УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О РЕШЕНИИ

Е Чжан[1], Д. В. Лукьяненко[1], А. Г. Ягола[1]

Рассматриваются линейные некорректно поставленные задачи при наличии априорной информации о решении. С помощью метода расширяющихся компактов, принципа Лагранжа и теории оптимального восстановления функционала строится оптимальный регуляризирующий алгоритм для решения линейных некорректно поставленных задач с истокопредставимым решением и вычисляется соответствующая оптимальная апостериорная наихудшая оценка погрешности метода. Предлагается соответствующий численный метод, применение которого рассмотрено на примере решения уравнения теплопроводности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 11–01–00040, 12–01–00524 и 12–01–91153–ГФЕН_а).

Ключевые слова: некорректно поставленные задачи, регуляризирующие алгоритмы, оптимальное восстановление, принцип Лагранжа, параметр регуляризации.

1. Введение. Необходимость решать обратные задачи возникает при рассмотрении многих прикладных задач в науке и технике. Однако в большинстве таких задач решение зачастую является неустойчивым по отношению к ошибкам входных данных, т.е. такие задачи являются некорректно поставленными. Для их решения обычно строятся различные регуляризирующие алгоритмы. Однако в связи с тем, что выбранный регуляризирующий алгоритм не является единственно возможным, возникает вопрос выбора из множества таких алгоритмов оптимального в некотором смысле [1]. Например, во многих работах по регуляризирующим алгоритмам [2–4] построены так называемые оптимальные по порядку регуляризирующие алгоритмы. Среди этих алгоритмов выделяется узкий класс алгоритмов, которые имеют наименьшую погрешность на множествах корректности определенного вида. Это так называемые оптимальные регуляризирующие алгоритмы.

В настоящей статье на основе теории оптимального восстановления [5–8] предлагается метод построения оптимального регуляризирующего алгоритма для решения линейных некорректно поставленных задач при наличии некоторой априорной информации о решении.

2. Постановка задачи и метод решения. Пусть $X = [L_x, R_x]$ и $Y = [L_y, R_y]$, где L_i и R_i ($i = x, y$) определяют границы этих отрезков. Будем считать, что $Z := C(X)$ и $U := L_2(Y)$, а оператор A: $Z \to U$ — линейный непрерывный инъективный оператор. Будем также предполагать, что априорная информация $\widetilde{Z}$ о решении является некоторым ограниченным выпуклым и уравновешенным множеством в пространстве Z (подробную структуру множества $\widetilde{Z}$ мы рассмотрим ниже в разделе 3). Напомним, что множество $\mathcal{M}$ называется уравновешенным, если для всех $z \in \mathcal{M}$ верно, что $(-z) \in \mathcal{M}$.

Далее будем рассматривать следующее операторное уравнение:

$$Az = \bar{u}, \quad z \in \widetilde{Z}, \quad \bar{u} \in U. \tag{1}$$

Пусть вместо точно заданных оператора A и правой части $\bar{u}$ известны лишь такие их приближения $\{A_{h_A}, u_\delta\}$, что $\|A - A_{h_A}\|_{Z\to U} \leqslant h_A$ и $\|\bar{u} - u_\delta\|_U \leqslant \delta$. При дальнейшем изложении мы будем по умолчанию предполагать, что правая часть задана с погрешностью, даже если над символом u опущен символ δ.

Заметим, что для многих конкретных операторов A аналитическое решение z операторного уравнения (1) найти невозможно. Поэтому при решении прикладных задач соответствующее операторное уравнение (1) решается с использованием численных методов, т.е. в качестве решения задачи (1) мы ищем не саму функцию $z(x)$, а ее конечномерную аппроксимацию $\{z(x_k)\}_{k=1}^{K}$ (где K — число узлов сетки, на которой ищется неизвестная функция).

Сначала мы рассмотрим метод восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k (соответствующей узлу с номером k).

[1] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; Е Чжан, аспирант, e-mail: zhangye@physics.msu.ru; Д. В. Лукьяненко, ассистент, e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru; А. Г. Ягола, профессор, e-mail: yagola@physics.msu.ru

Определение 1. Методом восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k по информации $\widetilde{Z}$ назовем любой функционал $u^*\colon U \to \mathbb{R}^1$, а погрешностью восстановления с помощью метода u^* будем называть величину

$$\Delta_0(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon, u^*) := \sup_{\substack{z\in\widetilde{Z},\\ u\in U\colon \|A_{h_A}z-u\|\leqslant\varepsilon}} \big|z(x_k) - u^*(u)\big|, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \delta + h_A \cdot \sup_{z\in\widetilde{Z}} \|z\|_Z$.

Определение 2. Оптимальной погрешностью восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k назовем величину

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) := \inf_{u^*} \Delta_0(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon, u^*), \tag{3}$$

где точная нижняя грань берется по всем (не обязательно линейным) функционалам $u^*\colon U \to \mathbb{R}^1$. Функционал $\hat{u}^*$, на котором эта точная нижняя грань достигается, назовем оптимальным методом восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k.

Замечание. Очевидно, что оптимальный метод восстановления $\hat{u}^*$ зависит от точки x_k, априорной информации $\widetilde{Z}$, погрешности задачи ε и пространств Z, U.

Пусть $\hat{u}^*$ — произвольный оптимальный метод восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k для задачи (3), а u_δ — экспериментальные данные. Число $\hat{u}^*(u_\delta)$ будем назвать оптимальным приближением решения $z(x)$ в заданной точке x_k по результатам измерений u_δ. Остается вопрос: является ли метод $\hat{u}^*$ регуляризующим методом восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k? Иными словами, будет ли выполняться, что $|\hat{u}^*(u_\delta) - z(x_k)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$? Далее в разделе 7 мы дадим ответ на этот вопрос.

Теперь рассмотрим алгоритм поиска $\hat{u}^*$, т.е. оптимального метода восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k. Пусть U^* — пространство линейных непрерывных функционалов, которое является сопряженным пространством к пространству U. Так как $U \equiv L_2(Y)$ — гильбертово пространство, то из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала следует, что для всякого функционала $u^* \in U^*$ существует единственный элемент (вектор) $\lambda = \lambda(u^*) \in U$, такой, что $u^*(u) = \langle\lambda, u\rangle$ для всех $u \in U$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в гильбертовом пространстве).

Так как $\widetilde{Z}$ — ограниченное выпуклое уравновешенное подмножество пространства Z, то по теореме Смоляка среди оптимальных методов восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k из задачи (3) найдется линейный метод [6, 9]. Следовательно, мы можем переписать предыдущую постановку (2), (3) нашей экстремальной задачи в следующем виде:

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) = \inf_{\lambda\in U} \sup_{\substack{z\in\widetilde{Z},\\ u\in U: \|A_{h_A}z-u\|\leqslant\varepsilon}} \big|z(x_k) - \langle\lambda, u\rangle\big|. \tag{4}$$

Введем дополнительное множество $\widetilde{Z}_0 := \widetilde{Z} \cap \{z : \|A_{h_A}z\| \leqslant \varepsilon\}$. Тогда ассоциированная задача к задаче (4) может быть сформулирована как поиск решения экстремальной задачи [8]

$$\sup_{z\in\widetilde{Z}_0} z(x_k). \tag{5}$$

Теперь определим функцию Лагранжа $\mathfrak{L} : (Z \times U) \times U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$\mathfrak{L}\big((z, u), \lambda\big) := -z(x_k) + \langle\lambda, u\rangle. \tag{6}$$

На основе работ [8, 16] мы можем сделать следующее утверждение, которое назовем принципом Лагранжа.

Теорема 1. *Если элемент $\hat{z}$ является допустимой точкой в задаче* (5), *т.е. $\hat{z} \in \widetilde{Z}_0$, то*

1) следующие два условия эквивалентны:

а) $\hat{z}$ является решением задачи (5);

б) $\exists\,\hat{\lambda} \in U : \ \mathfrak{L}\big((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}\big) = \inf\limits_{\substack{z\in\widetilde{Z},\\ u\in U:\|A_{h_A}z-u\|\leqslant\varepsilon}} \mathfrak{L}\big((z, u), \hat{\lambda}\big);$

2) при выполнении этих двух эквивалентных условий элемент $\lambda = \hat{\lambda}$ реализует метод оптимального восстановления в задаче (4), *погрешность которого может быть определена по формуле*

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) = \hat{z}(x_k) = -\mathfrak{L}\big((\hat{z}, 0), \hat{\lambda}\big).$$

Следует отметить, что, это очевидно, метод оптимального восстановления λ зависит от индекса узла k, т.е. $\lambda = \lambda(k)$.

Таким образом, принцип Лагранжа позволяет свести задачу оптимального восстановления к поиску решения ассоциированной задачи и поиску множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$. Во многих практических случаях ассоциированная задача и задача оптимального восстановления имеют не единственное решение. Ниже в разделе 5 мы покажем, как выбрать оптимальный регуляризирующий множитель Лагранжа.

3. Выпуклость и уравновешенность множества априорной информации. На практике, чтобы решить операторное уравнение (1) с помощью принципа Лагранжа, мы должны построить конкретное выпуклое и уравновешенное множество априорной информации об искомом решении $\widetilde{Z}$. Для этого мы сформулируем некоторые предположения, т.е. будем использовать априорную информацию, о решении рассматриваемой задачи (1).

