

УДК 519.633.9

МНОГОСЕТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ В ЗАДАЧЕ ВЕЕРНОЙ ROI-ТОМОГРАФИИ КОНТРАСТНЫХ ОБЪЕКТОВ

И. Ю. Кулаков¹, Д. А. Вологин¹, В. В. Пикалов²

Для решения задач двумерной томографии высокого разрешения для выделенных областей (Region of Interest, ROI) разработан многосеточный алгоритм MG-ART (Multigrid ART), который осуществляет томографическую реконструкцию за несколько итераций во вложенных областях. В настоящей статье изучены: скорость сходимости алгоритма, достигаемая точность реконструкции и достигаемая экономия времени счета. Область применения разработанного многосеточного алгебраического алгоритма веерной томографии относится, в первую очередь, к сложным геометриям регистрации проекционных данных, как это имеет место, например, в экспериментах по сейсмической томографии или в задачах промышленной томографии с ограниченным углом обзора. Работа проводилась при частичной поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 14 “Обратные задачи и их приложения: теория, алгоритмы, программы” (2012–2014 гг.).

Ключевые слова: ROI-томография, веерная томография, итерационные алгоритмы, многосеточные алгоритмы.

1. Введение. Алгоритмы вычислительной томографии в настоящее время представляют собой достаточно развитую область вычислительной математики [1–3]. Прогресс в реализации разнообразных технических решений для проведения томографического эксперимента в физических, геофизических, медицинских и биологических исследованиях часто приводит к необходимости модификаций существующих алгоритмов либо к созданию новых подходов.

Одним из таких новых требований к алгоритмам является получение приближенной оценки решения томографической задачи с максимальным разрешением в выделенной области интереса (Region of Interest, ROI) [4–8]. Акцент лишь на небольшой части исследуемого объекта может диктоваться как особенностями исследуемой проблемы, так и представлять собой компромисс между желаемым высоким разрешением получаемого изображения и минимизацией дозы облучения, например, в медицинской рентгеновской томографии. Так, в случае построения 4D изображений отдельного органа в теле человека важно уметь производить расчеты быстро и с достаточно высоким качеством, при этом качество изображений во внешних областях может быть существенно ниже. В этом смысле алгоритм, предлагаемый в данном исследовании, представляет интерес для решения таких задач.

Разрешающая способность томографического алгоритма, как известно, зависит от числа K имеющихся направлений регистрации проекционных данных, а также от числа отсчетов Np на каждом направлении [2]. Существенное влияние на качество получаемых томограмм имеет и уровень шумов в экспериментальных данных, однако это отдельная проблема, для ее решения предложено много способов фильтрации шума, и в данной работе, в случае необходимости, они также применялись [2, 9]. Поскольку в алгебраических методах томографии время работы алгоритма является критической величиной, то проведение реконструкции на полном наборе данных с высоким (максимально возможным) разрешением требует значительного времени вычислений. Конечно, это время можно уменьшить с использованием быстрых алгоритмов, таких как фурье-синтеза или стандартного обратного проецирования фильтрованных проекций (ФОП) [3]. Однако такие методы хорошо развиты лишь для небольшого числа геометрий сбора экспериментальных данных, например для параллельных или веерных наборов лучей просвечивания объектов [1–4, 10], и не подходят для большого числа приложений в физической и сейсмической томографии, когда расположение лучей измерения проекционных данных является сильно нерегулярным [11–13].

¹ Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (ИНГГ СО РАН), просп. Коптюга, 3, 630090, Новосибирск; И. Ю. Кулаков, заведующий лабораторией, e-mail: ivan.science@gmail.com; Д. А. Вологин, инженер, e-mail: ivan.science@gmail.com

² Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН (ИТПМ СО РАН), ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; гл. науч. сотр., e-mail: pickalov@itam.nsc.ru

2. Алгоритм ART и его многосеточное обобщение. Как известно, алгоритм алгебраической реконструкции (Algebraic Reconstruction Technique, ART) представляет собой итерационный процесс, в котором на каждом шаге выполняются следующие три операции:

- 1) для выбранного луча решается прямая задача лучевой трассировки по томограмме, восстановленной на предыдущей итерации;
- 2) вычисляется невязка — разница между результатом трассировки и измеренной проекцией на заданном луче;
- 3) невязка подвергается обратному проецированию на изображение для получения новой оценки томограммы.

