

УДК 533.6:628.5

К ЗАДАЧЕ О МОДЕЛИРОВАНИИ ИСТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ДНА РЕЗЕРВУАРА

О. А. Аверкова¹, И. Н. Логачев², К. И. Логачев³, И. В. Ходаков⁴

Рассматривается задача об истечении идеальной несжимаемой жидкости из резервуара, дно которого имеет ступенчатый вид. Методом Жуковского при помощи программной системы Maple строится сетка эквипотенциалей и линий тока, определяются закономерности изменения угла наклона и коэффициента сжатия струи в зависимости от геометрии области. С использованием стационарных дискретных вихрей строится численная схема расчета истечения таких струй. В результате сравнения расчетов делается вывод об адекватности разработанного метода численного моделирования струйного течения из сосудов.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, истечение струи, метод Жуковского, дискретные вихри.

1. Введение. В работах [1–3] нами разрабатывался метод моделирования отрывных течений на входе во всасывающие каналы, основанный на применении итерационной процедуры и использовании стационарных дискретных вихрей. Целью настоящей статьи является апробация применения указанного подхода для решения класса задач об истечении идеальной жидкости из резервуаров. Вначале используем классический метод Жуковского, который нами применялся ранее и для решения задач об отрывных течениях на входе в щелевидные всасывающие каналы [3–6].

2. Решение задачи методом Жуковского.

2.1. Вывод расчетных соотношений. Рассмотрим потенциальное отрывное истечение идеальной жидкости из плоского резервуара при асимметричном размещении выпускного щелевого отверстия в ступенчатом днище (рис. 1).

При построении расчетных соотношений для поля скоростей дважды используем метод контрольных объемов: во-первых, для определения области изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ в верхней вспомогательной полуплоскости $t = x_1 + iy_1$ и, во-вторых, для определения в этой же полуплоскости области изменения функции Жуковского $\omega = \ln \frac{u_0}{u} + i\theta$.

Учитывая прямолинейность границ физической области истечения в плоскости $z = x + iy$, воспользуемся интегральным соотношением Кристоффеля–Шварца с учетом принятого соответствия точек. При отображении верхней полуплоскости $\text{Im } t > 0$ на внутренность бесконечной полосы $0 \leq \text{Im } w \leq q$; $-\infty \leq \text{Re } w \leq \infty$ будем учитывать, что одна из точек вспомогательной полуплоскости (а именно точка P) соответствует бесконечно удаленной точке полуплоскости. Тогда можно записать, что

$$w = C_w \int_0^t \frac{dt}{t - d_1} = C_w \ln \frac{t - d_1}{-d_1}.$$

Константу C_w определим с помощью перехода сингулярной точки D по полуокружности $t - d = \varepsilon_d e^{i\alpha}$, $\alpha = \pi, \dots, 0$, бесконечно малого радиуса $\varepsilon_d \rightarrow 0$:

$$\Delta w_D = C_w \int_{\pi}^0 \frac{i\varepsilon_d e^{i\alpha}}{\varepsilon_d e^{i\alpha}} d\alpha = -C_w \pi i.$$

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; доцент, e-mail: olga_19572004@mail.ru

² Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; профессор, e-mail: logachevin@mail.ru

³ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; профессор, e-mail: kilogachev@mail.ru

⁴ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; аспирант, e-mail: ivh89@bk.ru

