On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain," *J. Mech. Phys. Solids* **5** (4), 229–241 (1957).
10. K. S. Bormotin, "An Iterative Method for the Solution of Inverse Forming Problems under Creep Conditions," *Vychisl. Metody Programm.* **14**, 141–148 (2013).
11. K. S. Bormotin, "Iterative Method for Solving Geometrically Nonlinear Inverse Problems of Structural Element Shaping," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **53** (12), 2091–2099 (2013) [*Comput. Math. Math. Phys.* **53** (12), 1908–1915 (2013)].
12. J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires* (Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969; Mir, Moscow, 1972).
13. F. P. Vasil'ev, *Methods of Optimization* (Factorial Press, Moscow, 2002) [in Russian].
14. Y. Wang, A. G. Yagola, and C. Yang, *Optimization and Regularization for Computational Inverse Problems and Applications* (Springer, Heidelberg, 2010).
15. A. A. Samarskii and P. N. Vabishchevich, *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics* (Editorial, Moscow, 2004; Walter de Gruyter, Berlin, 2007).
16. G. V. Alekseev, "Solvability of Inverse Extremal Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations," *Sib. Mat. Zh.* **42** (5), 971–991 (2001) [*Sib. Math. J.* **42** (5), 811–827 (2001)].
17. A. S. Antipin and F. P. Vasil'ev, "A Regularized Extragradient Method for Solving Variational Inequalities," *Vychisl. Metody Programm.* **3**, 237–244 (2002).
18. A. B. Bakushinskii and A. V. Goncharskii, *Ill-Posed Problems. Numerical Methods and Applications* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1989) [in Russian].
19. S. N. Korobeinikov, A. I. Oleinikov, B. V. Gorev, and K. S. Bormotin, "Mathematical Simulation of Creep Processes in Metal Patterns Made of Materials with Different Extension–Compression Properties," *Vychisl. Metody Programm.* **9**, 346–365 (2008).
20. B. D. Annin, A. I. Oleinikov, and K. S. Bormotin, "Modeling of Forming of Wing Panels of the SSJ-100 Aircraft," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **51** (4), 155–165 (2010) [*J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **51** (4), 579–589 (2010)].