УДК 519.6

СЕМЕЙСТВО КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. О. Арушанян[1]

Для некоторого класса функций со слабой особенностью построено семейство квадратурных формул с экспоненциальной скоростью сходимости относительно числа узлов. Полученные результаты использованы при решении граничных интегральных уравнений теории гармонического потенциала в областях с угловыми точками.

Ключевые слова: потенциал двойного слоя, интегральные уравнения, угловые точки, сгущающиеся сетки, метод квадратур.

1. Введение. Одним из методов численного решения эллиптических краевых задач в областях сложной формы является метод граничных интегральных уравнений. В граничных интегральных уравнениях неизвестными могут быть функции, имеющие смысл в содержательной постановке задачи, либо вспомогательные функции, по которым решение исходной задачи находится интегрированием. В последнем случае такие уравнения более известны как интегральные уравнения теории потенциала.

При численном решении граничных интегральных уравнений методом квадратур приходится решать системы линейных уравнений с несимметричными заполненными матрицами, поэтому существенно важным становится уменьшение размерности системы за счет повышения точности аппроксимации. Если граница области содержит угловые точки, то задача построения аппроксимирующей линейной системы значительно усложняется, так как соответствующие интегральные уравнения становятся слабо сингулярными. Стандартный подход в этом случае состоит в построении составной квадратурной формулы, элементарные отрезки которой сгущаются к угловым точкам. На каждом элементарном отрезке используется формула с одинаковым числом узлов. Этот подход обеспечивает степенной порядок убывания погрешности приближенного решения при увеличении числа узлов применяемой квадратуры [5–8].

В настоящей статье аппроксимация интегралов в граничных уравнениях строится на основе использования составных квадратурных формул Гаусса, в которых элементарные отрезки сгущаются к угловым точкам границы, а число узлов элементарных формул меняется при приближении к углам. Такой подход позволяет получить экспоненциальную скорость сходимости относительно числа узлов.

Получены следующие основные результаты:

— для специального класса функций со слабой особенностью построено семейство составных квадратурных формул экспоненциальной точности относительно числа узлов;

— получены оценки производных ядер и решений для некоторого типа граничных интегральных уравнений теории потенциала при достаточно общих ограничениях на границу области;

— предложена аппроксимация интегрального уравнения задачи Дирихле для оператора Лапласа в областях с угловыми точками системами линейных алгебраических уравнений на основе построенного семейства составных квадратурных формул.

2. Построение квадратурной формулы для функций со слабой особенностью. Рассмотрим задачу вычисления интеграла

$$\int\limits_0^1 g(t)\,dt,$$

где функция $g(t)$ определена на $(0,1]$ и при некотором $0<\rho<1$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{(n+1)!}{(\rho\, t)^{n-\beta+1}}, \tag{1}$$

где $n=0,1,2,\ldots$, $t\in(0,1]$ и $0<\beta<1$.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; доцент, e-mail: i.arushan@gmail.com

Утверждение 1. *Если функция g удовлетворяет условиям* (1)*, то существует натуральное число N_0, такое, что для любого натурального числа $N > N_0$ может быть построена квадратурная формула*

$$\overline{S}_N(g) = \sum_{i=1}^{n} \overline{A}_i^{(N)} g\big(t_i^{(N)}\big)$$

с $n = n(N)$ узлами, такая, что

$$\left| \int_0^1 g(t)\, dt - \overline{S}_N(g) \right| \leqslant b \exp\big(-c\sqrt{n}\big),$$

где $c_1 N^2 \leqslant n \leqslant c_2 N^2$, постоянные b, c, c_1 и c_2 строго положительны и не зависят от выбора N.

Доказательство. Пусть N — некоторое натуральное число. Построим на отрезке $[0,1]$ сетку

$$0 < t_N < \ldots < t_1 < t_0 = 1,$$

где $t_k = (1+\theta)^{-k}$, $k = 0, 1, \ldots, N$ и $\theta = \sqrt{1-(1-\rho^2)^2}$.

Отметим, что для функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^{t_N} g(t)\, dt \right| \leqslant \mathrm{const}\,(1+\theta)^{-\beta N}.$$

Далее, для каждого отрезка $[t_k, t_{k-1}]$, $k = 0, 1, \ldots, N$, построим квадратурную формулу Гаусса

$$\int_{t_k}^{t_{k-1}} g(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n_k} A_{k,i}\; g(t_{k,i}) + R_k$$

с n_k узлами. Величины n_k выбираются таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} |R_k| \leqslant \mathrm{const}\,(1+\theta)^{-\beta N}. \qquad (2)$$

Для этого при каждом k оценим величину погрешности R_k через число узлов n_k.