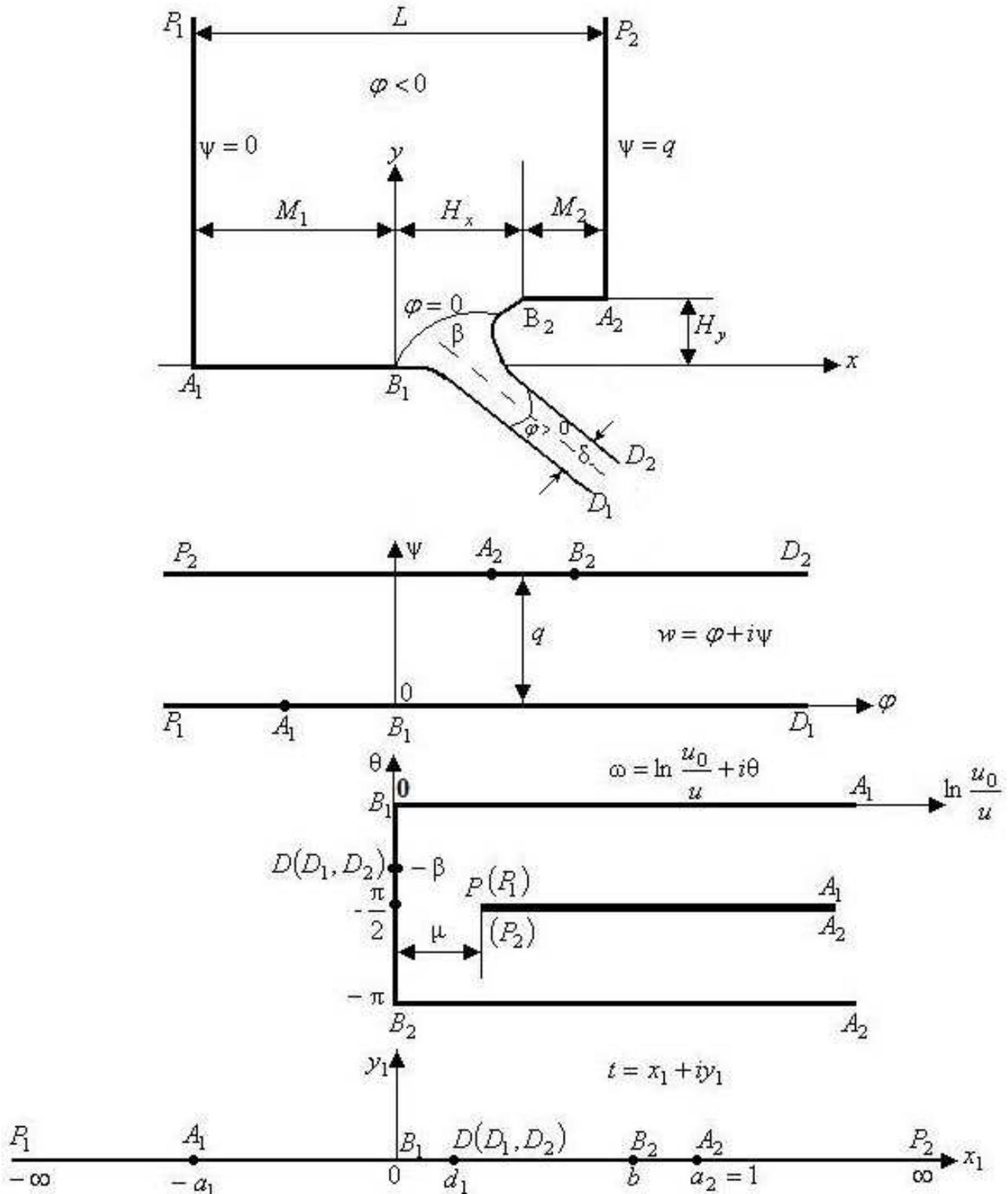


Рис. 1. К определению гидродинамического поля при отрывном истечении потенциального потока идеальной жидкости из плоского резервуара при асимметричном размещении щелевидного отверстия в днище

С другой стороны, при переходе по этой полуокружности точка D переходит с луча P_1D_1 на луч D_2P_2 , и поэтому $\Delta w_D = qi$. Сопоставляя полученные равенства, заключаем, что $C_w = -q/\pi$. Тогда

$$w = -\frac{q}{\pi} \ln \frac{t - d_1}{-d_1}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{q}{\pi} \frac{1}{t - d_1}. \tag{1}$$

При отображении верхней полуплоскости $\text{Im } t > 0$ на внутренность полуполосы $A_2B_2B_1A_1$ с разрезом вдоль луча $\text{Re } \omega \geq \mu; \text{Im } \omega = -\frac{\pi}{2}$, т.е. на внутренность области $A_1B_1DB_2A_2PA_1$ с двумя вершинами (A_1 и A_2) в бесконечности, интеграл Кристоффеля–Шварца принимает следующий вид

$$\omega = C_\omega \int_0^t \frac{dt}{(t - a_1)\sqrt{t} \sqrt{t - b} (t - 1)}. \tag{2}$$

Для определения константы C_ω осуществим переход сингулярных точек A_1 и A_2 по полуокружностям $t + a_1 = \varepsilon_{A_1} e^{i\alpha}$ и $t - 1 = \varepsilon_{A_2} e^{i\alpha}$ ($\varepsilon_{A_1} \rightarrow 0, \varepsilon_{A_2} \rightarrow 0, \alpha = \pi, \dots, 0$). При переходе точки A_1 имеем

$$\Delta\omega_{A_1} = C_\omega \int_\pi^0 \frac{i\varepsilon_{A_1} e^{i\alpha}}{\varepsilon_{A_1} e^{i\alpha} \sqrt{-a_1} \sqrt{-a_1 - b} (-a_1 - 1)} d\alpha = -i \frac{\pi C_\omega}{\sqrt{a_1} \sqrt{a_1 + b} (1 + a_1)}.$$

С другой стороны, при переходе точки A_1 с луча P_1A_1 на луч A_1B_1 функция ω получает приращение $\Delta\omega_{A_1} = i\pi/2$. Сопоставляя полученные результаты, найдем

$$C_\omega = -\frac{1 + a_1}{2} \sqrt{a_1} \sqrt{a_1 + b}. \tag{3}$$

Выполняя аналогичные процедуры при переходе сингулярной точки A_2 , получим

$$C_\omega = -\frac{1 + a_1}{2} \sqrt{1 - b}. \tag{4}$$

Сопоставляя правые части равенств (3) и (4), найдем соотношение между параметрами задачи:

$$a_1 = 1 - b. \tag{5}$$

Следовательно, имеют место неравенства $1 > b > 0$ и $1 > a_1 > 0$.

Функцию Жуковского (2) можно представить в виде $\omega = I_1 + I_2$, где интегралы

$$I_1 = \frac{\sqrt{a_1}}{2} \int_0^t \frac{dt}{(t + a_1) \sqrt{t} \sqrt{t - b}}, \quad I_2 = \frac{\sqrt{a_1}}{2} \int_0^t \frac{dt}{(t - 1) \sqrt{t} \sqrt{t - b}}$$

выражаются через элементарные функции; тогда функция (2) примет вид

$$\omega = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k_1 T_1}{1 - k_1 T_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{k_1 + T_1}{k_1 + T_1}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \geq 1, \tag{6}$$

что тождественно равенству

$$\omega = -i(\text{arctg } k_1 T_1 + \text{arctg } k_2 T_2), \quad k_2 = \sqrt{a_1} \leq 1, \tag{7}$$

где $T_1 = \sqrt{\frac{t}{t - b}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{t}{b - t}} = \frac{T_2}{i}; T_2 = \sqrt{\frac{t}{b - t}}$.

Найдем функцию Жуковского в точках $P_2(t_2 = \infty)$ и $P_1(t_1 = -\infty)$. В точке P_2 имеем $T_1 = 1$; на основании (6) при $k_1 > 1$ получим $\omega_{P_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k_1}{-(k_1 - 1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{k_1 + 1}{k_1 - 1} = \ln \frac{1 + k_1}{k_1 - 1} - \frac{\pi}{2} i$. Сопоставляя полученный результат с координатами этой точки в плоскости ω , получим

$$\mu = \frac{1 + k_1}{k_1 - 1}. \tag{8}$$

Для точки P_1 имеем $T_2 = i$, и на основании (7) заключаем, что

$$\omega_{P_1} = -i \left(\text{arctg } ik_1 + \text{arctg } \frac{i}{k_1} \right) = -\frac{\pi}{2} i - \ln \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1},$$

т.е. получаем тождественный результат.

