УДК 517.96

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Ю. П. Горьков[1]

Построено асимптотическое разложение решения первой краевой задачи для модельного уравнения броуновского движения.

Ключевые слова: броуновское движение, краевая задача, асимптотическое разложение, принцип максимума.

Пусть $u_\varepsilon(x,y)$ — решение следующей задачи:

$$\varepsilon^3 u_{yy} - y u_x = 0, \quad 0 < x < 1, \quad -1 < y < 1; \tag{1}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \quad u(1,y) = \psi(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 1; \tag{2}$$

$$u(x,1) = 0, \quad u(x,-1) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

Пусть $\varphi(y)$, $\psi(-y)$ — бесконечно дифференцируемые функции при $0 \leqslant y \leqslant 1$; $\varphi(1) = 0$, $\psi(-1) = 0$; ε — положительный малый параметр.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию, непрерывную при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, имеющую непрерывные при $0 < x < 1$, $-1 < y < 1$ производные, входящие в уравнение (1), удовлетворяющую уравнению при этих значениях x, y и удовлетворяющую условиям (2) и (3).

Существование решения задачи (1)–(3) нетрудно доказать, если воспользоваться методом последовательных приближений и представлениями решений задач (4.60), (4.61) из [1] и (1), (2) из [2]. Можно получить представление решения первой краевой задачи в полосе $\{x, y\colon -\infty < x < \infty,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, пользуясь формулой (4.62) из [1]. Для доказательства сходимости производных приближенных решений можно воспользоваться априорными оценками решений, полученными в работе [3].

Цель настоящей работы — построение асимптотического разложения функции $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$ в окрестности отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$$D = \{x, y\colon 0 < x < 1,\ -1 < y < 1\},$$

$$\Gamma = \{x, y\colon x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = 1;\ x = 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 0;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y = -1\},$$

$$H = \{x, y\colon 0 < x < 1,\ -\infty < y < \infty\},$$

$$l = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad l_\varepsilon = \varepsilon^3\,\frac{\partial^2}{\partial y^2} - y\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

1. Построение внешнего разложения. Асимптотические разложения функции $u_\varepsilon(x,y)$ в областях $\{x, y\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < y < 1\}$ и $\{x, y\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 < y < 0\}$ будем искать в следующем виде (соответственно):

$$u_0^+(x,y) + \varepsilon^3 u_3^+(x,y) + \dots + \varepsilon^{3k} u_{3k}^+(x,y) + \cdots, \tag{4}$$

$$u_0^-(x,y) + \varepsilon^3 u_3^-(x,y) + \dots + \varepsilon^{3k} u_{3k}^-(x,y) + \cdots. \tag{5}$$

Подставляя ряды (4), (5) в уравнение (1) и в равенства (2), приравнивая коэффициенты в левых и правых частях равенств при одинаковых степенях ε, получим систему уравнений для функций $u_{3k}^\pm$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$:

$$y\,\frac{\partial}{\partial x}\,u_0^\pm = 0, \quad y\,\frac{\partial}{\partial x}\,u_{3k}^\pm = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,u_{3k-3}^\pm; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &u_0^+(0,y) = \varphi(y), \quad u_{3k}^+(0,y) = 0, \quad 0 < y < 1;\\ &u_0^-(1,y) = \psi(y), \quad u_{3k}^-(1,y) = 0, \quad -1 < y < 0. \end{aligned} \tag{7}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

Решения систем (6), (7) находятся явно:

$$u_{3k}^{+} = \left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^k \varphi(y)\,\frac{x^k}{k!}, \quad u_{3k}^{-} = \left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^k \psi(y)\,\frac{(1-x)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{8}$$

Другое представление функций $u_{3k}^{\pm}$ такое ($k = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} u_0^{+} &= \varphi(y), \quad u_{3k}^{+} = \frac{F_k^{+}(y)}{y^{3k-2}}\,x^k; \\ u_0^{-} &= \psi(y), \quad u_{3k}^{-} = \frac{F_k^{-}(y)}{y^{3k-2}}\,(1-x)^k. \end{aligned} \tag{8$'$}$$