Обозначим $t_{k,0} = 0.5(t_k + t_{k-1})$ и выпишем степенной ряд

$$\widehat{g}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z-t_{k,0})^m}{m!} \left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}\, g(t) \right)\Bigg|_{t=t_{k,0}}.$$

Принимая во внимание (1), нетрудно показать, что этот ряд абсолютно сходится в круге $\Omega(t_{k,0}, r_k)$ на комплексной плоскости с центром в точке $t_{k,0}$ и радиусом

$$r_k = 0.5\big(1-(1+\theta)^{-1}\big)(1+\theta)^{2-k},$$

при этом выполняется неравенство

$$\max_{z\in\Omega(t_{k,0}, r_k)} |\widehat{g}(z)| \leqslant \mathrm{const}\,(1+\theta)^{k(1-\beta)}$$

и константа в правой части неравенства не зависит от выбора k.

Таким образом, функция $g(t)$ допускает аналитическое продолжение с отрезка $[t_k, t_{k-1}]$ вещественной оси в эллипс E_k на комплексной плоскости с фокусами в точках $(t_k, 0)$ и $(t_{k-1}, 0)$. Отметим, что этот эллипс проходит через точку $(t_{k,0} - r_k, 0)$ и построенное аналитическое продолжение ограничено величиной порядка $O(1+\theta)^{k(1-\beta)}$. Выписанная оценка является равномерной по k.

Отображение

$$w = \frac{2z - (t_{k-1} + t_k)}{t_{k-1} - t_k}$$

переводит эллипс E_k в эллипс с фокусами в точках $(\pm 1, 0)$ и суммой полуосей

$$Q = 1 + \theta + \sqrt{\theta(2+\theta)} > \frac{1 + \theta(1+\theta)^{-1}}{1 - \theta(1+\theta)^{-1}} > \exp\big(2\theta(1+\theta)^{-1}\big).$$

Используя известный результат [2] о погрешности интегрирования аналитических функций, мы получим оценку для величины погрешности R_k:

$$|R_k| \leqslant \mathrm{const}\,(1+\theta)^{-\beta k} \exp\big(-4n_k\ \theta(1+\theta)^{-1}\big).$$

Для выполнения неравенства (2) достаточно выбрать числа n_k такими, чтобы

$$(1+\theta)^{-\beta k} \exp\big(-4n_k\theta(1+\theta)^{-1}\big) \leqslant \frac{1}{N}\,(1+\theta)^{-\beta N}.$$

Можно положить

$$n_k = \left[\frac{\beta(N-k)\ln(1+\theta) + \ln N}{4\theta(1+\theta)^{-1}}\right] + 1,$$

где через $[\ldots]$ обозначена целая часть соответствующего числа.

Если рассмотренные построения выполнить на всех отрезках $[t_k, t_{k-1}]$, $k = 1, \ldots, N$, то можно построить составную квадратурную формулу с общим числом узлов

$$n = n(N) = \sum_{k=1}^{N} n_k \leqslant \left[\frac{\beta N^2 \ln(1+\theta) + N\big(2\ln N - \beta\ln(1+\theta)\big)}{8\,\theta(1+\theta)^{-1}}\right] + N.$$

При таком выборе узлов справедлива оценка

$$\left|\int_0^1 g(t)\,dt - \overline{S}'_N(g)\right| \leqslant \mathrm{const}\exp(-c_N\sqrt{n}),$$

где

$$c_N = 2\sqrt{\frac{\beta\ \theta\ln(1+\theta)}{1+\theta}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Утверждение доказано.

3. Граничное интегральное уравнение теории потенциала. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей Γ, являющейся замкнутой кривой без самопересечений и допускающей следующее параметрическое представление:

$$\Gamma = \Big\{x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big),\ s \in [0, T],\ x(0) = x(T)\Big\}.$$

Здесь s — натуральный параметр (параметр длины).

В дальнейшем будем считать, что

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j,$$

где Γ_j — отрезок, соединяющий угловые точки P_j и P_{j+1} (считая $P_0 = P_J$). Обозначим через α_j угол между Γ_{j-1} и Γ_j в вершине P_j, обращенный внутрь области Ω, при этом $0 < \alpha_j < 2\pi$ для любого j.