В силу (8) для скорости жидкости в бесконечно удаленных точках P_1 и P_2 запишем

$$u_P = u_0 \frac{k_1 - 1}{1 + k_1} = u_0 \frac{1 - \sqrt{a_1}}{1 + \sqrt{a_1}}. \quad (9)$$

Тогда величина расхода жидкости выражается формулой $q = \delta_\infty u_0 = Lu_0 \frac{1 - \sqrt{a_1}}{1 + \sqrt{a_1}}$, откуда толщина струи в точке D равна $\delta_\infty = L \frac{1 - \sqrt{a_1}}{1 + \sqrt{a_1}}$.

На основании (6) получим $e^\omega = \sqrt{\frac{1 + k_1 T_1}{1 - k_1 T_1}} \sqrt{\frac{k_1 + T_1}{k_1 - T_1}} = \frac{\sqrt{a_1}}{ib} \frac{2t - b + m\sqrt{t} \sqrt{t - b}}{\sqrt{t + a_1} \sqrt{t - 1}}$, а для отображения физической области течения на верхнюю полуплоскость $\text{Im } t > 0$ запишем

$$z = \frac{1}{u_0} \int_0^t e^\omega \frac{dw}{dt} dt = -\frac{q}{i\pi} \frac{\sqrt{a_1}}{b} \int_0^t \frac{2t - b + m\sqrt{t} \sqrt{t - b}}{\sqrt{t + a_1} \sqrt{t - 1} (t - d_1)} dt, \quad (10)$$

где

$$m = \frac{1 + a_1}{\sqrt{a_1}}. \quad (11)$$

Осуществим переход второй бесконечно удаленной точки D физической плоскости $z = x + iy$. Переход этой сингулярной точки осуществим по полуокружности $t = d + \varepsilon_d e^{i\varphi}$, где $\varepsilon_d \rightarrow 0$, а φ изменяется от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 0$. На основании (10) найдем приращение

$$\Delta z_D = -\frac{q}{i\pi} \frac{\sqrt{a_1}}{b} \int_{d_1 - \varepsilon_d}^{d_1 + \varepsilon_d} \frac{2t - b + m\sqrt{t} \sqrt{t - b}}{\sqrt{t + a_1} \sqrt{t - 1} (t - d_1)} dt = q \frac{\sqrt{a_1}}{b\sqrt{d_1 + a_1} \sqrt{1 - d_1}} \left[m\sqrt{d_1} \sqrt{b - d_1} - i(2d_1 - b) \right].$$

Модуль $|\Delta z_D|$ этого приращения равен qK_d , где $K_d = \frac{\sqrt{a_1}}{b} \sqrt{\frac{(b - 2d_1)^2 + m^2 d_1 (b - d_1)}{(d_1 + a_1)(1 - d_1)}}$. Заметим, что величина K_d тождественно равна единице в силу выражений (5) и (11).

Таким образом, $|\Delta z_D| = q$; поскольку из физических соображений $q = u_0 |\Delta z_D|$, то для скорости в точке D имеем $u_0 = 1$. Тогда из равенства $q = u_0 L = \delta_\infty \cdot 1$ и (9) следует важное соотношение для ширины струи в бесконечности:

$$\delta_\infty = L \frac{1 - \sqrt{a_1}}{1 + \sqrt{a_1}} = L \frac{b}{(1 + \sqrt{1 - b})^2}. \quad (12)$$

Для угла наклона струи в точке D на основании (7) при $t = d_1$ имеем

$$\beta = -\frac{180}{\pi} \left[\text{arctg} \frac{1}{\sqrt{a_1}} \sqrt{\frac{d_1}{b - d_1}} + \text{arctg} \sqrt{a_1} \sqrt{\frac{d_1}{b - d_1}} \right]. \quad (13)$$

Для построения ортогональной сетки линий тока и эквипотенциальных линий рассматриваемого течения в физической области запишем соотношения для комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$. С учетом (1), полагая $q = 1$ и $\varphi + i\psi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{-d_1}{t - d_1}$, найдем

$$t = d_1 \left[1 - e^{-\pi(\varphi + i\psi)} \right]. \quad (14)$$

При известных параметрах a_1 и d_1 алгоритм численного определения ортогональной сетки заключается в следующем: задаются фиксированные значения φ (теоретически в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$; практически от -2 до $+2$) и строятся линии тока $\psi = \text{const}$ (в диапазоне от 0 до 1 при $q = 1$); определяются по формуле (14) значения t ; вычисляются по формуле (10) значения искомого комплексного числа $z = x + iy$ и определяются координаты соответствующих точек физической области.

Таким образом, определение всех параметров отрывного течения — скорости, угла наклона струи β , ширины струи δ_∞ в бесконечной точке D — возможно при заданных размерах резервуара, которые и определяют величину параметров a_1 и d_1 .

Для этого, например, можно задать линейные размеры ширины полок в днище резервуара M_1 и M_2 и принять в качестве единицы длины физической области проекцию на ось OX ширины отверстия $H_x = 1$. Такое допущение позволит осуществить сопоставление с результатами известных решений задачи симметричного истечения идеальной жидкости, например задачи Мизеса [7]. Ширину резервуара найдем по формуле $L = M_1 + M_2 + 1$, а параметры задачи определяются решением системы уравнений, составленной на основании (10) и (11): при $G = \frac{L}{\pi} \frac{\sqrt{a_1}}{(1 + \sqrt{a_1})^2}$ имеем

$$M_1 = G \int_0^{-a_1} \frac{b - 2t + m\sqrt{-t} \sqrt{b-t}}{(t - d_1)\sqrt{t + a_1} \sqrt{1-t}} dt, \quad M_2 = G \int_b^t \frac{2t - b + m\sqrt{t} \sqrt{t-b}}{(t - d_1)\sqrt{t + a_1} \sqrt{1-t}} dt. \quad (15)$$