В результате перебора всех известных лучей получается одна глобальная итерация. Глобальный итерационный процесс может быть остановлен по нескольким критериям, например по малости изменения нормы невязки на очередной итерации либо по достижении нормы невязки величины нормы случайного шума проекционных данных.

При выполнении томографической инверсии для решения системы линейных уравнений (СЛАУ) используется алгоритм LSQR (Least Squares with QR-factorization) [11, 14]. Достоинство этого метода состоит в том, что он не требует хранения в памяти полной разреженной матрицы, а задействует только ненулевые элементы строк матриц. Помимо уравнений, описывающих лучи, в матрицу добавляются дополнительные уравнения, которые позволяют контролировать гладкость решения. Каждое из этих уравнений включает в себя два ненулевых элемента с равными значениями и противоположными знаками, соответствующих соседним ячейкам расчетной сетки (вверх, вправо и по диагонали). Вектор данных для этих дополнительных уравнений имеет нулевое значение. Величина сглаживания модели, определяемая этим блоком, задается методом проб и ошибок путем анализа устойчивости получаемого решения.

Данный алгоритм весьма эффективен для решения задач лучевой томографии большой размерности и активно используется, например в задачах сейсмической томографии. Вместе с тем, в некоторых практических приложениях, требующих использования слишком большого количества параметров и лучей, реализация алгебраического подхода приводит к чрезмерно объемным вычислениям и задействованию большого объема оперативной памяти. Уменьшение времени вычислений возможно при реконструкции на неполном наборе данных, когда используются только проекционные лучи, проходящие через ROI-область. Для проведения двумерной томографии высокого разрешения при скромных компьютерных ресурсах был разработан алгоритм MG-ART (Multigrid ART), который осуществляет томографическую реконструкцию в несколько итераций во вложенных областях.

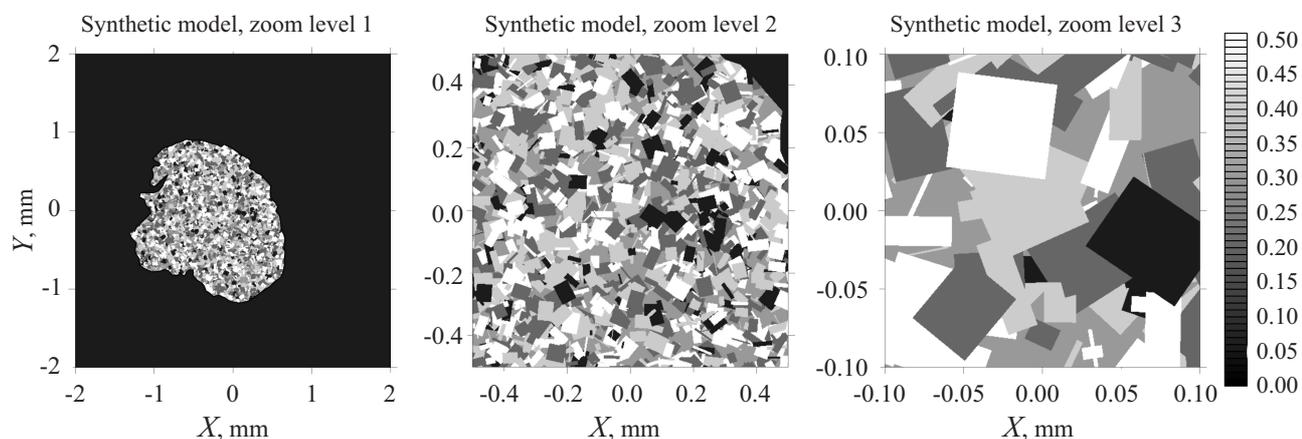


Рис. 1. Математическая модель на трех уровнях представления

На первом шаге проводится грубая реконструкция всей исследуемой области, причем при решении соответствующей СЛАУ используется очень малая часть имеющихся проекционных данных. На следующей итерации исследуемая область уменьшается, и в ней увеличивается плотность лучей. Трассируя лучи в грубой модели, полученной на первой итерации, вычисляем невязки проекций, которые используются для инверсии на второй итерации. Далее, уменьшая область наблюдения, можно добиться приближенного решения задачи в необходимой ROI-области. Предложенный алгоритм исследовался в вычислительном эксперименте, описание которого приводится ниже.