Свяжем с угловыми точками P_j набор чисел $\{s_j\}$, $j = 0, \ldots, J$, так, что

$$x(s_j) = P_j, \quad j = 0, \ldots, J,$$

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{J-1} < s_J = T.$$

В описанной выше области Ω рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= 0, \qquad x \in \Omega, \\ u(x) &= F(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать, что функция F является бесконечно дифференцируемой всюду на границе Γ, кроме, быть может, угловых точек, где допускаются особенности вида

$$(x - P_j)^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{4}$$

Решение задачи (3) будем искать в виде потенциала двойного слоя

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \Phi(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \, dl_y$$

с неизвестной плотностью распределения Φ, которая является решением граничного интегрального уравнения

$$\Phi(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \Phi(y) \, \frac{\partial}{\partial n_y} \ln|x-y| \, dl_y = 2F(x), \quad x \in \Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{J-1} P_j. \tag{5}$$

Перейдем к рассмотрению вопросов, связанных с численным решением граничного интегрального уравнения (5).

4. Метод квадратур. Учитывая введенную выше параметризацию границы Γ, обозначим

$$\varphi_k(s) = \Phi_k\big(x(s)\big), \quad f_k(s) = 2F_k\big(x(s)\big), \quad k = 0, 1, 2.$$

Если t является внутренней точкой отрезка $[s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, J-1$, то определим функцию $K(s,t)$ по формуле

$$K(s,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \, \dfrac{x_1'(t)\big(x_2(s) - x_2(t)\big) - x_2'(t)\big(x_1(s) - x_1(t)\big)}{\big(x_1(s) - x_1(t)\big)^2 + \big(x_2(s) - x_2(t)\big)^2}, & t \neq s, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \, \dfrac{x_1'(t) x_2''(t) - x_2'(t) x_1''(t)}{\big(x_1'(t)\big)^2 + \big(x_2'(t)\big)^2}, & t = s. \end{cases}$$

Из геометрических свойств потенциала двойного слоя следует, что при $s \in [0,T] \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{J} s_j$ выполнено соотношение

$$\int\limits_0^T K(s,t) \, dt = 1.$$

Тогда уравнение (5) может быть записано в эквивалентной форме

$$2\varphi(s) + \int\limits_0^T K(s,t) \, \big(\varphi(t) - \varphi(s)\big) \, dt = f(s), \quad s \in [0,T]. \tag{6}$$

Основное преимущество такого подхода состоит в повышении гладкости подынтегральных функций вблизи угловых точек границы Γ. Известно [4, 9], что для любой непрерывной T-периодической функции f уравнение (6) однозначно разрешимо в пространстве непрерывных T-периодических функций.

Перейдем к описанию принципиальной схемы метода квадратур. Пусть $\{n_k\}$ — некоторая возрастающая бесконечная последовательность натуральных чисел. Будем считать, что для каждого $n = n_k$ построена квадратурная формула

$$\int\limits_0^T g(t) \, dt \approx \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g\big(t_j^{(n)}\big) \equiv S_n(g).$$

Перепишем уравнение (6) в операторной форме

$$\varphi + K\varphi = f,$$

где через K обозначен линейный ограниченный оператор

$$(Kv)(s) = v(s) + \int\limits_0^T K(s,t)\big(v(t) - v(s)\big) \, dt,$$

определенный в пространстве T-периодических непрерывных функций.

Введенное семейство квадратурных формул позволяет рассмотреть следующий линейный ограниченный оператор:

$$(K_n v)(s) = v(s) + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\big(v(t_j^{(n)}) - v(s)\big).$$

Пусть функция φ_n является решением линейного уравнения

$$\varphi_n(s) + K_n \varphi_n(s) = f(s), \quad s \in [0, T]. \tag{7}$$

Поиск решения уравнения (7) может быть сведен к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$2\Phi_i^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}\big)\Big(\Phi_j^{(n)} - \Phi_i^{(n)}\Big) = f\big(t_i^{(n)}\big). \tag{8}$$

Действительно, величины $\Phi_i^{(n)} = \varphi_n\big(t_i^{(n)}\big)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют системе (8) для любого решения φ_n уравнения (7). Обратно, если набор $\Phi_i^{(n)}$, $n = 1, \dots, n$, является решением системы (8), то функция

$$\varphi_n(s) = \left(f(s) - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\Phi_j^{(n)}\right)\left(2 - \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K\big(s, t_j^{(n)}\big)\right)^{-1} \tag{9}$$

удовлетворяет уравнению (7).