Определив параметры задачи a_1 и d_1 совместным решением уравнений (15), найдем угол наклона отрывной струи β по формуле (13), толщину этой струи δ_∞ по формуле (12) и скорость u_P в бесконечно удаленном сечении P_1P_2 резервуара по формуле (9). При условии $u_0 = 1$ определим координаты точки срыва $B_2(H_x, H_y)$ жидкости с полки B_2A_2 :

$$H_x = -G \int_0^{d_1 - \varepsilon_d} f_3(t) dt - \delta_\infty \sin\left(\frac{\beta}{180} \pi\right) - G \int_{d_1 + \varepsilon_d}^b f_3(t) dt, \quad \text{где } f_3 = -\frac{b - 2t}{(t - d_1)\sqrt{1-t} \sqrt{a_1 + t}}; \quad (16)$$

$$H_y = -G \int_0^{d_1 - \varepsilon_d} f_4(t) dt + \delta_\infty \cos\left(\frac{\beta}{180} \pi\right) - G \int_{d_1 + \varepsilon_d}^b f_4(t) dt, \quad \text{где } f_4 = \frac{m\sqrt{t} \sqrt{b-t}}{(t - d_1)\sqrt{1-t} \sqrt{a_1 + t}}.$$

В качестве радиуса бесконечно малой полуокружности (при переходе сингулярной точки D) можно принять $\varepsilon_d \approx 10^{-10}$. Соотношение (17) позволяет оценить степень точности очевидного тождества $H_x = 1$ при принятой величине ε_d .

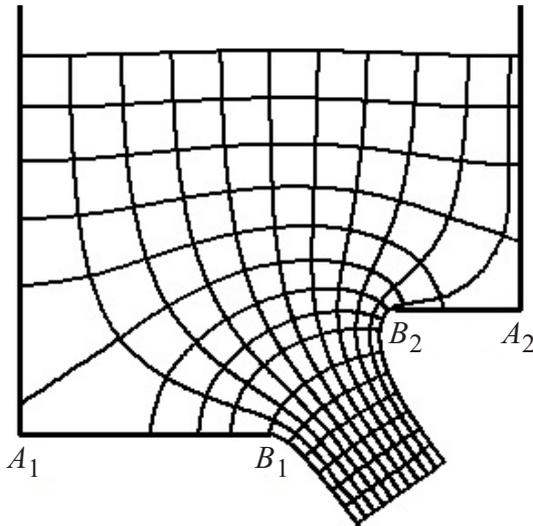


Рис. 2. Ортогональная сетка эквипотенциалей и линий тока истечения жидкости из плоского резервуара со ступенчатым днищем при $L = 4, M_1 = 2.0, M_2 = 1.0; H_x = 1; H_y = 1; a_1 = 0.421810; d_1 = 0.112659$

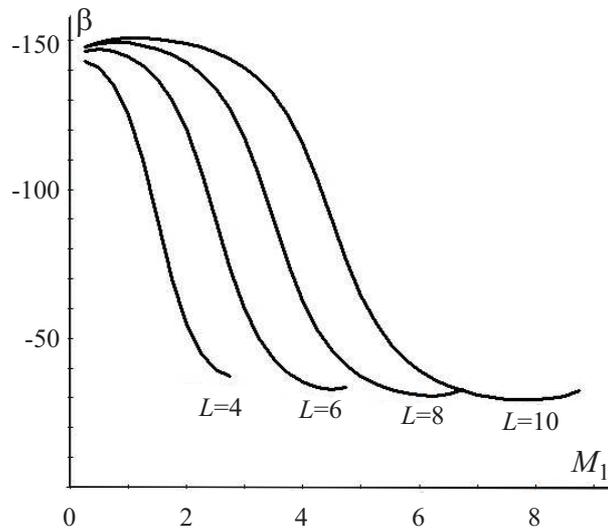


Рис. 3. Изменение угла наклона струи β в зависимости от ширины полки днища резервуара M_1

2.2. Сопоставление результатов расчета в частных случаях. Наглядное представление о геометрической картине истечения идеальной жидкости из резервуара со ступенчатым днищем дает ортогональная сетка эквипотенциалей и линий тока (рис. 2), построенная по приведенному выше алгоритму путем численного решения системы уравнений (14) и (10). Угол наклона струи истекающей жидкости для нашего случая составляет $\beta = -54.86^\circ$. При изменении ширины полок днища угол наклона изменяется (рис. 3): абсолютная величина угла $|\beta|$ увеличивается при уменьшении ширины полки M_1 (и соответствующем росте M_2) при неизменной величине L .

При равенстве ширины полок ($M_1 = M_2$) угол β равен -90° , а днище выравнивается — становится плоским ($H_y = 0$), т.е. имеем случай симметричного истечения, решение которого выполнено Мизесом [7]. Результаты этого решения изложены в работах [8, 9]. При симметричном истечении Гуревичем в [9] было найдено соотношение

$$\frac{H_x}{L} = \sqrt{h} \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} - \sqrt{h} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{h} + 1 \right], \quad K_a = \frac{\delta_\infty^*}{H_x} = \frac{\sqrt{h}}{H_x/L}, \quad (17)$$

где h — параметр задачи.