Пусть $S = [L_s, R_s]$ и $V = L_2(S)$. Предположим, что точное решение $\bar{z}$ исходной задачи (1) истокопредставимо с помощью интегрального оператора B: $V \to Z$ с непрерывным по совокупности аргументов ядром $K(x,s)$:

(У1): $\bar{z} = B\bar{v} := \int\limits_S K(x,s)\bar{v}(s)\,ds,$

где $\|\bar{v}(s)\|_V \leqslant n_0$ и n_0 — некоторая фиксированная константа, которая зависит от погрешности задачи и будет определена по методу расширяющихся компактов [11, 16] (данный метод будет сформулирован в конце этого раздела).

Кроме того, для ядра $K(x,s)$ известны функции $C_1(s)$, $C_2(s) \in C(S)$ и константы $\gamma_1 \in (0,1]$ и $\gamma_2 \in (1,2]$, такие, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнены следующие два условия:

(У2): $|K(x_1,s) - K(x_2,s)| \leqslant C_1(s)|x_1 - x_2|^{\gamma_1};$

(У3): $|K(x_1,s) - 2K(x_1 + x_2/2, s) + K(x_2,s)| \leqslant C_2(s)|x_1 - x_2|^{\gamma_2}.$

Заметим, что условия (У2) и (У3) на ядро интегрального оператора определяют требование ограниченности первой и второй производных решения задачи. В этом случае справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если решение z дважды дифференцируемо, то при $\gamma_1 = 1$ и $\gamma_2 = 2$ из условий (У2) и (У3) следует, что $\|z'\|_{C^{(1)}(X)} \leqslant \widetilde{C}_1$ и $\|z''\|_{C(X)} \leqslant \widetilde{C}_2$ соответственно, где $\widetilde{C}_{1,2}$ — некоторые константы.*

Доказательство. Так как $C_1(s) \in C(S)$, из вложения $C(S) \subset L_2(S)$ следует, что $C_1(s) \in L_2(S)$. Тогда из условия (У2), неравенства Коши–Буняковского и соотношения $\|\bar{v}(s)\|_V \leqslant n_0$ следует, что

$$\left|\frac{z(x) - z(x_0)}{x - x_0}\right| = \frac{\left|\int_S \big(K(x,s) - K(x_0,s)\big)v(s)\,ds\right|}{|x - x_0|} \leqslant \frac{\int_S \big|K(x,s) - K(x_0,s)\big|\big|v(s)\big|\,ds}{|x - x_0|} \leqslant \int_S \big|C_1(s)\big|\big|v(s)\big|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_S \big|C_1(s)\big|^2\,ds \int_S \big|v(s)\big|^2\,ds\right\}^{1/2} = \left\{\int_S \big|C_1(s)\big|^2\,ds\right\}^{1/2} \|\bar{v}(s)\|_V \leqslant \left\{\int_S \big|C_1(s)\big|^2\,ds\right\}^{1/2} n_0 =: \bar{C}_1 < +\infty.$$

Так как функция $z(x)$ дифференцируема, то для всех $x_0 \in X$ из предыдущего неравенства следует, что $|z'(x_0)| \leqslant \bar{C}_1$. Аналогично на основе условия (У3) можно доказать, что для всех $x_0 \in X$ справедливо неравенство $|z''(x_0)| \leqslant \bar{C}_2$, где $\bar{C}_2 = n_0 \left\{\int_S \big|C_2(s)\big|^2\,ds\right\}^{1/2}$. Тогда из соотношения

$$\|z'\|_{C^{(1)}(X)} := \sup_{x_0 \in X, k=1,2} |z^{(k)}(x_0)| \leqslant \bar{C}_1 + \bar{C}_2 =: \widetilde{C}_1 < +\infty$$

получается, что $\|z'\|_{C^{(1)}(X)} \leqslant \widetilde{C}_1$.

Аналогичным образом доказывается справедливость неравенства $\|z''\|_{C(X)} \leqslant \widetilde{C}_2$. Лемма доказана.

Пусть вместо точно заданного оператора B известно лишь его приближение B_{h_B}: $\|B - B_{h_B}\|_{V\to Z} \leqslant h_B$. Определим множество априорной информации о решении следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{n_0} := \Big\{ & z(x) \in Z: \ \|z(x)\|_Z \leqslant (\|B_{h_B}\|_{V\to Z} + h_B)\cdot n_0; \quad \forall\, x_1, x_2: \\ & |z(x_1) - z(x_2)| \leqslant \bar{C}_1|x_1 - x_2|^{\gamma_1}; \ |z(x_1) - 2z(x_1 + x_2/2) + z(x_2)| \leqslant \bar{C}_2|x_1 - x_2|^{\gamma_2}\Big\}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — константы, определенные, как и в доказательстве леммы 1, по формулам

$$\bar{C}_i := n_0 \left\{ \int_S \left| C_i(s) \right|^2 ds \right\}^{1/2}, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

а n_0 — некоторая фиксированная константа (как и в условии (У1)).

Замечание. Нетрудно обосновать справедливость следующих трех утверждений.

(1) Если для решения $z(x)$ выполнены условия (У1)–(У3), то решение принадлежит множеству Z_{n_0}.

(2) Множество Z_{n_0} является ограниченным замкнутым выпуклым уравновешенным множеством в банаховом пространстве Z.

(3) Если априорная информация нам доступна без условий (У2) и (У3), т.е. если мы владеем только априорной информацией об истокопредставимости точного решения, то множество решений также является выпуклым и уравновешенным, и в этом случае оптимальная погрешность метода $\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon)$ во всех точках x_k равна $(\|B_{h_B}\|_{V\to Z} + h_B) \cdot n_0$.

Таким образом, мы используем условия (У2) и (У3) с целью получить более хороший результат на практике, хотя эти дополнительные условия не влияют на построение нашей теории.

В конце этого раздела мы обсудим метод нахождения параметра n_0, который определяется в соответствии со следующим методом расширяющихся компактов [11, 16]:

0) определяется функционал невязки $\Phi(z) = \|A_{h_A} z - u_\delta\|_U$ и полагается $n = 1$;

1) находится решение задачи $z_n = \operatorname*{argmin}_{z \in Z_n} \Phi(z)$, где множество Z_n определяется по формуле (7) с учетом замены n_0 на n;

2) на каждом шаге определяется погрешность невязки по формуле

$$\epsilon(n) := \delta + \big(h_A \|B_{h_B}\|_{V\to Z} + h_B \|A_{h_A}\|_{Z\to U} + h_A h_B\big)\, n;$$

если $\Phi(z_n) > \epsilon(n)$, то переопределяется $n := n + 1$ и осуществляется переход к шагу 1, в противном случае переходим к шагу 3;

3) фиксируются $n_0 := n$ и $z_{n_0} := \operatorname*{argmin}_{z \in Z_{n_0}} \Phi(z)$.

Пусть тройка $\eta := (h_A, h_B, \delta) \succ \mathbf{0}$ (запись $\eta \succ \mathbf{0}$ означает, что все компоненты вектора η неотрицательны) описывает погрешность задания входных данных. Корректность метода расширяющихся компактов обосновывает следующая теорема [11].

Теорема 2. *Для любого вектора η с неотрицательными компонентами число $n_0(\eta)$, определяемое по методу расширяющихся компактов (шаги 0–3), конечно. Кроме того, существует $\eta_0 \equiv (h_A^0, h_B^0, \delta_0) \succ \mathbf{0}$ (вообще говоря, зависящее от точного решения), такое, что для любого $\eta_0 \succ \eta \succ \mathbf{0}$: $n_0(\eta) = n_0(\eta_0)$ и $\lim\limits_{\eta\to\mathbf{0}} \|z_{n_0(\eta)} - \bar{z}\|_Z = 0$.*

Замечание. (1) Можно заменить натуральную последовательность чисел n_0 на любую другую произвольную последовательность возрастающих до бесконечности положительных чисел r_n. (2) Ясно, что приближенное решение z_{n_0}, полученное с помощью метода расширяющихся компактов, не обязательно является оптимальным в смысле определения 2.

4. Новая постановка задачи и ее конечномерная аппроксимация. Обозначим в качестве Ω множество всей априорной информации для задачи (1):

$$\Omega := \{(z, u) \in Z_{n_0} \times U : \|u - A_{h_A} z\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}\}. \tag{9}$$

Здесь

$$\bar{\varepsilon} := \delta + h_A \cdot (\|B_{h_B}\|_{V\to Z} + h_B)\, n_0. \tag{10}$$

Очевидно, что в этом случае верно неравенство $\varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon} \leqslant \epsilon(n_0)$. Теперь рассмотрим свойства множества Ω.