3. Численное моделирование. На рис. 1 приведен пример математической модели, которая отражает реалистичный эксперимент по просвечиванию образца горной породы (например, пористого пес-

чаника). В этой модели внутри образца задаются зерна с различным значением плотности в форме прямоугольников со случайными значениями высоты, ширины, положения в пространстве и угла поворота. Эти зерна определяются внутри замкнутого контура, описывающего внешнюю границу зерна. Внутри зерен задается случайным образом пять различных градаций плотности (0.05, 0.2, 0.3, 0.4 и 0.5). Фоновое значение плотности за пределами зерна равно 0.05.

Расчет проекционных данных производился путем интегрирования по прямым лучам с шагом интегрирования 0.0005, что заведомо меньше, чем размер зерен. Моделирование велось в веерной геометрии реально просвеченного в рентгеновском томографе образца со следующими характеристиками: расстояние от оси вращения до источника равно 25.865 мм; расстояние от оси вращения до детектора равно 321.915 мм; общее количество пикселей на детекторе равно 1000 при длине детектора, равной 45.92 мм; шаг по углу равен 0.4 градуса; количество проекций равно 426. Угловое положение источника характеризуется углом поворота β от оси OY , в каждом веере лучи характеризуются координатой s на линейке детекторов.

Задача состоит в достижении максимального разрешения в выделенной области внутри изучаемого образца. В нашем случае выделяется круговая область с центром в начале координат и диаметром 0.2 мм, что существенно меньше габаритов образца (примерно 1.5 мм). Важным усложняющим фактором является то, что при изучении выделенной области используются лучи, большая часть которых находится за пределами этой области. Поскольку в математической модели используются высококонтрастные зерна с различными размерами и интенсивностью, накопленная лучом информация о внешних объектах может оказаться более существенной по амплитуде, чем сигнал от искомым структур внутри ROI. Таким образом, задача алгоритма MG-ART состоит в выделении полезного сигнала от внутренних структур на фоне части сигнала, обусловленного внешними структурами.

Процедура восстановления заключается в последовательном выполнении инверсии в серии вложенных областей, при этом на каждом шаге используются только лучи, проходящие через текущую область. На первом шаге задействуется относительно небольшое количество лучей, на каждом последующем шаге их плотность увеличивается, как показано на рис. 2, с уменьшением радиуса расчетной области.