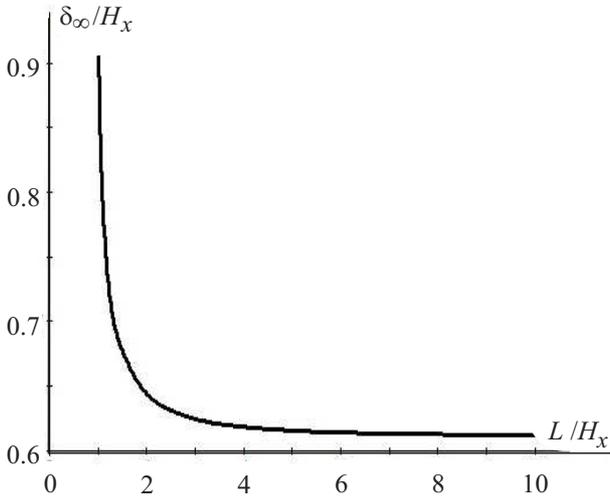


Рис. 4. Изменение толщины струи при симметричном размещении щели в плоском днище резервуара ($\beta = -90^\circ$, $H = 0$, $M_1 = M_2$)

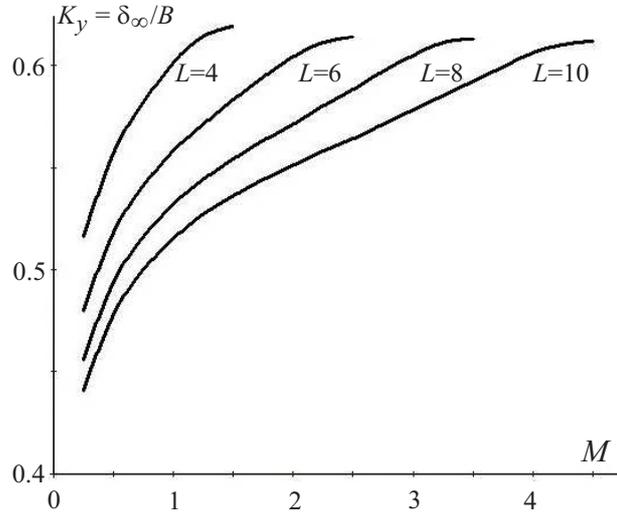


Рис. 5. Изменение условного коэффициента сжатия струи жидкости, вытекающей из плоского резервуара со ступенчатым днищем в зависимости от ширины полки и ширины резервуара L

Поскольку в нашем случае принято $H_x = 1$, то соотношение для коэффициента сжатия K_a можно представить в виде $\delta_\infty^* = L\sqrt{h}$, что позволяет на основании (17) записать уравнение

$$\delta_\infty^* \left[\frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{\delta_\infty^*} - \frac{\delta_\infty^*}{L} \right) \operatorname{arctg} \frac{\delta_\infty^*}{L} + 1 \right] = 1, \quad (18)$$

позволяющее найти ширину струи в бесконечно удаленной точке D .

Сопоставление параметров симметричного истечения (см. таблицу) показывает, что величина ширины струи δ_∞^* , рассчитанной по формуле (12) для случая $\beta = -90^\circ$ (рис. 4), практически не отличается от данных Гуревича и Мизеса [8].

Асимметричное истечение из резервуара со ступенчатым днищем отличается не только изменением угла наклона струи β , но и наличием связи между высотой H_y полки B_2A_2 и шириной полки $M = \max(M_1, M_2)$. Чем больше разность $|M_1 - M_2|$, тем выше абсолютная высота расположения полок относительно друг друга и тем меньше величина условного коэффициента сжатия струи (рис. 5)

$$K_y = \frac{\delta_\infty}{B} = \frac{\delta_\infty}{\sqrt{1 + H_y^2}}, \quad \text{где } B \text{ — расстояние между точками схода жидкости } B_1 \text{ и } B_2.$$

Сопоставление толщины струи при симметричном истечении жидкости из плоского резервуара

$M_1 = M_2$	L	a_1	d_1	δ_∞		
				по (12)	по (18)	по [8]
4.5	10	0.7826	0.1087	0.6122	0.6122	0.612
2.0	5	0.6095	0.1953	0.6158	0.6158	0.616
1.166	3.333	0.4697	0.2652	0.6221	0.6221	0.622
0.75	2.5	0.3561	0.3220	0.6314	0.6314	0.633
0.5	2.0	0.2628	0.3686	0.6444	0.6444	0.644
0.3333	1.6666	0.1816	0.4070	0.6621	0.6621	0.662
0.2145	1.429	0.1231	0.4384	0.6866	0.6866	0.687
0.125	1.250	0.0716	0.4642	0.7223	0.7223	0.722
0.0555	1.111	0.0305	0.4848	0.7807	0.7807	0.781

Отмеченное отличие рассмотренного истечения от симметричного объясняется появлением горизонтальной составляющей количества движения жидкости в силу разности $M_1 - M_2$ и возникновением перепада уровня полок днища. Равенство значений ширины струи δ_∞ в точке D , абсолютных величин угла отклонения струи от вертикали и отметки полки B_2A_3 , а также величин параметра a_1 при одинаковом соотношении линейных размеров полок $M_1 : M_2$ и $M_2 : M_1$ объясняется симметрией картины течения относительно начала координат (например, “точечная” симметрия для параметра β наглядно видна на рис. 6; для кривых, приведенных на этом рисунке, точкой симметрии является точка с координатами $M_1 = \frac{L-1}{2}$ и $\beta = -90^\circ$). Это позволяет исследовать лишь случай $M_1 \geq M_2$, распространяя результаты при необходимости на случай $M_1 \leq M_2$.

3. Решение задачи с использованием стационарных дискретных вихрей.

3.1. Постановка задачи, основные расчетные соотношения. Рассматривается двумерная задача об истечении жидкости из дна резервуара (рис. 7). С острых кромок A и B происходит срыв потока и образуются свободные линии тока AC и BD . Необходимо определить их положение и скорость потока в любой заданной точке.