Здесь $F_k^{\pm}(y)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции при $y \in [0, 1]$ и $y \in [-1, 0]$ соответственно. Ниже формальные ряды (4), (5) будем обозначать $U^{+}(y, \varepsilon)$ и $U^{-}(y, \varepsilon)$, также соответственно. Частные суммы рядов (4), (5) будем обозначать $A_{3n,y}U^{\pm}(y, \varepsilon)$:

$$A_{3n,y}U^{\pm}(y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^{3k} u_{3k}^{\pm}(x, y).$$

Нетрудно проверить, что

$$l_\varepsilon \Big[A_{3n,y}U^{\pm}(y, \varepsilon) \Big] = \varepsilon^{3n+3}\,\frac{d^2}{dy^2}\,u_{3n}^{\pm}. \tag{9}$$

Из равенств (8$'$), (9) следует, что при $y > \varepsilon^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, справедлива оценка

$$l_\varepsilon \Big[A_{3n,y}U^{\pm}(y, \varepsilon) \Big] = O\left(\varepsilon^{3n(1-\alpha)+3+2\alpha}\right). \tag{10}$$

2. Построение внутреннего разложения. В окрестности отрезка $x \in [0, 1]$, $y = 0$ асимптотическое разложение функции $u_\varepsilon(x, y)$ будем искать в виде ряда

$$V_0(x, \eta) + \varepsilon\,V_1(x, \eta) + \dots + \varepsilon^k V_k(x, \eta) + \cdots , \tag{11}$$

где $\eta = \dfrac{y}{\varepsilon}$. Подставляя ряд (11) в уравнение (1), записанное в переменных x, η, получим систему уравнений для функций $V_k(x, \eta)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\,V_k - \eta\,\frac{\partial}{\partial x}\,V_k = 0, \quad (x, \eta) \in H, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{12}$$

Естественно положить

$$V_k(0, \eta) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,\eta^k, \quad \eta > 0; \quad V_k(1, \eta) = \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}\,\eta^k, \quad \eta < 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{13}$$

Существование решения системы (12), (13) вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *В классе функций, растущих при $\eta \to \pm\infty$ не быстрее некоторой степени $|\eta|$, существует единственное решение задачи*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \eta\,\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x, \eta) \in H; \tag{14}$$

$$w(0, \eta) = c\,\eta^k, \quad \eta \geqslant 0; \quad w(1, \eta) = d\,\eta^k, \quad \eta \leqslant 0. \tag{15}$$

Функция $w(x, \eta)$ имеет следующую асимптотику:

$$w(x, \eta) = c \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j \eta^k\,\frac{x^j}{j!}, \quad \eta \to \infty; \tag{16}$$

$$w(x, \eta) = d \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j \eta^k\,\frac{(1-x)^j}{j!}, \quad \eta \to -\infty. \tag{17}$$

Асимптотические разложения (16), (17) *допускают дифференцирование по* x, η *любое число раз.*

Доказательство. Имеем:

$$l\left\{c\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j\eta^k\,\frac{x^j}{j!}\right\}=\frac{d^2}{d\eta^2}\,c\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^N\eta^k\,\frac{x^N}{N!}\,; \tag{18}$$

$$\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^n\eta^k=\prod_{j=1}^{n}(k-3j+3)\,(k-3j+2)\,\eta^{k-3n}.$$

Пусть $\mu(\eta)$ — функция, такая, что $\mu(\eta)\equiv 0$ при $\eta\in[-1,1]$, $\mu(\eta)\equiv 1$ при $|\eta|\geqslant 2$ и $\mu\in C^\infty(-\infty,\infty)$; пусть

$$w_N(x,\eta)=\begin{cases} c\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j\eta^k\,\frac{x^j}{j!}\,\mu(\eta), & \eta\geqslant 0;\\ d\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j\eta^k\,\frac{(1-x)^j}{j!}\,\mu(\eta), & \eta\leqslant 0.\end{cases}$$