5. Асимптотика решений граничных интегральных уравнений вблизи угловых точек. Для построения квадратурных формул с высоким порядком точности необходима информация о поведении решения интегрального уравнения (6) вблизи угловых точек границы.

В дальнейшем будем считать, что функция f бесконечно дифференцируема в любой точке $s \in (s_j, s_{j+1})$, $j = 1, \dots, J-1$, и при некотором $0 < \gamma < 1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{d^n f(s)}{ds^n}\right| \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{i=0}^{1} \frac{n!}{\big|x(s) - x(s_{j+i})\big|^{n-\gamma}}\right).$$

Для каждого $j = 0, \dots, J$ введем в рассмотрение величины β_j, такую, что

$$\beta_j = \pi\big(\pi + |\pi - \alpha_j|\big)^{-1}.$$

Тогда справедлив следующий результат [3, 4].

Рассмотрим набор чисел λ_j, $j = 0, 1, \dots, J$, таких, что $0 < \lambda_j < \beta_j$. Существует постоянная $c(\Gamma, f, \lambda)$, зависящая только от вида границы Γ, функции f и набора чисел λ, такая, что для решения уравнения (6) при каждом $s \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\big|\varphi(s) - \varphi(s_j)\big| \leqslant c(\Gamma, f, \lambda)\,\big|x(s) - x(s_j)\big|^{\lambda_j}.$$

6. Оценка производных. В дальнейшем для оценки производных подынтегральных выражений в уравнении (8) нам потребуется явный вид производных любого порядка функции $K(s,t)$ по каждой из переменных.

Рассмотрим участок границы между угловыми точками P_j и P_{j+1}. Не ограничивая общности, будем считать, что при $s \in [s_j, s_{j+1}]$ имеем

$$x_1(s) = s - s_j, \quad x_2(s) = 0.$$

Отметим, что если s и t лежат на одном отрезке $[s_j, s_{j+1}]$, то $K(s,t) = 0$.

Пусть $t \in (s_j, s_{j+1})$, $s \notin [s_j, s_{j+1}]$. Тогда

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x_2(s)}{\big((t - s_j) - x_1(s)\big)^2 + \big(x_2(s)\big)^2},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^m\, m! \sin\Big((m+1)\operatorname{arcctg}\frac{(t-s_j)-x_1(s)}{x_2(s)}\Big)}{\Big(\big((t-s_j) - x_1(s)\big)^2 + \big(x_2(s)\big)^2\Big)^{m+1/2}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь случай, когда $s \in (s_j, s_{j+1})$, $t \in [s_{j-1}, s_j)$. Получим

$$x_1(t) = (s_j - t)\cos\alpha_j, \quad x_2(t) = (s_j - t)\sin\alpha_j,$$

$$K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(s-s_j)\sin\alpha_j}{\big((s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j\big)^2 + \big((s_j-t)\sin\alpha_j\big)^2},$$

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}\,K(s,t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^m\, m!\Big(\sin\Big(\alpha_j + (m+1)\,\mathrm{arcctg}\,\frac{(s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j}{(s_j-t)\sin\alpha_j}\Big)\Big)}{\Big(\big((s-s_j)-(s_j-t)\cos\alpha_j\big)^2 + \big((s_j-t)\sin\alpha_j\big)^2\Big)^{m+1/2}}, \quad m = 1,2,\ldots$$

Оценим теперь производные решения $\varphi(s)$ уравнения (6) на $(s_j,\ s_{j+1/2}]$. Для любой точки $s \in (s_j,\ s_{j+1/2}]$ имеем

$$\varphi(s) = -\int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi(t)-\varphi(s_j)\big)\,dt - \varphi(s_j) + f(s).$$

Продифференцируем правую часть этого равенства m раз по s. Поскольку все функции в правой части дифференцируемы, то существуют и соответствующие производные функции $\varphi(s)$:

$$\frac{d^m\varphi(s)}{ds^m} = -\int\limits_0^T \left(\frac{\partial^m}{\partial s^m}\,K(s,t)\right)\big(\varphi(t)-\varphi(s_j)\big)\,dt + \frac{d^m f(s)}{ds^m}.$$