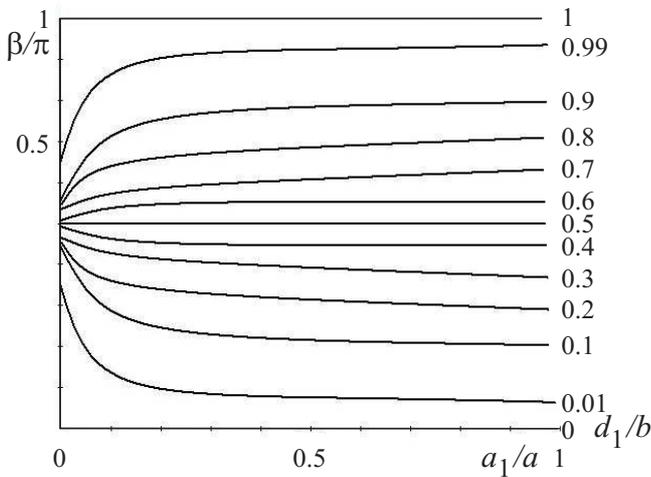


Рис. 6. Изменение угла наклона истекающей струи (свободных линий тока на бесконечности) при асимметричном размещении щелевидного отверстия в днище плоского резервуара

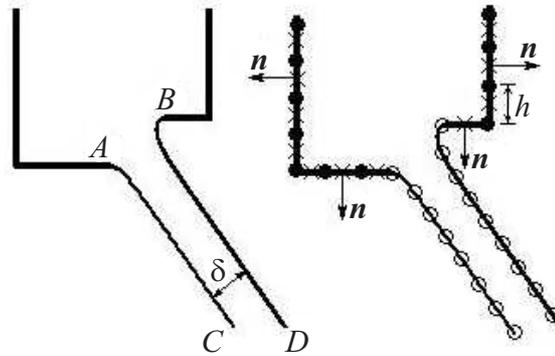


Рис. 7. Границы течения и их дискретизация

Дискретная модель строится следующим образом. Вихри, лежащие на острых кромках A и B , считаются свободными, что следует из теоремы, изложенной в монографии Лифанова [10]: интенсивность (циркуляция) присоединенного вихря в точке срыва потока равна нулю. Присоединенные вихри располагались в точках изломов границы. На рис.7 введены следующие обозначения: \bullet — присоединенные вихри, \circ — свободные вихри, \times — контрольные точки. Между присоединенными вихрями располагались контрольные точки. Точка $\xi^k(\xi_1, \xi_2)$ — точка расположения k -го присоединенного вихря; $x^p(x_1, x_2)$ — p -я контрольная точка. Тогда скорость в точке x^p вдоль единичного направления \mathbf{n} , вызываемая действием вихря циркуляции $\Gamma(\xi^k)$, расположенного в точке ξ^k , определится из выражения $v_n(x^p) = G(x^p, \xi^k)\Gamma(\xi^k)$, где $G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - \xi_1)n_2 - (x_2 - \xi_2)n_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$. Полагалось, что на искомой свободной линии тока циркуляция вихрей известна, постоянна и равна γ . Расстояние между свободными вихрями есть величина постоянная и равная h . Первое приближение для свободных линий тока: вертикальные линии, удаленные на 10 калибров (1 калибр — ширина отверстия) вниз. Будем полагать, что циркуляции свободных вихрей на линии тока AC равны циркуляциям свободных вихрей на линии тока BD по абсолютной величине, но разные по знаку, что с физической точки зрения логично. Вращение частиц жидкости, сорвавшихся с острых кромок A и B , должно осуществляться в противоположных направлениях. Соответственно, сорвавшись с точки A , вихрь вращается по часовой стрелке, поэтому $\gamma < 0$.

Обозначим N — количество присоединенных вихрей; N_{S1} — количество свободных вихрей, расположенных на свободной линии тока AC ; N_S — количество свободных вихрей на обеих линиях тока.

Суммарное воздействие всех вихрей на контрольную точку x^p вдоль направления внешней нормали

выражается равенством

$$\nu_n(x^p) = \sum_{q=1}^N G(x^p, \xi^q) \Gamma(\xi^q) + \gamma \sum_{k=1}^{N_{S1}} G(x^p, \zeta^k) - \gamma \sum_{k=N_{S1}+1}^{N_{S1}+N_S} G(x^p, \zeta^k), \tag{19}$$

где ζ^k — точка расположения свободного вихря.

Поскольку $\nu_n(x^p) = 0$ во всех контрольных точках, т.е. выполняется условие непроницаемости, то при изменении $p = 1, 2, \dots, N$ выражение (19) преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных циркуляций $\Gamma(\xi^q)$ присоединенных вихрей:

$$\sum_{q=1}^N G(x^p, \xi^q) \Gamma(\xi^q) = -\gamma \sum_{k=1}^{N_{S1}} (G(x^p, \zeta^k) - G(x^p, \zeta^{k+N_S})). \tag{20}$$

После решения этой системы скорость в любой точке $x(x_1, x_2)$ области вдоль любого заданного направления вычисляется по формуле (19).

Далее строятся свободные линии тока с использованием метода Рунге–Кутты численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = \nu_x, \frac{dy}{dt} = \nu_y$, где ν_x, ν_y определяются из выражения (19) при $\mathbf{n} = \{1, 0\}$ для ν_x и $\mathbf{n} = \{0, 1\}$ для ν_y . Линии тока строятся с острых кромок A и B . Шаг интегрирования Δt выбирается достаточно малым (например $\Delta t = 0.0001$). По свободным линиям тока равномерно с шагом h располагаются свободные вихри. После построения линий тока необходимо снова определить циркуляции присоединенных вихрей путем решения системы уравнений (20). Далее, на следующей итерации, опять строятся свободные линии тока, на которых располагают свободные вихри. Решается система (19) и выполняется переход к следующей итерации. Вычислительный процесс происходит до тех пор, пока толщина δ истекающей струи на данной итерации не станет отличаться от этой же величины, но найденной на предыдущей итерации на величину заданной точности ε .