Из равенства (18) следует оценка

$$l\,w_N=O\left(\eta^{k-3N-2}\right),\quad \eta\to\infty,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{19}$$

Естественно,

$$l\,w_N=O\left(\eta^{k-3N-2}\right),\quad \eta\to-\infty,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{20}$$

Учитывая оценки (19), (20), построим функцию $F_N(x,\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$F_N\in C^\infty(\mathbb{R}_2);\quad F_N\equiv 0\ \text{ при }\ |x|\geqslant 2,\quad -\infty<\eta<\infty;$$
$$F_N=l\,w_N\ \text{ при }\ (x,\eta)\in H;\quad F_N=O\left(\eta^{k-3N-2}\right)\ \text{ при }\ |\eta|\to\infty.$$

Положим

$$\omega_N=\iint\limits_{\mathbb{R}_2}\Phi(x,\eta,\xi,y)\,F_N(\xi,y)\,d\xi\,dy,$$

где

$$\Phi(x,\eta,\xi,y)=-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{1}{t^2}\exp\left\{-\frac{(\eta-y)^2}{4t}-\frac{3}{t^3}\left(x-\xi-0.5(\eta+y)\,t\right)^2\right\}dt,$$

и

$$u_N=\int\limits_0^\infty\gamma\Big\{\varphi(\gamma)\left[1-\mu(\gamma)\right]+\omega_N(0,\gamma)\Big\}\,G(x,\eta,0,\gamma)\,d\gamma-\int\limits_{-\infty}^0\gamma\Big\{\psi(\gamma)\left[1-\mu(\gamma)\right]+\omega_N(1,\gamma)\Big\}\,G(x,\eta,1,\gamma)\,d\gamma,$$

где $G(x,\eta,\xi,y)$ — функция Грина [2] задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\,G-\eta\,\frac{\partial}{\partial x}\,G=\delta(x-\xi)\,\delta(\eta-y),\quad (x,\eta)\in H,\quad (\xi,y)\in H;$$
$$G(0,\eta,\xi,y)=0,\quad \eta\geqslant 0;\quad G(1,\eta,\xi,y)=0,\quad \eta\leqslant 0.$$

Функция $w=w_N-\omega_N+u_N$ удовлетворяет уравнению (14) и условиям (15). При этом $w\in C^\infty[H]$ и $w\in C[\,\overline{H}\,]$.

Докажем единственность решения задачи (14), (15). Пусть существуют два решения $w_1(x,\eta)$ и $w_2(x,\eta)$. Тогда их разность $w^*(x,\eta)$ удовлетворяет однородному уравнению и принимает нулевые граничные значения. Пусть $|w^*|\leqslant M\,(1+\eta^{2m})$ при $(x,\eta)\in\overline{H}$. Фиксируем положительное число n. Пусть N и C — постоянные, при которых выполняются условия

$$l\left[\varepsilon\eta^{2m+2}(x+1)+\frac{C\,(x+1)}{\eta^n}\right]\leqslant 0\quad\text{ при }\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad \eta>N;$$
$$\varepsilon N^{2m+2}(x+1)+\frac{C\,(x+1)}{N^n}\pm w^*(x,N)\geqslant 0,\quad \varepsilon\eta^{2m+2}+\frac{C}{\eta^n}\geqslant 0,\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.$$

В силу принципа максимума, примененного к функции

$$\varepsilon\eta^{2m+2}(x+1)+\frac{C\,(x+1)}{\eta^n}\pm w^*,$$

получим оценку

$$|w^*|\leqslant \varepsilon\eta^{2m+2}(x+1)+\frac{C\,(x+1)}{\eta^n},\quad \eta\geqslant N,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{21}$$

Из оценки (21) вытекает, что $w^*(x,\eta)$ стремится к нулю при $\eta\to\infty$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Аналогично доказывается, что $w^*(x,\eta)$ стремится к нулю при $\eta\to-\infty$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Применяя к функции w^* явное представление решения задачи, получим, что $w^*\equiv 0$.