Лемма 2. *Множество Ω является ограниченным замкнутым выпуклым уравновешенным множеством в банаховом пространстве $Z \times U$.*

Доказательство. Замкнутость и ограниченность множества Ω доказывается тривиально. Уравновешенность множества Ω тоже нетрудно доказывается на основе свойств нормы. Рассмотрим вопрос о выпуклости множества Ω. Пусть элементы $(z_i, u_i) \in \Omega$ при $i = 1, 2$. Надо доказать, что для всех $\theta \in [0, 1]$ элемент $(z, u) := \theta(z_1, u_1) + (1-\theta)(z_2, u_2) = (\theta z_1 + (1-\theta)z_2, \theta u_1 + (1-\theta)u_2) \in \Omega$. Иными словами, следует доказать, что элемент $z \in Z_{n_0}$ и выполнено неравенство $\|u - A_{h_A} z\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}$. В силу выпуклости множества Z_{n_0} получается соотношение $z = \theta z_1 + (1-\theta) z_2 \in Z_{n_0}$. Далее заметим, что для пар (z_i, u_i) выполнены неравенства $\|u_i - A_{h_A} z_i\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}$ при $i = 1, 2$. Тогда из неравенства

$$\big\|u - A_{h_A} z\big\|_U = \big\|(\theta u_1 + (1-\theta)u_2) - A_{h_A}(\theta z_1 + (1-\theta) z_2)\big\|_U \leqslant$$
$$\leqslant \theta \big\|u_1 - A_{h_A} z_1\big\|_U + (1-\theta)\big\|u_2 - A_{h_A} z_2\big\|_U \leqslant \theta\bar{\varepsilon} + (1-\theta)\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$$

заключаем, что $(z, u) \in \Omega$, откуда следует выпуклость множества Ω. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что вместо общей задачи (4) мы можем рассматривать следующую конкретную экстремальную задачу:

$$\Delta_2(x_k, \Omega, \bar{\varepsilon}) := \inf_{\lambda \in U} \sup_{(z,u) \in \Omega} \big| z(x_k) - \langle \lambda, u \rangle \big|. \tag{11}$$

Если обозначить $Z_0 := Z_{n_0} \cap \{z : \|A_{h_A} z\| \leqslant \bar{\varepsilon}\}$, то ее соответствующая ассоциированная задача будет ставиться как поиск решения экстремальной задачи [8]

$$\sup_{z \in Z_0} z(x_k). \tag{12}$$

Чтобы в дальнейшем свести нашу бесконечномерную задачу к конечномерной аппроксимации, мы введем новое множество $Z_{n_0,K}$ из пространства непрерывных функции $C(S)$. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^K$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^K$, т.е. $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$, где 1 находится на k-м месте. Введем сетку $\{x_k\}_{k=1}^K \subset [L_x, R_x]$, оператор проектирования $\Pi^K \colon Z \to \mathbb{R}^K$ и оператор кусочно-линейной аппроксимации $\bar{\Pi}_K \colon \mathbb{R}^K \to Z$, такие, что

$$\Pi^K z := \sum_{k=1}^K z_k e_k, \tag{13}$$

и

$$\bar{\Pi}_K(\mathbf{z})(x) := \begin{cases} z_1, & x \in [L_x, x_1], \\ z_k + \dfrac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), & x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{1, K-1}, \\ z_K, & x \in [x_K, R_x], \end{cases} \tag{14}$$

где $\mathbf{z} := (z_1, z_2, \ldots, z_K)^T \in \mathbb{R}^K$.

Обозначим $Z_{n_0,K} := \bar{\Pi}_K(\Pi^K Z_{n_0})$, $Z_{0,K} := \{z \in Z_{n_0,K} : \|A_{h_A} z\| \leqslant \bar{\varepsilon}\}$ и

$$\Omega_K := \{(z, u) \in Z_{n_0,K} \times U : \|u - A_{h_A} z\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}\}. \tag{15}$$

Очевидно, что свойства выпуклости и уравновешенности множества Ω так же верны и для множества Ω_K. Кроме того, справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Обозначим точную правую часть через $\bar{u} := A\bar{z}$, а ее приближенное значение через u_δ, т.е. $\|\bar{u} - u_\delta\|_U \leqslant \delta$. Будем предполагать, что точное решение $\bar{z}$ принадлежит множеству Z_{n_0} (или $Z_{n_0,K}$). Тогда при сформулированных выше условиях на множество Ω из* (9) *(или Ω_K из* (15)*) будут верны следующие утверждения:*

1) $(\bar{z}, \bar{u}) \in \Omega$ $\big((\bar{z}, \bar{u}) \in \Omega_K\big)$; 2) $(\bar{z}, u_\delta) \in \Omega$ $\big((\bar{z}, u_\delta) \in \Omega_K\big)$.

Доказательство. 1) Докажем первое утверждение. Так как $\bar{z} \in Z_{n_0}$, то $\|\bar{z}\|_Z \leqslant (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B)\, n_0$. Тогда из последовательности неравенств

$$\|\bar{u} - A_{h_A}\bar{z}\|_U \leqslant \|A\bar{z} - A_{h_A}\bar{z}\|_U \leqslant \|A_{h_A} - A\|_{Z \to U} \cdot \|\bar{z}\|_Z \leqslant$$
$$\leqslant h_A\, (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B)\, n_0 < \delta + h_A\, (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B)\, n_0 = \bar{\varepsilon}$$

следует принадлежность $(\bar{z}, \bar{u}) \in \Omega$. Включение $(\bar{z}, \bar{u}) \in \Omega_K$ при условии $\bar{z} \in Z_{n_0,K}$ доказывается аналогичным образом.

2) Докажем теперь второе утверждение леммы. Из неравенств

$$\|u_\delta - A_{h_A}\bar{z}\|_U \leqslant \|u_\delta - \bar{u}\|_U + \|\bar{u} - A_{h_A}\bar{z}\|_U \leqslant \delta + h_A\, (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B)\, n_0 = \bar{\varepsilon}$$

следует $(\bar{z}, u_\delta) \in \Omega$. Аналогично можно получить включение $(\bar{z}, u_\delta) \in \Omega_K$ при условии $\bar{z} \in Z_{n_0,K}$. Лемма доказана.

Обозначим $E_m^K := \sup\limits_{z \in Z_{n_0}} \left| \left(\Pi^K A_{h_A}(z - \bar{\Pi}_K \Pi^K z)\right)_m \right|$, $m = \overline{1, M}$. В работах [10, 12, 14] показано, что если при любом фиксированном индексе m выполнено условие

(У4): последовательность $\{E_m^K\}_{K=1}^{\infty}$ монотонно не возрастая стремится к нулю,

то вместо задачи (11) мы можем рассматривать следующую бесконечномерную экстремальную задачу (погрешность этой задачи сколь угодно близка к погрешности задачи (11) при достаточном большом числе K):

$$\Delta_{2,K}(x_k, \Omega_K, \bar{\varepsilon}) := \inf_{\lambda \in U} \sup_{(z,u) \in \Omega_K} \left| z(x_k) - \langle \lambda, u \rangle \right|. \tag{16}$$

Задача (16) является бесконечномерной на множестве кусочно-линейных непрерывных функций. Соответствующая ассоциированная к ней задача формулируется следующим образом:

$$\sup_{z \in Z_{0,K}} z(x_k). \tag{17}$$

Аналогично теореме 1 мы можем определить функцию Лагранжа по формуле (6) и получить соответствующий принцип Лагранжа для задачи (16). Формулировку этой теоремы мы приводить не будем.

Теперь сведем нашу бесконечномерную задачу (16) к конечномерной задаче. Пусть $\{e_m\}_{m=1}^M$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^M$, где $M > N$ — натуральное число. Введем сетку $\{y_m\}_{m=1}^M \subset [L_y, R_y]$ и оператор проектирования $\Pi^M \colon U \to \mathbb{R}^M$, такой, что $\Pi^M u := \sum_{m=1}^M u_m e_m$, где $\{e_m\}_{m=1}^M$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^M$. Как и в формуле (14), введем оператор кусочно-линейной аппроксимации $\bar{\Pi}_M \colon \mathbb{R}^M \to U$. Будем считать, что вместо конечномерной аппроксимации приближенного оператора A_{h_A} нам дана матрица $\hat{A} := \Pi^M A_{h_A} \bar{\Pi}_K$; ее элементы будем обозначать через a_m^k, где $k = \overline{1, K}$ и $m = \overline{1, M}$.

Пусть $U_M := \Pi^M U$. Введем числовые характеристики точности аппроксимации $\delta(M)$ и $h_A(K, M)$ (они считаются известными), для которых выполнены предельные соотношения $\delta(M) \to 0$ и $h_A(K, M) \to 0$ при $K, M \to \infty$ и выполнены оценки

$$\|\bar{u} - \bar{\Pi}_M \Pi^M u_\delta\|_U \leqslant \delta(M), \qquad \sup_{z \in Z_{n_0}} \|Az - \bar{\Pi}_M \Pi^M A_{h_A} \bar{\Pi}_K \Pi^K z\|_U \leqslant h_A(K, M). \tag{18}$$

Конечномерную аппроксимацию множества Ω_K обозначим через Ω_K^M, т.е.

$$\Omega_K^M := \{(z, u) \in \Pi^K Z_{n_0} \times U_M : \|u - \hat{A} z\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}\}, \tag{19}$$

где $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(K, M) := \delta(M) + h_A(K, M) \left(\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B\right) n_0$. Ясно, что $\bar{\varepsilon}(K, M) \to 0$ при $K, M \to \infty$.

Тогда конечномерной аппроксимацией исходной задачи (16) для всех узлов $k = \overline{1, K}$ будет задача

$$\inf_{\lambda^M \in U_M} \sup_{(z,u) \in \Omega_K^M} \left| e_k^T z - \langle \lambda^M, u \rangle \right|, \quad k = \overline{1, K}. \tag{20}$$

Если ввести обозначения $Z_0^K := \Pi^K Z_{0,K}$, то ассоциированной к (20) задачей является задача максимизации

$$\sup_{z \in Z_0^K} e_k^T z \left(\equiv \sup_{z \in Z_0^K} z_k \right), \quad k = \overline{1, K}. \tag{21}$$

Аналогично теореме 1 мы можем определить функцию Лагранжа и получить соответствующий принцип Лагранжа для конечномерной задачи (20). В работе [14] показано, что для того чтобы вместо исходной бесконечномерной задачи (11) решать конечномерную задачу (20), нам достаточно доказать, что множество Z_{n_0} является слабо секвенциальным компактом в пространстве Z. Этот факт следует из теоремы Арцела [14, 18].