В случае осесимметричной задачи вихревой слой, моделирующий граничную поверхность, заменяется бесконечно тонкими вихревыми кольцами постоянной интенсивности. В этом случае функция $G(x, \xi)$ вычисляется с помощью следующей формулы:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{A_1 b + A_2 a}{b} \frac{4}{(a-b)\sqrt{a+b}} E(t) - \frac{A_2}{b} \frac{4}{\sqrt{a+b}} F(t) & \text{при } b \neq 0, \\ \frac{\xi_2^2 n_1}{2a\sqrt{a}} & \text{при } b = 0, \end{cases}$$

$$2x_2 \xi_2 = b > 0, \quad a = (x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2 + x_2^2 > 0, \quad A_1 = \frac{\xi_2^2 n_1}{4\pi}, \quad A_2 = \frac{\xi_2}{4\pi} [(x_1 - \xi_1)n_2 - x_2 n_1],$$

$$f(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad t = \frac{2b}{a+b}.$$

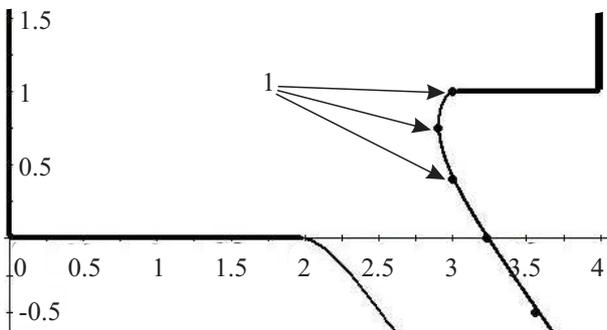


Рис. 8. Линии тока при истечении струи из дна резервуара, 1) расчеты по методу Жуковского (черные точки •)

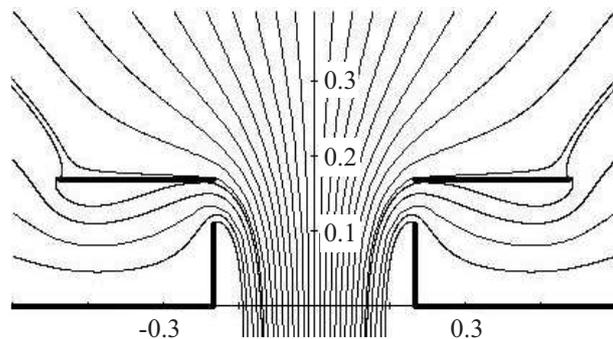


Рис. 9. Линии тока на входе в круглую трубу с кольцевым экраном

3.2. Пример расчета. Решение задачи осуществлялось при следующих параметрах дискретной модели: $\gamma = -0.1$; $h = 0.05$; $\varepsilon = 0.001$. В процессе решения определялось положение свободных линий

тока, их угол наклона, толщина на бесконечности (в расчетах на удалении 10 калибров). Полученная картина истечения (рис. 8) демонстрирует адекватность расчету, произведенному методом Жуковского.

Здесь границы стенок резервуара удалялись до 10 калибров вертикально вверх, линии тока на каждой итерации строились до тех пор, пока их ордината не достигала значения -10 . Сначала строилась свободная линия тока AC . В процессе построения определялось направление вектора, начало которого совпадало с положением предыдущего свободного вихря и последующего. Как только это направление изменялось не существенно (угол относительно вертикали становился меньше 0.001), то расчет линии тока прекращался, а свободные вихри располагались вдоль найденного направления по прямой, пока их ордината не достигала величины -10 . Затем строилась свободная линия тока BD аналогично линии AC . Итерационный процесс сходился за 15 итераций.

Предложенный подход для построения свободных линий или поверхностей тока, определения толщины истекающей струи может использоваться и для более сложных границ течения в многосвязных областях, для осесимметричных (рис. 9) и трехмерных задач, т.е. когда метод Жуковского не применим. На рис. 9 изображен случай, когда отрыв круговых вихрей происходит с острых кромок трубы и кольцевого экрана. Расчет таких отрывных течений необходим для решения задач аспирации [11–18].

4. Заключение. Решение задачи об истечении идеальной жидкости из дна резервуара позволяет сделать вывод об адекватности метода расчета струй идеальной несжимаемой жидкости с помощью стационарных дискретных вихрей. Применение данного подхода позволяет решать задачи с более сложными границами и иной размерности, где метод Жуковского не применим.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 14–08–31069–мол_а), гранта Президента РФ (код проекта МК-103.2014.1) и программы стратегического развития Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова (код проекта А-10/12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И. Моделирование потенциальных течений с неизвестными границами на основе стационарных дискретных вихрей // Вычислительные методы и программирование. 2011. **12**. 213–219.
2. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И. Моделирование отрыва потока на входе во всасывающие каналы в областях с разрезами // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 298–306.
3. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И., Логачев А.К. Закономерности отрывного течения при входе в выступающий канал с экранами // Ученые записки ЦАГИ. 2013. **XLIV**, № 2. 33–49.
4. Логачев И.Н., Логачев К.И., Зоря В.Ю., Аверкова О.А. Моделирование отрывных течений вблизи всасывающей щели // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 43–52.
5. Логачев И.Н., Логачев К.И., Аверкова О.А. Математическое моделирование отрывных течений при входе в экранированный плоский канал // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 68–77.
6. Логачев И.Н., Логачев К.И., Аверкова О.А. Математическое моделирование струйного течения воздуха при входе в плоский канал с козырьком и непроницаемым экраном // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**. 160–167.
7. Mises R. Berechnung von Ausfluss und Überfallzahlen // Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure. 1917. **61**, № 21. 493–498.
8. Форштеймер Ф. Гидравлика. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
9. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматлит, 1961.
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.
11. Alden J.L., Kane J.M. Design of industrial ventilation systems. New York: Industrial Press, 1982.
12. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х., Маклаков Д.В. Расчет концентраций частиц в задаче аспирации аэрозоля в тонкостенную трубу // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 6. 89–99.
13. Зарипов Ш.Х., Зигангареева Л.М., Киселев О.М. Аспирация аэрозоля в трубу из неподвижной среды // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2000. № 2. 104–109.
14. Logachev I.N., Logachev K.I., Averkova O.A. Methods and means of reducing the power requirements of ventilation systems in the transfer of free-flowing materials // Refractories and Industrial Ceramics. 2013. **54**, № 3. 258–262.
15. Averkova O., Logachev A., Logachev I., Logachev K. Modeling of gas separated flows at inlet of suction channels on the basis of stationary discrete vortices // CD-ROM Proc. 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. Vienna: Vienna Univ. of Technology, 2012. 1–20.
16. Logachev I.N., Logachev K.I. Industrial air quality and ventilation: controlling dust emissions. Boca Raton: CRC Press, 2014.
17. Averkova O.A., Zorya V.Yu., Logachev I.N., Logachev K.I. Numerical simulation of air currents at the inlet to slot leaks of ventilation shelters // Refractories and Industrial Ceramics. 2010. **51**, № 3. 177–182.