Справедливость утверждения о возможности дифференцирования рядов (16), (17) вытекает из следующего замечания.

Пусть $w(x,\eta)$ — достаточно гладкая функция в области $0\leqslant x\leqslant 1$, $\eta\geqslant\eta_0>0$, удовлетворяющая уравнению (14) и условию $w(0,\eta)=O(\eta^{-m})$ при $\eta\to\infty$ и $m>0$. Тогда $w(x,\eta)=O(\eta^{-m})$ при $\eta\to\infty$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству единственности решения задачи (14), (15).

Из леммы 1 следует существование и единственность решения системы уравнений (12), (13). Функции $V_k(x,\eta)$ имеют на бесконечности асимптотику (16), (17) с заменой c на $\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ и d на $\dfrac{\psi^{(k)}(0)}{k!}$.

В дальнейшем формальный ряд (11) будем обозначать $V(\eta,\varepsilon)$. Применительно к $V(\eta,\varepsilon)$ выражение $A_{n,\eta}V(\eta,\varepsilon)$ означает частную сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon^kV_k(x,\eta)$. Очевидно, что

$$l_\varepsilon\Big[A_{n,\eta}V(\eta,\varepsilon)\Big]=\left(\varepsilon^3\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\,\frac{\partial}{\partial x}\right)A_{n,\eta}V(\eta,\varepsilon)=\left(\varepsilon\,\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}-\varepsilon\eta\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^kV_k(x,\eta)\equiv 0.$$

Докажем теперь несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *Пусть $u\in C[\,\overline{D}\,]$, $u_{yy}\in C[D]$, $u_x\in C[D]$ и пусть $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению*

$$\varepsilon^3\,u_{yy}-y\,u_x=f(x,y).$$

Тогда справедлива оценка

$$\big|u(x,y)\big|\leqslant M\left\{\max_{\Gamma}\big|u(x,y)\big|+\frac{1}{2\varepsilon^3}\,\sup_{D}\big|f(x,y)\big|\right\}, \tag{22}$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство. Положим $u=(2-y^2)\,z$. Имеем:

$$\varepsilon^3\left[(2-y^2)\,z_{yy}-2y\,z_y-2z\right]-y\,(2-y^2)\,z_x=f,\quad z\big|_\Gamma=\frac{u}{2-y^2}\Big|_\Gamma.$$

Из принципа максимума для функции z следует, что

$$|z|\leqslant\max_{\Gamma}|z|+\frac{1}{2\varepsilon^3}\,\sup_{D}\big|f(x,y)\big|. \tag{23}$$

Из оценки (23) вытекает оценка (22).

Лемма 3. *Решение $u_\varepsilon(x,y)$ задачи (1)–(3) разлагается при $\varepsilon\to 0$ в асимптотический ряд*

$$u_\varepsilon(x,y)=\varphi(y)+\varepsilon x\,\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\,\varphi(y)+\frac{\varepsilon^2x^2}{2!}\left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^2\varphi(y)+\cdots,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0<y<1. \tag{24}$$

Доказательство. Предварительно докажем существование решения следующей задачи:

$$\varepsilon^3V_{yy}-yV_x=0,\quad (x,y)\in P; \tag{25}$$

$$V(0,y)=\varphi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1;\quad \lim_{x\to 1-0}V(x,y)=\psi(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 0; \tag{26}$$

$$V(x,1)=0,\quad 0\leqslant x<\infty;\quad V(x,-1)=0,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{27}$$

где $P = \Big\{(x, y)\colon\ [0 < x < \infty,\ -1 < y < 1] \setminus [x = 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 0]\Big\}$.