Теперь рассмотрим метод решения задачи в конечномерной постановке (20) и (21). В нашей работе нормы берутся в следующем виде: $\|z\|_\infty := \max\limits_{k=\overline{1,K}} |z_k|$ и $\|u\|_\infty := \max\limits_{m=\overline{1,M}} |u_m|$. Пусть $h_{x_k} := x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{1, K-1}$, — шаги сетки $\{x_k\}_{k=1}^K$. В этом случае мы можем представить множество ограничений Z_0^K в виде

$$Z_0^K \equiv \Big\{ z \in \mathbb{R}^K : \, |z_k| \leqslant (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B)\, n_0, \; k = \overline{1, K}; \; |z_k - z_{k+1}| \leqslant \bar{C}_1 h_{x_k}^{\gamma_1}, \; k = \overline{1, K-1};$$

$$\left|z_k - 2z_{k+1} + z_{k+2}\right| \leqslant \bar{C}_2 h_{x_k}^{\gamma_2},\ k = \overline{1, K-2};\ \Big|\sum_{k=1}^{K} a_k^m z_k\Big| \leqslant \bar{\varepsilon},\ m = \overline{1, M}\Big\} := \Big\{z \in \mathbb{R}^K :\ G_0 z \leqslant\ g_0\Big\},$$

где G_0 — матрица размеров $2(3K + M - 3) \times K$.

Ясно, что для того чтобы найти решение задачи (21), нам необходимо решить K задач линейного программирования. Существует много методов для решения задачи (21), например, симплекс-метод [19], метод внутренних точек [20] и др. Существование решения задачи линейного программирования (21) следует из ограниченности и замкнутости множества Z_0^K (оно является K-мерным многогранником) [21].

Далее, для каждого фиксированного индекса k_0 возьмем любое решение $\{\hat{z}_k^{k_0}\}_{k=1}^K$ ассоциированной задачи (21) и ее экстремум $\hat{z}_{k_0}$. Множитель Лагранжа (который является M-мерным вектором) из принципа Лагранжа при фиксированном индексе k_0 обозначим через $\lambda_{k_0}^M$. Совокупность решения, экстремального значения задачи и множителей Лагранжа системы ассоциированной задачи (21) обозначим через $\{\hat{z}_k^{k_0}\}_{k,k_0=1}^K$, $\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K$ и $\{\lambda_k^M\}_{k=1}^K$.

Теперь рассмотрим метод нахождения множителей Лагранжа $\{\lambda_k^M\}_{k=1}^K$.

Принцип Лагранжа утверждает, что существуют множители Лагранжа $\{\lambda_k^M\}_{k=1}^K$, удовлетворяющие указанным выше условиям. Конечномерная задача минимизации функции Лагранжа с множителями Лагранжа $\{\lambda_k^M\}_{k=1}^K$ принимает вид

$$-\hat{z}_k = \inf_{(z,u)\in\Omega_K^M} \big(- z_k + \langle \lambda_k^M, u\rangle\big), \quad k = \overline{1, K}. \tag{22}$$

После простых преобразований запишем задачу минимизации (22) в форме

$$0 = \inf_{(z,u)\in\Omega_K^M} \big((\hat{z}_k - z_k) + \langle \lambda_k^M, u\rangle\big)\,, \quad k = \overline{1, K}. \tag{23}$$

Пусть $\{\hat{z}_k^{k_0}\}_{k=1}^K$ — любая экстремальная точка ассоциированной задачи (21) при фиксированном индексе k_0, на которой достигается супремум. Пусть $\{\hat{z}_k\}_{k=1}^K$ — совокупность супремумов ассоциированной задачи (21), т.е. они являются диагональными элементами матрицы $\{\hat{z}_k^{k_0}\}_{k_0,k=1}^K$; обозначим эту совокупность решений как $\hat{z} := (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_K)^T$. Из задачи (23) следует неравенство

$$(\hat{z}_k - z_k) + \langle \lambda_k^M, u\rangle \geqslant 0 \quad \forall (z,u) \in \Omega_K^M, \quad k = \overline{1, K}. \tag{24}$$

Если мы введем обозначение $\Lambda \equiv \Lambda_K^M := (\lambda_1^M, \ldots, \lambda_K^M)^T$ (матрица размеров $K \times M$), то мы можем переписать неравенство (24) в следующем векторном виде:

$$(\hat{z} - z) + \Lambda u \succ \mathbf{0} \quad \forall (z,u) \in \Omega_K^M. \tag{25}$$

Множество решений неравенства (25) обозначим через $\boldsymbol{\Lambda}(\equiv \boldsymbol{\Lambda}_K^M)$. Принципа Лагранжа утверждает, что $\boldsymbol{\Lambda} \neq \emptyset$. В работе [12] с помощью симплекс-метода и множества индексов активных ограничений автор ввел общую схему нахождения множителей Лагранжа. Во многих случаях элементов множества $\boldsymbol{\Lambda}$ бесконечно много. Здесь мы рассмотрим несколько простейших алгоритмов, которые дают нам один оптимальный множитель Лагранжа.

5. Принципы выбора множителя Лагранжа. На практике нам необходимо найти одну (оптимальную в некотором смысле) матрицу множителей Лагранжа Λ, с помощью которой мы можем определить оптимальное (и регуляризованное) приближенное решение по формуле $\Lambda \cdot \mathbf{u}$ (этот вопрос рассмотрен ниже в разделе 7), где $\mathbf{u}(:= \Pi^M u_\delta)$ — конечномерная аппроксимация неточно заданной правой части u_δ.

Если нам несложно найти структуру множества $\boldsymbol{\Lambda}$, то мы можем выбрать оптимальную матрицу множителей Лагранжа по одной из следующих формул:

$$\hat{\Lambda} = \operatorname*{argmin}_{\Lambda\in\boldsymbol{\Lambda}} \|\hat{A}\Lambda - I_M\|_F^2, \tag{26}$$

$$\hat{\Lambda} = \operatorname*{argmin}_{\Lambda\in\boldsymbol{\Lambda}} \|\Lambda\mathbf{u} - \mathbf{z}_{n_0}\|_F^2. \tag{27}$$

Здесь I_M — единичная матрица порядка M, а вектор $\mathbf{z}_{n_0}$ является K-мерной аппроксимацией приближенного решения z_{n_0}, полученного по схеме расширяющихся компактов из раздела 3.

Для некоторых задач (особенно тех, в которых количество элементов множества $\boldsymbol{\Lambda}$ бесконечно) мы можем построить более эффективный метод нахождения лучшего (оптимального и регуляризирующего) множителя Лагранжа. Рассмотрим принцип выбора множителя Лагранжа, который связан с регуляризирующим алгоритмом А. Н. Тихонова. Среди всех решений из $\mathbf{\Lambda}$ мы выбираем Λ такого вида, что

$$\Lambda = \left(\hat{A}^T\hat{A} + \alpha I_K\right)^{-1}\hat{A}^T, \tag{28}$$

где I_K — единичная матрица порядка K, а $\alpha \geqslant 0$ — параметр регуляризации, который будет определен ниже.

Заметим, что так как $(\lambda_1^M, \ldots, \lambda_K^M)^T = \Lambda$, то для всех $k \in \{1, \ldots, K\}$: $\lambda_k^M = \Lambda^T e_k$ (здесь $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^K$). Тогда формулу (28) (которая записана в матричной форме) можно переписать в покомпонентном виде

$$\lambda_k^M = \hat{A}\left(\hat{A}^T\hat{A} + \alpha I_K\right)^{-1} e_k, \quad k = \overline{1, K}. \tag{29}$$

Определение 3. Матрица множителей Лагранжа Λ, определяющаяся по формуле (28), и параметр регуляризации α, при котором выполняется неравенство (25), называется нормальной.

Теперь обсудим некоторые свойства параметра регуляризации α, при котором матрица множителей Лагранжа является нормальной.