18. Anzheurov N.M., Averkova O.A. Software for computing dusty air flows in ventilation systems // Refractories and Industrial Ceramics. 2008. **49**, № 3. 229–234.

Поступила в редакцию
17.12.2013

Modeling of the Outflow of an Ideal Fluid From the Tank Bottom

O. A. Averkova¹, I. N. Logachev², K. I. Logachev³, and I. V. Khodakov⁴

¹ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Ph.D., Associate Professor, e-mail: olga_19572004@mail.ru

² Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Professor, Head of Department, e-mail: logachevin@mail.ru

³ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Professor, Head of Department, e-mail: kilogachev@mail.ru

⁴ Shukhov Belgorod State Technological University; ulitsa Kostyukova 44, Belgorod, 308012, Russia; Graduate Student, e-mail: ivh89@bk.ru

Received December 17, 2013

Abstract: The problem of outflow of an ideal incompressible fluid from a tank is considered for the case when the tank bottom is of a stepwise shape. The Zhukovskii method and the Maple system are used to construct equipotential grids and streamlines. The variation regularities are studied for the slope angle and compression coefficient of the fluid jet in relation to the domain geometry. Using the stationary discrete vortices, a numerical scheme for determining the outflow properties of such jets is proposed. The adequacy of the proposed approach to the numerical modeling of jet flows from vessels is confirmed by a comparative analysis of numerical results.

Keywords: ideal incompressible fluid, jet outflow, Zhukovskii method, discrete vortices.

References

1. O. A. Averkova, I. N. Logachev, and K. I. Logachev, "Modeling of Potential Flows with Unknown Boundaries on the Basis of Stationary Discrete Vortices," *Vychisl. Metody Programm.* **12**, 213–219 (2011).
2. O. A. Averkova, I. N. Logachev, and K. I. Logachev, "Modeling of Flow Separation at the Inlet of a Suction Channel in Regions with Cuts," *Vychisl. Metody Programm.* **13**, 298–306 (2012).
3. O. A. Averkova, I. N. Logachev, K. I. Logachev, and A. K. Logachev, "The Principles of Separated Flow at the Inlet of the Protruding Duct with Screens," *Tr. Central Aerodynamic Inst.* **XLIV** (2), 33–49 (2013) [*TsAGI Sci. J.* **44** (2), 219–243 (2013)].
4. I. N. Logachev, K. I. Logachev, V. Yu. Zorya, and O. A. Averkova, "Modeling of Separated Flows Near a Suction Slot," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 43–52 (2010).
5. I. N. Logachev, K. I. Logachev, and O. A. Averkova, "Mathematical Simulation of Separated Flows at the Inlet of a Plane Screened Channel," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 68–77 (2010).
6. I. N. Logachev, K. I. Logachev, and O. A. Averkova, "Mathematical Simulation of Air Jet Flow at the Entrance of a Plane Channel Equipped with a Shield and an Impermeable Screen," *Vychisl. Metody Programm.* **11**, 160–167 (2010).
7. R. Mises, "Berechnung von Ausfluss und Überfallzahlen," *VDI Zeitschrift* **61** (21), 493–498 (1917).
8. Ph. Forchheimer, *Hydraulik* (Teubner, Berlin, 1914; Narkomat Tyazh. Promyshl., Moscow, 1935).
9. M. I. Gurevich, *The Theory of Jets in an Ideal Fluid* (Fizmatlit, Moscow, 1961; Pergamon, New York, 1966).
10. I. K. Lifanov, *Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiments* (Yanus, Moscow, 1995) [in Russian].
11. J. L. Alden and J. M. Kane, *Design of Industrial Ventilation Systems* (Industrial Press, New York, 1982).
12. A. K. Gil'fanov, Sh. Kh. Zaripov, and D. V. Maklakov, "Calculation of Particle Concentration in the Problem of Aerosol Aspiration into a Thin-Walled Tube," *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 6, 89–99 (2009) [*Fluid Dyn.* **44** (6), 873–881 (2009)].

13. Sh. Kh. Zaripov, L. M. Zigangareeva, and O. M. Kiselev, "Aerosol Aspiration into a Tube from a Calm Medium," *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza*, No. 2, 104–109 (2000) [*Fluid Dyn.* **35** (2), 242–246 (2000)].

14. I. N. Logachev, K. I. Logachev, and O. A. Averkova, "Methods and Means of Reducing the Power Requirements of Ventilation Systems in the Transfer of Free-Flowing Materials," *Refr. Indust. Ceram.* **54** (3), 258–262 (2013).

15. O. Averkova, A. Logachev, I. Logachev, and K. Logachev, "Modeling of Gas Separated Flows at Inlet of Suction Channels on the Basis of Stationary Discrete Vortices," in *CD-ROM Proc. 6th Eur. Congr. on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, September 10–14, 2012* (Vienna Univ. of Technol., Vienna, 2012), pp. 1–20.

16. I. N. Logachev and K. I. Logachev, *Industrial Air Quality and Ventilation: Controlling Dust Emissions* (CRC Press, Boca Raton, 2014).

17. O. A. Averkova, V. Yu. Zorya, I. N. Logachev, and K. I. Logachev, "Numerical Simulation of Air Currents at the Inlet to Slot Leaks of Ventilation Shelters," *Refr. Indust. Ceram.* **51** (3), 177–182 (2010).

18. N. M. Anzheurov and O. A. Averkova, "Software for Computing Dusty Air Flows in Ventilation Systems," *Refr. Indust. Ceram.* **49** (3), 229–234 (2008).