Пусть $\gamma(y) = u_\varepsilon(1, y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$. Обозначим через $V_N(x, y)$ функцию, удовлетворяющую в области $\{1 < x < N;\ -1 < y < 1\}$ уравнению (25) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} &V_N(1, y) = \gamma(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;\ V_N(N, y) = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 0;\\ &V_N(x, 1) = 0, \qquad 1 \leqslant x \leqslant N; V_N(x, -1) = 0, \quad 1 \leqslant x \leqslant N. \end{aligned}$$

Очевидно, функция $V_N(x, y)$ является гладким продолжением функции $u_\varepsilon(x, y)$ в область $1 < x < N$, $-1 < y < 1$ через отрезок $x = 0$, $y \in [0, 1]$.

В силу принципа максимума имеем

$$\big|V_N(x, y)\big| \leqslant \max_{0\leqslant y\leqslant 1} \big|\gamma(y)\big| \leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\big|\varphi(y)\big|,\ \max_{-1\leqslant y\leqslant 0}\big|\psi(y)\big|\right\}. \tag{28}$$

Вследствие внутренних априорных оценок для решения рассматриваемой задачи [3] и в силу граничных априорных оценок для параболического уравнения [4], функция $V_N(x, y)$ стремится при $N \to \infty$ к некоторой функции $V(x, y)$. Согласно лемме 3 из [2], последняя является непрерывной в точке $(1, 0)$. Следовательно, $V(x, y)$ есть гладкое продолжение функции $u_\varepsilon(x, y)$ в область $1 < x < \infty$, $-1 < y < 1$. Из оценки (28) следует оценка для функции $V(x, y)$ — решения задачи (25)–(27):

$$\big|V(x, y)\big| \leqslant \max\left\{\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\big|\varphi(y)\big|,\ \max_{-1\leqslant y\leqslant 0}\big|\psi(y)\big|\right\}. \tag{29}$$

В уравнении (25) перейдем к новой переменной $\xi = \varepsilon^3 x$. Уравнение примет вид

$$V^*_{yy} - y\, V^*_\xi = 0. \tag{30}$$

Зависимость функции $V^*(\xi, y)$ от параметра ε сохранится в силу граничного условия $V^*(\varepsilon, y) = \psi(y)$. Пусть $\varphi_1(y) = \varphi(y)$ при $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $\varphi_1(y) = 0$ при $y > 1$. Функция

$$\omega(\xi, y) = \int\limits_0^\infty \gamma\varphi_1(\gamma)\, G(\xi, y, \gamma)\, d\gamma, \quad \xi > 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

где

$$\begin{aligned} G(\xi, y, \gamma) &= -\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\tau^{3/2}}{\tau^3 + 1}\, \Phi(0, -\tau\gamma, \xi, y)\, d\tau + \Phi(0, \gamma, \xi, y),\\ \Phi(0, \gamma, \xi, y) &= -\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t^2}\, \exp\left\{-\frac{(\gamma - y)^2}{4t} - \frac{3}{t^3}\big(-\xi - 0.5(\gamma + y)\, t\big)^2\right\} dt, \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению (30) при $\xi > 0$, $-\infty < y < \infty$ и условию $\omega(0, y) = \varphi_1(y)$ при $y \geqslant 0$ (см. [2]).

Функцию $Z(\xi, y) = V^*(\xi, y) - \omega(\xi, y)$ можно рассматривать как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} &Z_{yy} - yZ_\xi = 0, \quad -1 < \xi < \infty, \quad 0 < y < 1;\\ &Z(-1, y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1;\\ &Z(\xi, 1) = V^*(\xi, 1) - \omega(\xi, 1) \quad \text{при} \quad \xi > 0, \quad Z(\xi, 1) = 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 0;\\ &Z(\xi, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 0, \quad Z(\xi, 0) = V^*(\xi, 0) - \omega(\xi, 0) \quad \text{при} \quad \xi > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\big|\omega(\xi, y)\big| \leqslant \max\limits_{0\leqslant y<\infty}\big|\varphi_1(y)\big|$, то, в силу принципа максимума, примененного к функции $Z(\xi, y)$, справедлива оценка $\big|Z(\xi, y)\big| \leqslant M$, где M — некоторая постоянная, зависящая от величин $\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1}\big|\varphi(y)\big|$ и $\max\limits_{-1\leqslant y\leqslant 0}\big|\psi(y)\big|$. Следовательно, в области $0 \leqslant \xi \leqslant \delta$, $\delta \leqslant y \leqslant 1-\delta$, $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\, Z\right| \leqslant M_1, \tag{31}$$