Учитывая свойства функции f и используя явные формулы для производных ядра $K(s,t)$, для каждого $\lambda \in \Big(0, \min\{\gamma,\ \pi\big(\pi + |\pi-\alpha_j|\big)^{-1}\}\Big)$ получим оценку

$$\left|\frac{d^m\varphi(s)}{ds^m}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{m!}{\Big(d_j\big|x(s)-x(s_j)\big|\Big)^{m-\lambda}},$$

где

$$d_j = \begin{cases} \sqrt{1-\cos\alpha_j}\,, & \alpha_j \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi),\\ 1, & \alpha_j \in [\pi/2,\pi)\cup(\pi,3\pi/2]. \end{cases}$$

Тогда производные функции $K(s,t)\big(\varphi(t)-\varphi(s)\big)$, стоящей под интегралом в уравнении (6), на интервале $(s_j, s_{j+1/2}]$ удовлетворяют неравенствам (1), причем можно положить

$$\rho = d_j, \quad \beta = \lambda.$$

Таким образом, условия утверждения 1 выполнены; следовательно, для решения φ уравнения (6) справедливо следующее

Утверждение 2. *Если функция f удовлетворяет условиям (4), то существует натуральное число n_1, такое, что для любого натурального $n > n_1$ может быть построена квадратурная формула с узлами $\{t_j^{(n)}\}$ и коэффициентами $\{A_j^{(n)}\}$, $j = 1,2,\ldots,n$, для которой справедливо неравенство*

$$\max_{s\in[0,T]}\left|\int\limits_0^T K(s,t)\big(\varphi(t)-\varphi(s)\big)\,dt - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K\big(s,t_j^{(n)}\big)\big(\varphi(t_j^{(n)})-\varphi(s)\big)\right| \leqslant b_0\exp\big(-c_0\sqrt{n}\big),$$

причем все постоянные строго положительны и не зависят от выбора n.

7. Сходимость сходимости метода. Для доказательства однозначной разрешимости уравнения (7) достаточно показать существование и равномерную ограниченность последовательности операторов $\big\{(I+K_n)^{-1}\big\}$. Обобщением результатов из [1] является

Утверждение 3. *Если область Ω отвечает указанным выше условиям, то существует целое $n_2 > 0$, такое, что для каждого $n \geqslant n_2$ справедливо неравенство*

$$\big\|(I+K_n)^{-1}\big\|_C \leqslant \mathrm{const}_0,$$

причем постоянная в правой части этого неравенства не зависит от выбора n.

Отсюда следует экспоненциальная скорость сходимости предложенного метода. Действительно, из уравнений

$$\varphi + K\varphi = f, \quad \varphi_n + K_n\varphi_n = f$$

получим

$$(I + K_n)(\varphi - \varphi_n) = (K_n - K)\varphi;$$

следовательно,

$$\big\|\varphi - \varphi_n\big\|_C = \big\|(I + K_n)^{-1}(K_n - K)\varphi\big\|_C \leqslant \mathrm{const}_0 \, \big\|(K_n - K)\varphi\big\|_C = O\big(\exp(-c_0\sqrt{n})\big).$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11–01–00767-а, 12–01–00960-а, 12–01–00283-а и 12–01–91330–ННИО-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян И.О.* О численном решении граничных интегральных уравнений второго рода в областях с угловыми точками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. **36**, № 5. 537–548.
2. *Бахвалов Н.С.* Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. **7**, № 5. 1011–1020.
3. *Заргарян С.С.* Об асимптотике решений системы сингулярных интегральных уравнений, порожденной уравнениями Ламе в окрестности угловых точек контура // Докл. АН Арм. ССР. 1983. **77**, № 4. 437–439.
4. *Мазья В.Г.* Граничные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Т. 27. М.: ВИНИТИ, 1988. 131–228.
5. *Bremer J., Rokhlin V.* Efficient discretization of Laplace boundary integral equations on polygonal domains // J. Comput. Phys. 2010. **229**, N 7. 2507–2525.
6. *Graham I.G., Chandler G.A.* High-order methods for linear functionals of solutions of second kind integral equations // SIAM J. Numer. Anal. 1988. **25**, N 5. 1118–1137.
7. *Helsing J., Ojala R.* Corner singularities for elliptic problems: integral equations, graded meshes, quadrature, and compressed inverse preconditioning // J. Comput. Phys. 2008. **227**, N 20. 8820–8840.
8. *Kress R.* A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners // Numer. Math. 1990. **58**, N 2. 145–161.
9. *Kress R.* Linear integral equations. Berlin: Springer, 2012.

Поступила в редакцию
11.09.2013