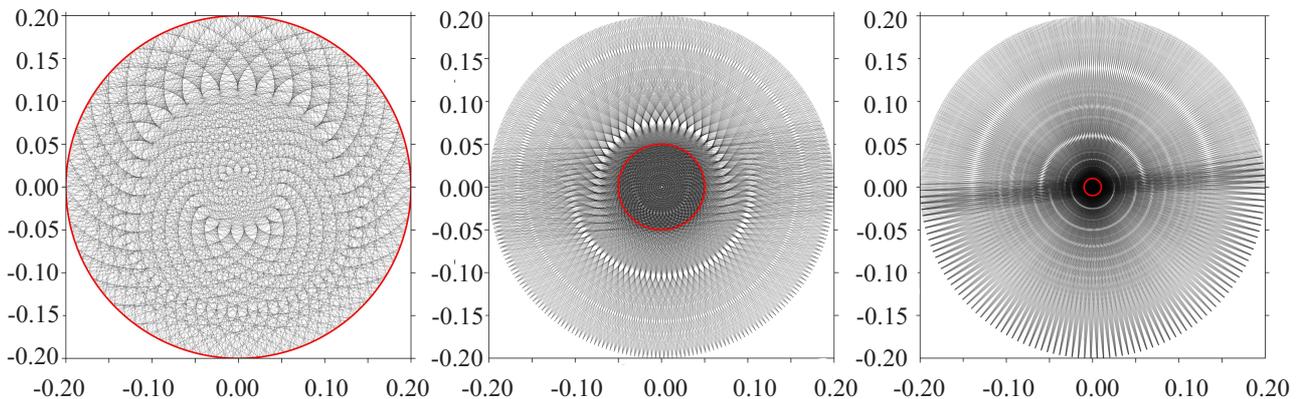


Рис. 2. Схемы выбора лучей для трех последовательных итераций. Окружность (сплошная линия) показывает изучаемую область на текущей итерации. Чтобы избежать чрезмерной плотности линий, на рисунках представлена только 1/20 часть от общего количества лучей

На первом шаге выполняется грубая инверсия для всей области (круг диаметром 4 мм) с шагом сетки 0.01 мм (125 656 пикселей и неизвестных констант внутри круговой области). При этом используется лишь малая часть имеющихся данных: 160 точек на детекторе и 76 углов просвечивания (12 160 лучей). Инверсия производится путем решения системы линейных уравнений методом LSQR [14].

На втором шаге инверсия производилась в круговой области диаметром 1 мм. При этом использовались только лучи, проходящие через эту область, как показано на второй схеме на рис. 2. Плотность данных в этом случае была несколько выше, чем на первой итерации. В этом случае использовано 22 230 лучей. Данные по лучам пересчитывались с учетом грубого решения, полученного на первой итерации. Шаг интегрирования составлял 0.005 мм, что в два раза меньше, чем размер пикселей, использованных для первой модели. На второй итерации размер пикселей томограммы составлял 0.0035 мм, что соответствует 64 284 пикселям.

На третьей итерации решение искалось для искомой области ROI диаметром 0.2 мм. В этом случае пересчет данных производился с учетом результатов двух предыдущих инверсий. Шаг интегрирования

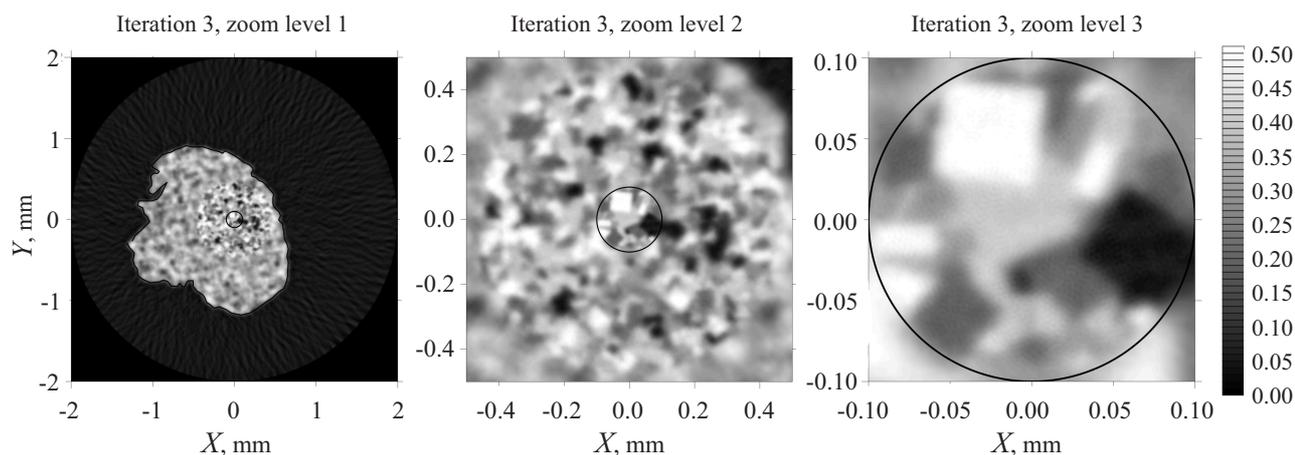


Рис. 3. Результат решения задачи ROI методом MG-ART для трех последовательных масштабов увеличения. Окружность показывает положение выделенной исследуемой области, для которой требуется получить максимальное разрешение