Для любой матрицы $\hat{A}$ верно сингулярное разложение $\hat{A} = E\Sigma F^T$, где E и F — ортогональные матрицы размеров $M \times M$ и $K \times K$ соответственно, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$ — диагональная матрица размеров $M \times K$ с неотрицательными вещественными числами на диагонали, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_r > 0$, и число $r \leqslant \min(M, N)$ — ранг матрицы $\hat{A}$. Тогда

$$\hat{A}^T = F\Sigma^T E^T, \quad \hat{A}^T\hat{A} = F\Sigma^T\Sigma F^T$$

и

$$\hat{A}^T\hat{A} + \alpha I_K = F\Sigma^T\Sigma F^T + \alpha I_K = F(\Sigma^T\Sigma + \alpha I_K)F^T =: F\tilde{\Sigma}(\alpha)F^T,$$

где $\tilde{\Sigma}(\alpha) := (\Sigma^T\Sigma + \alpha I_K) = \operatorname{diag}(\sigma_1^2 + \alpha, \ldots, \sigma_r^2 + \alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$. Очевидно, что для всех $\alpha > 0$ обратная к ней матрица имеет вид

$$\tilde{\Sigma}^- = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_1^2 + \alpha}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r^2 + \alpha}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right).$$

Мы можем записать разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{\sigma_i^2 + \alpha} = \frac{1}{\sigma_i^2} - \alpha\,\frac{1}{\sigma_i^4} + \alpha^2\,\frac{1}{\sigma_i^6} + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad i = \overline{1, r},$$

откуда получается асимптотика

$$\tilde{\Sigma}^- = (\Sigma^T\Sigma)^- + \operatorname{diag}(-\alpha/\sigma_1^4, \ldots, -\alpha/\sigma_r^4, 1/\alpha, \ldots, 1/\alpha) + \operatorname{diag}(\alpha^2/\sigma_1^6, \ldots, \alpha^2/\sigma_r^6, 0, \ldots, 0) + \mathcal{O}(\alpha^3),$$

где $(\Sigma^T\Sigma)^- = \operatorname{diag}(1/\sigma_1^2, \ldots, 1/\sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$ и $\mathcal{O}(\alpha^3) = \sum_{i=3}^{\infty}(-1)^i \operatorname{diag}\bigl(\alpha^i/\sigma_1^{2(i+1)}, \ldots, \alpha^i/\sigma_r^{2(i+1)}, 0, \ldots, 0\bigr)$.
Тогда

$$\begin{aligned}\left(\hat{A}^T\hat{A} + \alpha I_K\right)^{-1} &= \left(F\tilde{\Sigma}F^T\right)^{-1} = F\tilde{\Sigma}^- F^T = \\ &= F(\Sigma^T\Sigma)^- F^T + F\operatorname{diag}\left(-\frac{\alpha}{\sigma_1^4}, \ldots, -\frac{\alpha}{\sigma_r^4}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right)F^T + \mathcal{O}(\alpha^2).\end{aligned} \tag{30}$$

Подставив асимптотику (30) в неравенство (25), получим, что для всех $(z, u) \in \Omega_K^M$ верно

$$(\hat{z} - z) + \Lambda u = (\hat{z} - z) + F(\Sigma^T\Sigma)^- F^T\hat{A}^T u + F\operatorname{diag}\left(-\frac{\alpha}{\sigma_1^4}, \ldots, -\frac{\alpha}{\sigma_r^4}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right)F^T\hat{A}^T u + \mathcal{O}(\alpha^2) \succ \mathbf{0},$$

или в покомпонентном виде для всех $(z, u) \in \Omega_K^M$:

$$e_k^T(\hat{z} - z) + e_k^T F(\Sigma^T\Sigma)^- F^T\hat{A}^T u + e_k^T F\operatorname{diag}\left(-\frac{\alpha}{\sigma_1^4}, \ldots, -\frac{\alpha}{\sigma_r^4}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{1}{\alpha}\right)F^T\hat{A}^T u + \mathcal{O}(\alpha^2) \geqslant 0, \quad k = \overline{1, K},$$

что эквивалентно утверждению о том, для всех $(z, u) \in \Omega_K^M$:

$$e_k^T(\hat{z} - z) + e_k^T F(\Sigma^T\Sigma)^- F^T\hat{A}^T u \geqslant \sum_{i=1}^{r}(e_k^T F)_i\,\frac{\alpha}{\sigma_i^4}\,(F^T\hat{A}^T u)_i - \sum_{i=r+1}^{K}(e_k^T F)_i\,\frac{1}{\alpha}\,(F^T\hat{A}^T u)_i + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad k = \overline{1, K},$$

где $\mathcal{O}(\alpha^2) = \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{i-1}e_k^T F \operatorname{diag}\left(\alpha^i/\sigma_1^{2(i+1)}, \ldots, \alpha^i/\sigma_r^{2(i+1)}, 0, \ldots, 0\right) F^T \hat{A}^T u$.

Далее обозначим $\underline{d}_k(z,u) := \sum_{i=1}^{r}(e_k^T F)_i \frac{1}{\sigma_i^4}(F^T\hat{A}^T u)_i$, $\overline{d}_k(z,u) := -\sum_{i=r+1}^{K}(e_k^T F)_i (F^T \hat{A}^T u)_i$ и $d_k(z,u) := e_k^T(\hat{z}-z) + e_k^T F(\Sigma^T\Sigma)^- F^T \hat{A}^T u$. Тогда наша задача заключается в том, чтобы найти любое такое положительное число α, что

$$\mathcal{O}(\alpha^2) + \underline{d}_k\alpha + \frac{\overline{d}_k}{\alpha} \leqslant d_k \quad \forall (z,u) \in \Omega_K^M, \quad k = \overline{1,K}. \tag{31}$$

Очевидно, что для любого положительного числа ε_0 существует $\alpha_0 > 0$, такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ и для всех k: $1 \leqslant k \leqslant K$ верно $|\mathcal{O}(\alpha^2)| \leqslant \varepsilon_0 \alpha$, т.е.

$$\left|\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{i-1}e_k^T F \operatorname{diag}\left(\frac{\alpha^i}{\sigma_1^{2(i+1)}}, \ldots, \frac{\alpha^i}{\sigma_r^{2(i+1)}}, 0, \ldots, 0\right) F^T \hat{A}^T u\right| \leqslant \varepsilon_0 \alpha. \tag{32}$$

Тогда нам достаточно рассматреть следующую задачу: найти такое $\alpha \in (0, \alpha_0]$, при котором будет выполнено неравенство

$$(\underline{d}_k + \varepsilon_0)\alpha + \frac{\overline{d}_k}{\alpha} \leqslant d_k \quad \forall (z,u) \in \Omega_K^M, \quad k = \overline{1,K}. \tag{33}$$

Замечание. Пусть Ξ — множество решений системы (31), а Ξ_0 — множество решений системы (33). Очевидно, что выполнено соотношение $\Xi_0 \subset \Xi$ и множество Ξ_0 имеет более простую структуру. Ниже мы будем рассматривать только множество Ξ_0, т.е. вместо системы неравенств (31) будем решать систему (33).

Теперь рассмотрим пример метода выбора числа α_0, который может быть реализуем на практике. Допустим, что значение ε_0 может быть задано в виде $\varepsilon_0 = 10^{-j}$, где $j \in \mathbb{R}$. Тогда возможен следующий способ выбор числа α_0, который формулируется в следующем утверждении.

Лемма 4. *Определим в качестве функционала $\mathcal{G}(\cdot)$ правило, которое любой матрице (или вектору) $\mathbf{T}$ ставит в соответствие максимальный по модулю элемент этой матрицы (или вектора), такое, что*

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}) := \max_{i,j} |\mathbf{T}_i^j|. \tag{34}$$

Пусть известны $\mathcal{G}(\hat{A}^T u) = \tau_1 10^{\nu_1}$, $\mathcal{G}(F) = \tau_2 10^{\nu_2}/K$ и $\sigma_r = \tau_3 10^{\nu_3}$, где $0.1 < \tau_1, \tau_2 \leqslant 1$, $1 \leqslant \tau_3 < 10$, σ_r — минимальный элемент диагональной матрицы Σ, полученной из сингулярного разложения матрицы $\hat{A}$. Определим порядок задачи J следующим образом:

$$J := 4\nu_3 - 2\nu_2 - \nu_1. \tag{35}$$

Тогда, для того чтобы $\varepsilon_0 = 10^{-j}$ $(j \leqslant J)$ в неравенстве (32), достаточно выбрать $\alpha_0 = \tau\, 10^{2\nu_3 - j}$, где τ — любое число из $(0.1, 1]$.

Доказательство. Элемент матрицы F обозначим через $[F]_\omega^\mu$. Тогда из информации о матрице F и определения функционала $\mathcal{G}(\cdot)$ следует, что для всех μ, ω : $1 \leqslant \mu, \omega \leqslant K$ верно $\left|[F]_\omega^\mu\right| \leqslant \tau_2 10^{\nu_2}/K$. Далее, из определения порядка задачи (35) мы можем получить неравенство $2\nu_2 + \nu_1 - 2\nu_3 \leqslant 2\nu_3 - j$ при $1 \leqslant j \leqslant J$. На основе этого неравенства и неравенства $i + j \leqslant ij + 1$ при $i, j \geqslant 1$ мы можем получить следующее соотношение:

$$\left|\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{i-1}e_k^T F \operatorname{diag}\left(\frac{\alpha^i}{\sigma_1^{2(i+1)}}, \ldots, \frac{\alpha^i}{\sigma_r^{2(i+1)}}, 0, \ldots, 0\right) F^T \hat{A}^T u\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{\infty}\left|e_k^T F \operatorname{diag}\left(\frac{\alpha^i}{\sigma_1^{2(i+1)}}, \ldots, \frac{\alpha^i}{\sigma_r^{2(i+1)}}, 0, \ldots, 0\right) F^T \hat{A}^T u\right| \leqslant \quad \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{\omega=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{K}|e_k^T F|\,\frac{\alpha^i}{\sigma_\omega^{2(i+1)}}\,\left|[F^T]_\mu^\omega\right|\,\left|[\hat{A}^T u]^\mu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{\omega=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{K}\left(\tau_2\,\frac{10^{\nu_2}}{K}\right)\left(\frac{(\tau\, 10^{2\nu_3-j})^i}{(\tau_3\, 10^{\nu_3})^{2(i+1)}}\right)\left(\tau_2\,\frac{10^{\nu_2}}{K}\right)(\tau_1\, 10^{\nu_1}) =$$

$$= \frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tau_1\tau_2^2\tau^i\tau_3^{-2(i+1)}\right)\left(10^{2\nu_2+\nu_1-2\nu_3-ij}\right) < \tau\,\frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}10^{2\nu_2+\nu_1-2\nu_3-ij} \leqslant$$

$$\leqslant \tau\,\frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}10^{2\nu_3-j-ij} = \alpha_0\,\frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}10^{-ij} \leqslant \alpha_0\,\frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}10^{-i-j+1} = \varepsilon_0\alpha_0\left(\frac{r}{K}\sum_{i=2}^{\infty}10^{-i+1}\right) < \varepsilon_0\alpha_0.$$

Выписанное соотношение доказывает наше утверждение.