где M_1 — некоторая постоянная, зависящая от предыдущей постоянной M и натурального числа n. Из оценки (31) следует асимптотическое разложение (24).

3. Построение составного разложения[2]. Применяя оператор $A_{m,\eta}$ к функции $A_{3n,y}U^+$, получим

$$\begin{aligned} A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ &= A_{m,\eta}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{3k}\left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^k\varphi(y)\,\frac{x^k}{k!} = A_{m,\eta}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^k\varphi(\varepsilon\eta)\,\frac{x^k}{k!} = \\ &= A_{m,\eta}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^k\sum_{j=0}^{\infty}\varphi^{(j)}(0)(\varepsilon\eta)^j\,\frac{1}{j!}\,\frac{x^k}{k!} = \sum_{j=0}^{m}\varepsilon^j\,\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^k\eta^j\,\frac{x^k}{k!}. \end{aligned} \tag{32}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} A_{3n,y}A_{m,\eta}V &= A_{3n,y}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k V_k(x,\eta) = A_{3n,y}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\,\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j\eta^k\,\frac{x^j}{j!} = \\ &= A_{3n,y}\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\,\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon^3}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^j\frac{y^k}{\varepsilon^k}\,\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^{3j}\left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^j\frac{x^j}{j!}\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,y^k. \end{aligned} \tag{33}$$

Из представлений (32), (33) видно, что если в функции $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+$ перейти к переменной $y=\varepsilon\eta$, то получим функцию $A_{3n,y}A_{m,\eta}V$. Следовательно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ &= A_{3n,y}A_{m,\eta}V \quad \text{при} \quad \varepsilon\eta=y,\ y>0; \\ A_{m,\eta}A_{3n,y}U^- &= A_{3n,y}A_{m,\eta}V \quad \text{при} \quad \varepsilon\eta=y,\ y<0. \end{aligned}$$

Оценим разность функций $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+$ и $A_{3n,y}U^+$ при условии, что в первой из них $\varepsilon\eta=y$. Имеем:

$$\begin{aligned} &\left|A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+\right| = \\ &= \left|\sum_{j=0}^{m}\varphi^{(j)}(0)\,\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{3k}\left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^k y^j\,\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{3k}\left[\frac{1}{y}\,\frac{d^2}{dy^2}\right]^k\frac{x^k}{k!}\left\{\sum_{j=0}^{m}\varphi^{(j)}(0)\,\frac{y^j}{j!} + R_m(y)\right\}\right| \leqslant \\ &\leqslant M y^{m+1}\left(1+\varepsilon^{3n}y^{-3n}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