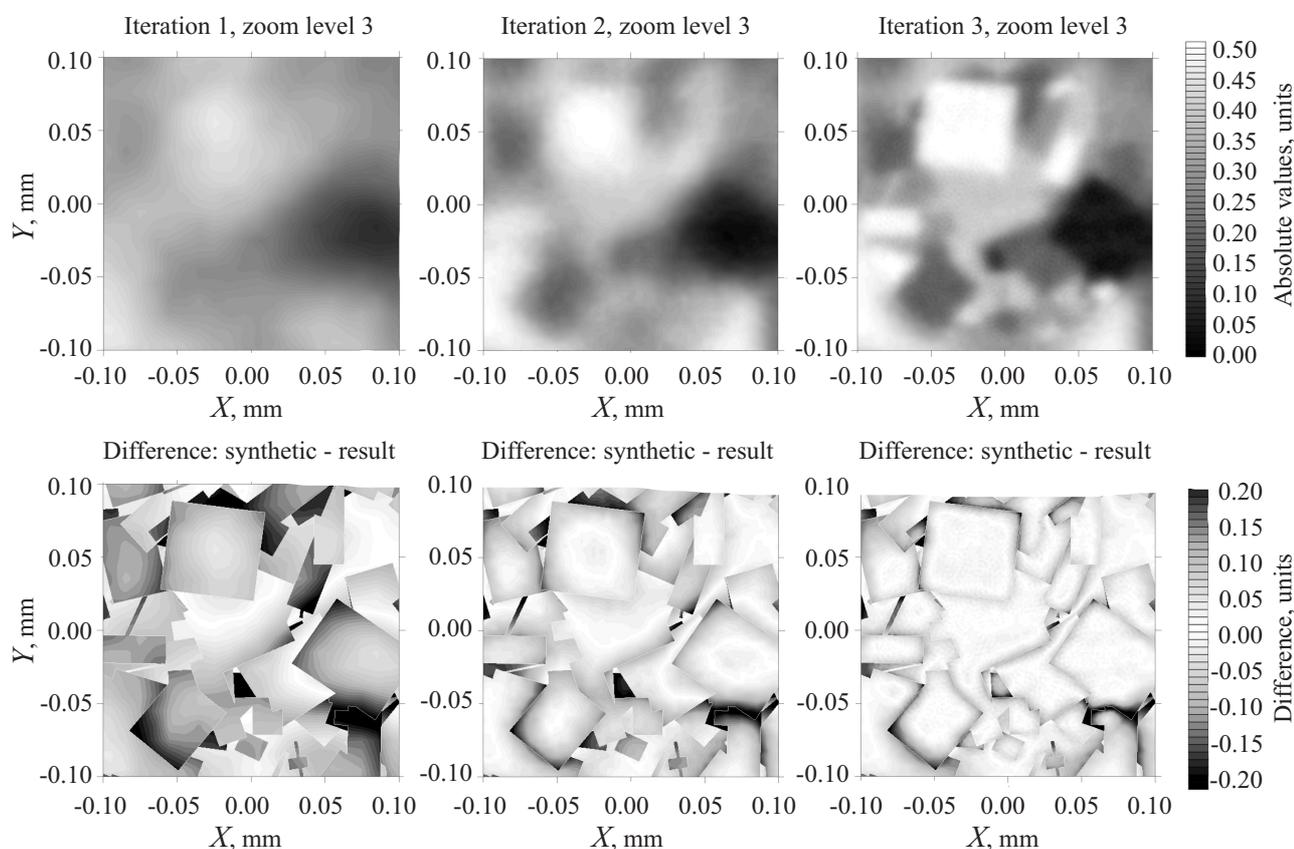


Рис. 4. Результаты восстановления модели в выделенной области на трех последовательных итерациях. Сверху — абсолютные значения плотности, снизу — разница между найденным распределением и истинной моделью

составлял 0.005 мм вне области, изучавшейся на втором шаге, и уменьшался до 0.002 мм внутри этой области. При этом использовалось 31 428 пикселей, что соответствует размеру пикселей 0.001 мм. В данном случае было использовано 28 025 лучей, проходящих через ROI.