В конце этого раздела рассмотрим методы решения системы неравенств (33). Определим следующие условия:

(У5): $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant K}\ \max\limits_{(z,u)\in\Omega_K^M} \overline{d}_k(z,u) < 0$, где $\overline{d}_k(z,u) := -\sum_{i=r+1}^{K}(e_k^T F)_i (F^T\hat{A}^T u)_i$;

(У6): при фиксированном индексе k либо выполнено неравенство $\min\limits_{(z,u)\in\Omega_K^M} \underline{d}_k(z,u) > -\varepsilon_0$, либо выполнено неравенство $\max\limits_{(z,u)\in\Omega_K^M} \underline{d}_k(z,u) < -\varepsilon_0$, где $\underline{d}_k(z,u) := \sum_{i=1}^{r}(e_k^T F)_i \frac{1}{\sigma_i^4}(F^T\hat{A}^T u)_i$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (У5) и (У6). Тогда множеством решений системы неравенств* (33) *относительно переменной* α *при условии* $\alpha\in(0,\alpha_0]$ *является*

$$\{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \kappa\}, \tag{36}$$

где $\kappa\leqslant\alpha_0$ *— некоторое положительное число.*

Доказательство. Из условий (У5) и (У6) следует, что при фиксированном индексе k для всех $(z,u)\in\Omega_K^M$ значение числа $\overline{d}_k(z,u)$ всегда отрицательно, а значение числа $\underline{d}_k(z,u)+\varepsilon_0$ всегда имеет определенный знак (либо положительный, либо отрицательный). Тогда неравенство (33) относительно положительной переменной α всегда имеет решение

$$0 < \alpha \leqslant \tilde{\kappa}_k(z,u), \tag{37}$$

где $\tilde{\kappa}_k(z,u)$ — некоторое положительное число для любых фиксированных параметров $\{k,z,u\}$.

На самом деле, неравенство (33) при положительном параметре α эквивалентно следующему:

$$(\underline{d}_k+\varepsilon_0)\alpha^2 - d_k\alpha + \overline{d}_k \leqslant 0. \tag{38}$$

Заметим, что значение числа $\overline{d}_k(z,u)$ всегда отрицательно. Если значение числа $\underline{d}_k(z,u)+\varepsilon_0$ всегда положительно, то при фиксированных параметрах $\{k,z,u\}$ неравенство (38) имеет решение

$$\tilde{\kappa}_k^1(z,u) \leqslant \alpha \leqslant \tilde{\kappa}_k^2(z,u),$$

где $\tilde{\kappa}_k^1(z,u) < 0$ и $\tilde{\kappa}_k^2(z,u) > 0$ — корни неравенства (38). Таким образом, если возьмем $\tilde{\kappa}_k(z,u) = \tilde{\kappa}_k^2(z,u)$, то неравенство (33) при положительном параметре α имеет решение вида (37).

Если же значение числа $\underline{d}_k(z,u)+\varepsilon_0$ всегда отрицательно, то при фиксированных параметрах $\{k,z,u\}$ неравенство (38) либо имеет решение

$$\alpha\in\mathbb{R},$$

либо

$$\alpha\in(-\infty,\tilde{\kappa}_k^3(z,u)]\cup[\tilde{\kappa}_k^4(z,u),+\infty),$$

где $\tilde{\kappa}_k^3(z,u)$ и $\tilde{\kappa}_k^4(z,u)$ — корни неравенства (38), которые имеют одинаковый знак. Иными словами, либо верно $\tilde{\kappa}_k^3(z,u) \leqslant \tilde{\kappa}_k^4(z,u) < 0$, либо верно $\tilde{\kappa}_k^4(z,u) \geqslant \tilde{\kappa}_k^3(z,u) > 0$. В обоих случаях при положительном параметре α имеет место решение вида (37) (если $\tilde{\kappa}_k^3(z,u) > 0$, то возьмем $\tilde{\kappa}_k(z,u) = \tilde{\kappa}_k^2(z,u)$, а если $\tilde{\kappa}_k^4(z,u) < 0$, то возьмем $\tilde{\kappa}_k(z,u) = +\infty$).

Заметим, что из компактности множества Ω_K^M и положительности числа $\tilde{\kappa}_k(z,u)$ при всех $(z,u)\in\Omega_K^M$ следует, что $\min_{(z,u)\in\Omega_K^M}\tilde{\kappa}_k(z,u) > 0$. Наконец, учтем, что

$$\kappa := \min\Big\{\alpha_0, \min_{1\leqslant k\leqslant K}\ \min_{(z,u)\in\Omega_K^M}\tilde{\kappa}_k(z,u)\Big\}, \tag{39}$$

что и доказывает лемму.

6. Методы выбора параметра регуляризации α.

Определение 4. Число κ, определяющееся из леммы 5, будем называть числом регуляризации.

Теперь, с помощью числа регуляризации κ, мы построим параметр регуляризации α двумя способами — априорным и апостериорным.

6.1. Априорный выбор параметра регуляризации $\alpha=\alpha_1$. Пусть

$$\alpha_1 := \frac{\bar{\varepsilon}^\sigma}{1+\bar{\varepsilon}^\sigma}\,\kappa, \quad 0<\sigma<2, \tag{40}$$

где погрешность задачи $\bar{\varepsilon}$ определяется по формуле (10), а число регуляризации κ вычисляют из леммы 5. Очевидно, что параметр регуляризации α_1 удовлетворяет следующей лемме.

Лемма 6. *(а)* $\forall\, \eta \succ \mathbf{0}$: $0 \leqslant \alpha_1(\eta) < \kappa(\eta)$; *(б)* $\lim\limits_{\eta\to\mathbf{0}} \alpha_1(\eta) = 0$; *(в)* $\lim\limits_{\eta\to\mathbf{0}} \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\alpha_1(\eta)} = 0$.

6.2. Апостериорный выбор параметра регуляризации $\alpha = \alpha_2$. Далее с помощью обобщенного принципа невязки мы построим процедуру выбора параметра α_2 по следующей схеме:

$$\alpha_2 := \min(\kappa, \alpha^*), \tag{41}$$

где α^* — параметр регуляризации, который выбирается по следующему обобщенному принципу невязки [15, 17]:

$$\rho(\alpha^*) = \left\|\hat{A} z^{\alpha^*} - u\right\|^2 - \left(\delta + h_A \cdot \|z^{\alpha^*}\|_Z\right)^2 = 0.$$

Здесь $z^{\alpha^*} = \Lambda|_{\alpha=\alpha^*} \cdot \mathbf{u}$.

Из соотношения $\alpha_2 = \min(\kappa, \alpha^*) \leqslant \alpha^* \to 0$ при $\eta \to \mathbf{0}$ мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 7. *(а)* $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \kappa$; *(б)* $\lim\limits_{\eta\to\mathbf{0}} \alpha_2(\eta) = 0$.

Замечание. Ниже в разделе 7 мы покажем, что при таком выборе параметра регуляризации по формуле (40) (или (41)) матрица множителей Лагранжа является нормальной.

7. Регуляризирующее и оптимальное свойства алгоритма. В работе [13] было показано, что если искомое решение задачи (1) истокопредставимо, то при некотором условии любой элемент Λ из множества $\mathbf{\Lambda}$ является оптимальным регуляризирующим алгоритмом в некотором смысле. Здесь мы покажем, что если выполнены условия (У5) и (У6), тогда даже если не обладать информацией об истокопредставимости решения (т.е. нам не важен факт выполнения условий (У1), (У2) и (У3): главное, чтобы множества $\widetilde{Z}$ или Ω являлись ограниченными выпуклыми и уравновешенными), то матрица множителей Лагранжа Λ, определяющаяся по формуле (28), и параметр регуляризации α (который может быть определен либо априорным способом (40), либо апостериорным (41)), определяют оптимальный регуляризирующий алгоритм.

Сначала рассмотрим определение регуляризирующего алгоритма для нашего случая и ответим, что такое оптимальный регуляризирующий алгоритм.