В этих неравенствах $R_m(y)$ — остаточный член в разложении Тейлора функции $\varphi(y)$, а M — некоторая постоянная, не зависящая от ε. При том же условии на y и η справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\left|A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V\right| = \\ &= \left|\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{1}{\eta}\,\frac{d^2}{d\eta^2}\right]^j\frac{x^j}{j!}\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,(\varepsilon\eta)^k - \sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k V_k(x,\eta)\right| \leqslant M_1\eta^{-3n-3}\left\{1+(\varepsilon\eta)^m\right\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Справедливы также следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+\right\}\right| \leqslant M_2|y|^{m+2}\left(1+\varepsilon^{3n}y^{-3n}\right); \\ &\left|y\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{A_{m,\eta}A_{3n,y}U^+ - A_{3n,y}U^+\right\}\right| \leqslant M_3|y|^{m+2}\left(1+\varepsilon^{3n}y^{-3n}\right); \\ &\left|\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left\{A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V\right\}\right| \leqslant M_4|\eta|^{-3n-5}\left(1+\varepsilon^m\eta^m\right); \\ &\left|\eta\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{A_{3n,y}A_{m,\eta}V - A_{m,\eta}V\right\}\right| \leqslant M_5|\eta|^{-3n-2}\left(1+\varepsilon^m\eta^m\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Аналогичные оценки верны для разности $A_{m,\eta}A_{3n,y}U^- - A_{3n,y}U^-$ и ее производных.

Определим функцию

$$u_N(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} A_{3N,y}U^+ + A_{3N,\eta}V - A_{3N,\eta}A_{3N,y}U^+, & y>0; \\ A_{3N,y}U^- + A_{3N,\eta}V - A_{3N,\eta}A_{3N,y}U^-, & y<0. \end{cases}$$

[2] Метод построения составного разложения решений сингулярных задач разработан в монографии [5].

Из оценок (34) – (36) следует, что функция $u_N(x, y, \varepsilon)$ является непрерывной в окрестности отрезка $x \in [0, 1]$, $y = 0$. Непрерывной также является функция $l_\varepsilon u_N$.

Теорема. *Пусть α, β — числа, такие, что $0 < \beta < \alpha < 1$. Ряды (4), (5) являются равномерным асимптотическим разложением функции $u_\varepsilon(x, y)$ в областях $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \varepsilon^\alpha \leqslant y \leqslant 1/2\}$ и $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1/2 \leqslant y \leqslant -\varepsilon^\alpha\}$ соответственно. Ряд (11) является равномерным асимптотическим разложением функции $u_\varepsilon(x, y)$ в области $\{(x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -\varepsilon^\beta \leqslant y \leqslant \varepsilon^\beta\}$.*

Доказательство. Согласно оценкам (10) и (36), имеем:

$$\big|u_\varepsilon(q, y) - u_N(q, y, \varepsilon)\big| \leqslant M\left\{\varepsilon^{(3N+3)(1-\alpha)} + \varepsilon^{3N+3(1-\alpha)}\right\}, \quad q = 0, 1, \quad \varepsilon^\alpha \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{2};$$

$$\big|u_\varepsilon(q, y) - u_N(q, y, \varepsilon)\big| \leqslant M\left\{\varepsilon^{(3N+1)\beta} + \varepsilon^{3N+\beta}\right\}, \quad q = 0, 1, \quad |y| \leqslant \varepsilon^\beta;$$

$$\big|l_\varepsilon u_N\big| \leqslant M\left\{\varepsilon^{3N(1-\alpha)+3+2\alpha} + \varepsilon^{3N(1-\alpha)+5(1-\alpha)-2} + \varepsilon^{3N+5(1-\alpha)}\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varepsilon^\alpha \leqslant |y| \leqslant \frac{1}{2};$$

$$\big|l\, u_N\big| \leqslant M\left\{\varepsilon^{(3N+2)\beta} + \varepsilon^{3N+2\beta}\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad |y| \leqslant \varepsilon^\beta.$$

Из этих оценок и леммы 1 следует справедливость утверждений теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pagani C.* On the parabolic equation $\mathrm{sgn}(x)\,|x|^p u_y - u_{xx} = 0$ and a related one // Annali di matematica pura ed applicata. 1974. **IV**, N IC. 333–399.
2. *Горьков Ю.П.* Решение первой краевой задачи для уравнения броуновского движения // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: Изд-во МГУ, 1998. 115–123.
3. *Шатыро Я.И.* Внутренние оценки для решений одного класса ультрапараболических уравнений // Матем. записки Уральского университета. 1970. **7**, № 4. 131–154.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
5. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию
12.11.2002