Результат инверсии после третьей итерации показан на рис. 3 для трех последовательно увеличивающихся масштабов, соответствующих областям инверсии. На рис. 4 показаны результаты инверсии для изучаемого ROI-фрагмента, соответствующие трем итерациям (сверху). Кроме того, приведена разница между результатами восстановления и истинной математической моделью для выделенной области (снизу). Можно видеть, что в результате итерационной процедуры удалось существенно приблизить ре-

шение к точной модели: среднеквадратичная ошибка реконструкции модели для выделенной области на трех итерациях составляла 0.0083, 0.0055 и 0.0041. Для финальной томограммы основные несоответствия сосредоточены вокруг границ зерен, что обусловлено невозможностью восстановить резкие границы методом сглаженной томографической инверсии.

Для сравнения на рис. 5 показана реконструкция той же самой модели (см. рис. 4) методом ФОП с использованием полного набора проекционных данных в области радиуса 0.1 мм. В этом случае была выбрана следующая размерность проекционных данных: 1000 лучей в веере, 191 ракурс наблюдения в диапазоне 190 градусов, томограммы имеют размерность 1000×1000 пикселей. Радиусы областей реконструкции равны 2 мм, 0.5 мм и 0.1 мм. Вычисления выполнены с помощью пакета программ вычислительной томографии *Toras-Micro* [15].

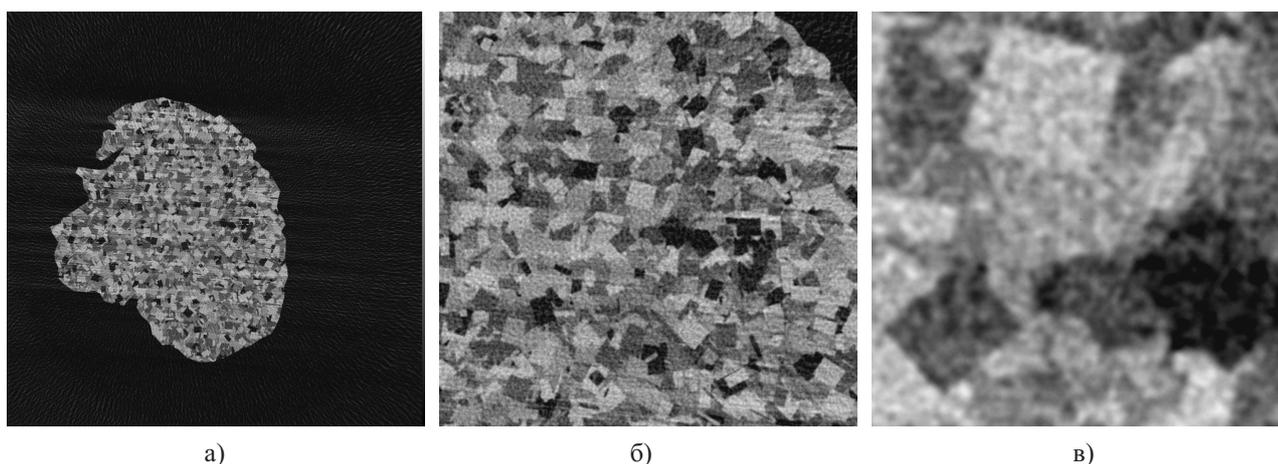


Рис. 5. Изображения восстановленных ROI-областей, алгоритм ФОП пакета *Toras-Micro*; а) радиус области равен 2 мм, б) радиус области равен 0.5 мм, в) радиус области равен 0.1 мм; время счета каждой томограммы — 9 сек, размерность томограмм — 1000×1000 пикселей

В случае применения алгоритма ФОП расчеты были выполнены несопоставимо быстрее, чем при использовании матричной инверсии. Так, расчет каждого из вариантов, показанных на рис. 5, не превышал 9 секунд, тогда как алгебраическая инверсия вместе с пересчетом данных между итерациями составляла несколько десятков минут. В то же время полученные методом ФОП результаты достаточно сильно осложнены высокочастотным шумом, который, по-видимому, вызван резкими структурами вне ROI. В случае алгебраической инверсии со сглаживанием во вложенных областях этот шум отсутствует.