Определение 5. Семейство отображений R^k_α: $(0,+\infty)\times \mathrm{Hom}(Z,U)\times \mathrm{Hom}(V,Z)\times U_M \to \mathbb{R}^1$, $k=\overline{1,K}$, параметризуемое числом $\alpha > 0$, назовем поточечным регуляризирующим алгоритмом восстановления конечномерной аппроксимации $\{z(x_k)\}_{k=1}^K$ в задаче (1) при наличии априорной информации $Z_{n_0,K}$, если выполнено условие

$$\sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left|z(x_k) - R^k_\alpha(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u)\right| \xrightarrow[M\to\infty]{\alpha(\eta)\to 0} 0, \quad k=\overline{1,K}. \tag{42}$$

Точную верхнюю грань в (42) назовем апостериорной поточечной наихудшей оценкой погрешности регуляризирующего алгоритма R^k_α в заданной точке x_k и обозначим $\Delta^2_k(\eta, R^k_\alpha)$, где $k=\overline{1,K}$. Обозначим $R_\alpha := (R^1_\alpha, R^2_\alpha, \ldots, R^K_\alpha)^T$. Число $\Delta^2(\eta, R_\alpha) := \sum_{k=1}^K \Delta^2_k(\eta, R^k_\alpha)$ назовем общей апостериорной наихудшей оценкой погрешности регуляризирующих алгоритмов R_α на сетке $\{x_k\}_{k=1}^K$.

Замечание. По сравнению с классическим определением регуляризирующего алгоритма [2–4, 15] нетрудно доказать, что если оператор R_α является регуляризирующим алгоритмом по определению 5, то оператор $\bar{\Pi}_K R_\alpha$ является классическим регуляризирующим алгоритмом, т.е. для всех $(\bar{z}, u_\delta) \in \Omega$ выполнено $\|\bar{z} - \bar{\Pi}_K R_\alpha \Pi^M u_\delta\|_{C(X)} \to 0$ при $\alpha(\eta) \to 0$ и $K, M \to \infty$. Здесь оператор кусочно-линейной аппроксимации $\bar{\Pi}_K$ определяется по формуле (14).

Определение 6. Семейство регуляризирующих алгоритмов $\{\tilde{R}^k_\alpha\}_{k=1}^K$ называется оптимальным, если для любого отображения $R^k_\alpha:$ $(0,+\infty)\times \mathrm{Hom}(Z,U)\times \mathrm{Hom}(V,Z)\times U_M \to \mathbb{R}^1$ выполнено неравенство

$$\Delta^2_k(\eta, \tilde{R}^k_\alpha) \leqslant \Delta^2_k(\eta, R^k_\alpha), \quad k=\overline{1,K}. \tag{43}$$

Для любого $\Lambda(:= (\lambda^M_1, \ldots, \lambda^M_K)) \in \mathbf{\Lambda}$ определим семейство отображений R^k_α следующим образом:

$$R^k_\alpha(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u_\delta) := \langle \lambda^M_k, \mathbf{u}\rangle, \quad k=\overline{1,K}, \tag{44}$$

или в векторном виде:

$$R_\alpha = (R^1_\alpha, R^2_\alpha, \ldots, R^K_\alpha)^T := \Lambda\mathbf{u}. \tag{45}$$

Замечание. Отображение R_α^k, определяющееся по формулам (44) или (45), не является линейной функцией аргумента $\mathbf{u}$, потому что множество Ω_K, которое получается методом расширяющихся компактов, зависит от $\mathbf{u}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (У4)–(У6)*. Тогда семейство отображений R_α, определяющееся по формуле* (45)*, где матрица множителей Лагранжа Λ определяется по формуле* (28)*, а параметр регуляризации α определяется либо априорным способом из* (40) *($\alpha = \alpha_1$), либо апостериорным способом из* (41) *($\alpha = \alpha_2$), является оптимальным регуляризирующим алгоритмом восстановления конечномерной аппроксимации функции $\{z(x_k)\}_{k=1}^K$ в задаче* (1)*. Соответствующий оператор $\bar{\Pi}_K R_\alpha \Pi^M$ является оптимальным регуляризирующим оператором операторного уравнения* (1)*.*

Доказательство. Регуляризирующие свойства нашего алгоритма нетрудно получаются с помощью доказательства, аналогичного доказательству классического регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [2].

Теперь докажем оптимальное свойство нашего алгоритма. Сначала рассмотрим произвольное (не обязательно линейное) отображение $\mathcal{R}_\alpha : (0, +\infty) \times \mathrm{Hom}(Z, U) \times \mathrm{Hom}(V, Z) \times U_M \to \mathbb{R}^1$. Определим вспомогательное отображение $\mathcal{P} : U_M \to \mathbb{R}^1$, такое что $\mathcal{P}(\Pi^M u) \equiv \mathcal{R}_\alpha(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u)$. Тогда из принципа Лагранжа и определения отображения R_α^k из (44) получим

$$\Delta_k^2(\eta, R_\alpha^k) := \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - R_\alpha^k(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u) \right| \overset{(44)}{=\!=} \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - \langle \lambda_k^M, \Pi^M u \rangle \right| \underset{(16)}{\overset{\text{принцип Лагранжа}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \inf_{\lambda\in U_M} \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - \langle \lambda, \Pi^M u \rangle \right| \overset{\star}{=} \inf_{\forall u^*:\ U_M\to\mathbb{R}^1} \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - u^*(\Pi^M u) \right| \leqslant \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - \mathcal{P}(\Pi^M u) \right| =$$

$$\overset{\mathcal{P}(\Pi^M u) = \mathcal{R}_\alpha(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \sup_{(z,u)\in\Omega_K} \left| z(x_k) - \mathcal{R}_\alpha(\alpha, A_{h_A}, B_{h_B}, \Pi^M u) \right| =: \Delta_k^2(\eta, \mathcal{R}_\alpha).$$

Здесь $\overset{\star}{=}$ получается из теоремы Смоляка о существовании линейного метода оптимального восстановления [6, 9]. Отсюда следует, что для всех $\mathcal{R}_\alpha : \Delta_k^2(\eta, R_\alpha^k) \leqslant \Delta_k^2(\eta, \mathcal{R}_\alpha)$, что и доказывает оптимальность нашего алгоритма.

8. Общий алгоритм. В этом разделе мы опишем алгоритм поиска метода оптимального регуляризирующего алгоритма для восстановления решения операторного уравнения (1) и соответствующей погрешности метода.

1) Используя входную информацию $\{\delta, h_A, h_B, N, K, M, C_1(s), C_2(s), u_\delta, \gamma_1, \gamma_2, \hat{A}, \hat{B}, \varepsilon_0\}$, вычисляем числа $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ по формуле (8) и с помощью схемы расширяющихся компактов находим число n_0 (см. раздел 3). Вычисляем погрешность задачи $\bar{\varepsilon}$ по формуле (10).

2) Для каждого значения индекса $k = \overline{1, K}$ находим супремум ассоциированной задачи (21).

3) Строим сингулярное разложение $\hat{A} = E\Sigma F^T$ матрицы $\hat{A}$ и проверяем условие (У5). Если это условие выполнено, то переходим к шагу 4. В противном случае переходим к шагу 7.

4) Вычисляем порядок задачи J в (35) и полагаем $j = J$. Если $J \geqslant 1$, то переходим к шагу 4a; в противном случае переходим к шагу 7.

4a) Задаем малое число $\varepsilon_0 = 10^{-j}$, вычисляем число α_0 с помощью метода из леммы 4. Проверяем условие (У6). Если это условие выполнено, то с помощью леммы 5 находим число регуляризации κ и переходим к шагу 5. Если условие (У6) не выполнено, то проверяем условие $j \geqslant 2$. Если оно выполнено, то переопределяется j ($j = j - 1$) и переходим к шагу 4a; в противном случае переходим к шагу 7.

5) С помощью полученного числа регуляризации κ вычисляем параметр регуляризации α либо априорным способом $\alpha = \alpha_1$ из (40), либо апостериорным способом $\alpha = \alpha_2$ из (41).

6) Вычисляем матрицу множителей Лагранжа Λ по формуле (28) с полученным на шаге 5 параметром регуляризации α и переходим к шагу 8.

7) Вычисляем множитель Лагранжа (матрицу) Λ по формуле (26) или по формуле (27).

8) Решение нашей задачи будет следующим: матрица Λ — метод оптимального (и регуляризирующего, если выполнены условия (У5) и (У6)) алгоритма задачи (1), вектор $\Lambda\mathbf{u}$ — оптимальное (регуляризирующее) приближенное решение восстановленной конечномерной аппроксимации функции $\{z(x_k)\}_{k=1}^K$, $\Delta_k^2(\eta, R_\eta^k) = z_k$, $k = \overline{1, K}$, — его соответствующая оптимальная поточечная априорная наихудшая оценка погрешности и $\Delta^2(\eta, R_\eta) = \sum_k z_k$ — общая оптимальная апостериорная наихудшая оценка погрешности нашего алгоритма. Кусочно-линейная функция $\bar{\Pi}_K \Lambda\mathbf{u}$ — это оптимальное (регуляризирующее) приближенное решение исходной бесконечномерной задачи (1).

9. Численный эксперимент. Проиллюстрируем применение описанного алгоритма оптимального восстановления на примере решения обратной краевой задачи для уравнения теплопроводности. Рассмотрим следующую краевую задачу для функции $w : [0, l] \times [0, T] \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t) = \partial^2_{xx} w(x,t), & (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t \in [0;T]. \end{cases} \tag{46}$$

Положим $\bar v(x) := w(x,0)$, $\bar z(x) := w(x,t_0)$ и $\bar u(x) := w(x,T)$.

Известно, что решение уравнения теплопроводности можно записать по формуле

$$w(x,t) = \int\limits_0^l G(x,\xi,t) v(\xi)\, d\xi, \tag{47}$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина, определяемая следующим образом:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \exp\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right).$$

Тогда для каждого фиксированного начального значения времени $t_0 > 0$ следующие утверждения выполнены.