4. Заключение. Необходимо вновь подчеркнуть, что область применения разработанного многосеточного алгебраического алгоритма веерной томографии относится, в первую очередь, к сложным геометриям регистрации проекционных данных, как это имеет место, например, в экспериментах по сейсмической томографии либо в задачах промышленной томографии с ограниченным углом обзора. В этом случае нет возможности использовать алгоритмы, основанные на формулах обращения интегрального преобразования Радона, поскольку нет необходимого в этом случае упорядочивания используемых просвечивающих лучей. Таким образом, представленный алгебраический подход может использоваться для произвольных конфигураций лучей, что делает его применимым для решения широкого круга задач.

Кроме того, отметим, что в настоящей статье не рассматривалось влияние шума, поскольку для алгоритмов ФОП вполне применимы обычные способы фильтрации томографических данных [2, 9, 10, 15], а для улучшения сходимости алгоритма и устранения раскачки решения в данной работе на каждой итерации алгоритма ML-ART использовалось сглаживание получаемой томограммы.

Сокращенная версия результатов данной работы доложена на молодежной школе по обратным задачам [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: Wiley, 1986.
2. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.
3. *Kak A.C., Slaney M.* Principles of computerized tomographic imaging. New York: IEEE Press, 1988.
4. *Natterer F., Wubbeling F.* Mathematical methods in image reconstruction. Philadelphia: SIAM, 2001.
5. *Ramm A.G., Katsevich A.I.* The Radon transform and local tomography. Boca Raton: CRC Press, 1996.

6. *Faridani A., Ritman E.L., Smith K.T.* Local tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. **52**, N 2. 459–484.
7. *Faridani A., Ritman E.L., Smith K.T.* Examples of local tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. **52**, N 4. 1193–1198.
8. *Chityala R., Hoffmann K.R., Bednarek D.R., Rudin S.* Region of interest (ROI) computed tomography // Proc. SPIE. 2004. Vol. 5368. San Diego, 2004. 534–541.
9. *Пикалов В.В., Непомнящий А.В.* Итерационный алгоритм с вэйвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // Вычислительные методы и программирование. 2003. **4**, № 1. 244–253.
10. *Бойко В.М., Оршич А.М., Павлов А.А., Пикалов В.В.* Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте. Новосибирск: НГУ, 2009.
11. *Нолет Г.* Сейсмическая томография. М.: Мир, 1990.
12. *Вишняков Г.Н., Левин Г.Г., Лихачев А.В., Пикалов В.В.* Фазовая томография трехмерных биологических микрообъектов: численное моделирование и экспериментальные результаты // Опт. спектр. 1999. **87**, № 3. 448–454.
13. *Zakharov Yu.P., Antonov V.M., Boyarintsev E.L., Melekhov A.V., Posukh V.G., Shaikhislamov I.F., Picalov V.V.* Role of the hall flute instability in the interaction of laser and space plasmas with a magnetic field // Plasma Physics Reports. 2006. **32**, N 3. 183–204.
14. *Paige C.C., Saunders M.A.* LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // ACM Trans. on Math. Software. 1982. **8**, N 1. 43–71.
15. *Пикалов В.В., Мельникова Т.С.* Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995.
16. *Кулаков И.Ю., Вологин Д.А., Пикалов В.В.* Многосеточный алгоритм в задаче верной ROI-томографии // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. V Международная молодежная научная школа-конференция (Новосибирск, Академгородок, 8–13 октября 2013 г.): тезисы докладов. Новосибирск, 2013. 56.

Поступила в редакцию
12.11.2013