1) Для любого $T > t_0 > 0$ имеем $z(x^z) = \int_0^l G(x^z, x^v, t_0) v(x^v)\, dx^v$.

2) Уравнение теплопроводности можно решать как обратную задачу с истокопредставимым решением $z(x)$: $u(x^u) = \int_0^l G(x^u, x^z, T - t_0) z(x^z)\, dx^z$.

Если $l = 1.0$, $t_0 = 0.02$ и $T = 0.1$, то указанная задача примет форму

$$Az := \int\limits_0^1 G(x^u, x^z, 0.08) z(x^z)\, dx^z = u(x^u),$$

где решение z можно представить в виде $z(x^z) = Bv := \int_0^1 G(x^z, x^v, 0.02) v(x^v)\, dx^v$.

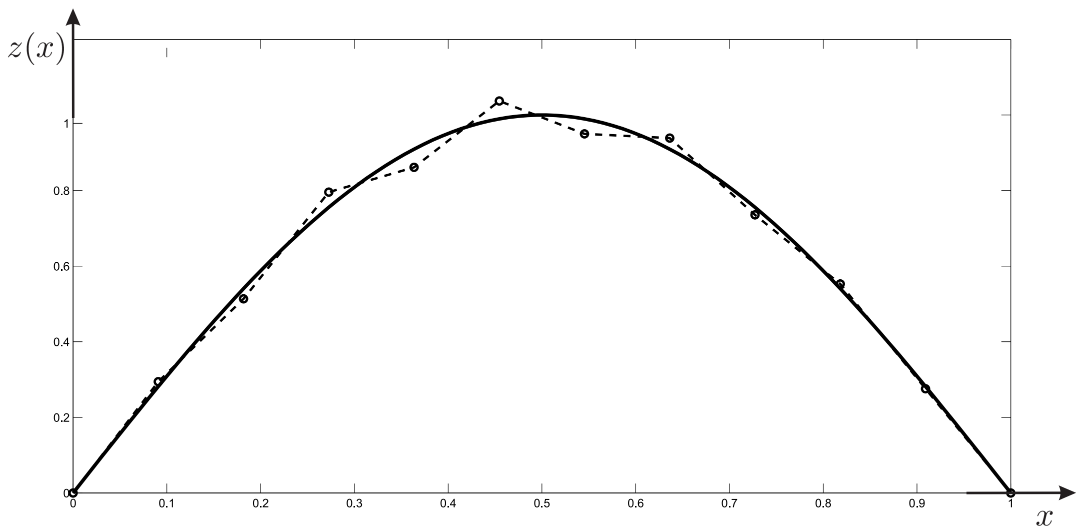

Рис. 1. Результат применения нашего алгоритма: “$- \circ -$” — восстановленное приближенное решение, “$-$” — неизвестное точное решение

Очевидно, что если положить $\bar v(x^v) = \sin(\pi x^v)$, то точное решение $\bar z(x^z)$ примет вид

$$\bar z(x^z) = \sin(\pi x^z) \exp\left(-0.02\pi^2\right),$$

а точная правая часть $\bar u(x^u)$ станет $\bar u(x^u) = \sin(\pi x^u) \exp\left(-0.08\pi^2\right)$. Для проверки разработанных методов была рассмотрена следующая модельная задача. Сначала был смоделирован входной сигнал согласно уравнению (47) для точной функции $\bar v(x^v) = \sin(\pi x^v)$. Далее к точной правой части $\bar u$ добавлялась ошибка (шум) (например, предполагалось, что правая часть возмущается случайной погрешностью,

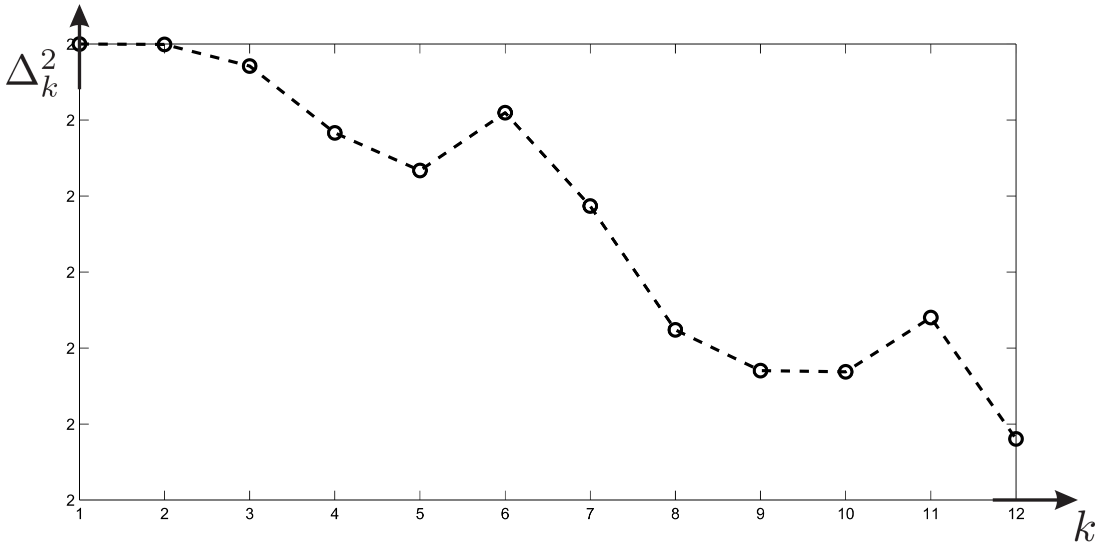

Рис. 2. Оптимальная априорная поточечная наихудшая оценка погрешности метода $\Delta_k^0(\eta, R_\eta^k)$ в каждой точке $k = \overline{1, 12}$

равномерно распределенной на отрезке $[-\delta, \delta]$, где δ составляет 0.1% от максимума значений правой части по координатам). Конечномерную аппроксимацию для функции Грина обозначим через $G^J(x, \xi, t) = 2\sum_{j=1}^{J} \sin(\pi jx)\sin(\pi j\xi)\exp(-(\pi ja)^2 t)$ и $\|G^{J+1}(x, \xi, t) - G^J(x, \xi, t)\| \leqslant h_G$, где $h_G := \min\{h_A, h_B\}$.

Положим $M = 15$, $N = K = 12$, $\delta = h_A = h_B = 0.05$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $C_1(s) = C_2(s) \equiv 1.1$. После вычисления получили следующие ранги матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$: $\operatorname{rank}(A_{15\times12}) = 6$ и $\operatorname{rank}(B_{12\times12}) = 10$. Путем применения нашего алгоритма мы получили оптимальное регуляризирующее приближенное решение, представленное на рис. 1. Далее, с помощью нашего алгоритма мы получили оптимальную апостериорную поточечную наихудшую оценку погрешности метода $\Delta_k^2(\eta, R_\eta^k)$ $(k = \overline{1, 12})$, представленную на рис. 2. Кроме того, оптимальная (общая) апостериорная наихудшая оценка погрешности метода $\Delta^2(\eta, R_\eta) = 23.83$, абсолютная погрешность равна 17.67 и ее соответствующая относительная оценка погрешности равна 0.14 (так как в модельной задаче мы знаем точное решение).

9. Заключение. Предложен метод построения оптимального регуляризирующего алгоритма для решения линейных некорректных задач с использованием априорной информации о решении и продемонстрирована его эффективность. Получены оптимальное регуляризирующее приближенное решение и оптимальная (поточечная и общая) апостериорная наихудшая оценка погрешности метода.

Авторы благодарны А. В. Баеву за ценное обсуждение математических вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
3. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2009.
4. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
5. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1129. Berlin: Springer, 1985. 21–93.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. **50**, № 6. 85–93.
7. *Magaril-Ilyaev G.G., Osipenko K.Y., Tikhomirov V.M.* Optimal recovery and extremum theory // Computational methods and function theory. 2002. **2**, № 1. 87–112.
8. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2000.
9. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дисс. канд. физ.-мат. наук. М., 1965.
10. *Баев А.В.* Применение принципа Лагранжа в задаче оптимального обращения линейного оператора в случае истокообразной представимости точного решения операторного уравнения // Вычислительные методы и

программирование, 2007. **8**. 20–28.
11. *Ягола А.Г., Дорофеев К.Ю.* Метод расширяющихся компактов решения некорректных задач при условии истокопредставимости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1999. № 2. 64–66.
12. *Баев А.В.* Принцип Лагранжа и конечномерная аппроксимация в задаче оптимального обращения линейных операторов // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**. 323–336.
13. *Баев А.В.* Оптимальный регуляризующий алгоритм восстановления функционала в линейных обратных задачах с истокопредставимым решением // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 2008. **48**, № 11. 1933–1941.
14. *Баев А.В.* Оптимальное восстановление и конечномерная аппроксимация в линейных обратных задачах // Матем. сборник. 2008. **199**, № 12. 3–18.
15. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
16. *Titarenko V.N., Yagola A.G.* Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2008. **16**, № 6. 625–638.
17. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
19. *Dantzig G.B.* Linear programming and extensions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1963.
20. *Ye Y.* Interior point algorithm: theory and analysis. New York: Wiley, 1997.
21. *Padberg M.* Linear optimization and extensions. Berlin: Springer, 1999.

Поступила в редакцию
25.09.2013