

УДК 519.63

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АДАПТИВНЫХ МАСС: ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА С ПЛАЗМОЙ

Т. В. Снытникова<sup>1</sup>, Г. И. Дудникова<sup>2</sup>, В. А. Вшивков<sup>1</sup>

Предложена модификация метода частиц в ячейках с адаптивными массами, которая позволяет динамически изменять число частиц в ячейке, не нарушая законы сохранения. В областях низкой плотности масса (заряд) модельных частиц уменьшается за счет увеличения числа частиц. В областях высокой плотности масса (заряд) модельных частиц увеличивается. Таким перераспределением удастся уменьшить уровень счетных шумов в областях пониженной плотности при сравнительно небольшом увеличении общего числа частиц. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-00178, 11-01-00249, 12-01-00234 и 12-07-00065).

**Ключевые слова:** метод частиц в ячейках, уравнение Власова, уравнения Максвелла, динамическое изменение числа частиц.

**1. Введение.** Метод частиц в ячейках разработан в середине прошлого века и широко используется для решения задач газовой динамики и физики плазмы [1–7].

В методе частиц в ячейках моделируемая среда представляется в виде конечного множества модельных частиц. Каждая частица становится носителем некоторого набора характеристик — атрибутов данной среды.

Модификации метода крупных частиц отличаются в первую очередь видом ядра частиц для расчетов функций в узлах сетки по координатам частиц [8]. Из всех известных ядер при решении реальных физических задач наиболее часто используется ядро PIC (Particle-In-Cell) вследствие разумного соотношения между затратами и получаемой точностью расчетов вместе с относительной простотой реализации численного алгоритма.

Тем не менее, метод частиц в ячейках имеет несколько источников погрешностей. Один из них связан со сравнительно малым числом модельных частиц, используемых в расчетах, по сравнению с реальным числом частиц. Моделирование распределения частиц по нескольким переменным дополнительно увеличивает флуктуации, и традиционный путь их устранения — это увеличивать число частиц во всей области [3, 4, 9]. Однако проблема, связанная с недостаточным числом модельных частиц, усложняется, если в ячейке должно находиться количество вещества меньше, чем представляет одна модельная частица. В таком случае увеличение числа частиц во всей области становится невозможным из-за ограниченности вычислительных ресурсов.

Второй возможный путь — это динамическое изменение числа частиц в ячейке без изменения суммарных признаков частиц. На данный момент известны только два метода по контролю числа частиц, авторы которых проверяют выполнение законов сохранения. Многие авторы не выделяют этот подход в отдельный метод [10, 11] или применяют его для моделирования конкретного вида задач [12], не претендуя на универсальность.

Первый из упомянутых методов рассмотрен в [13, 14]. Метод был построен для решения проблем, возникающих при применении метода частиц в ячейках на адаптивных сетках. Для увеличения числа частиц в ячейке происходит разделение одной частицы на две, а при уменьшении числа частиц частицы попарно объединяются. Если у объединяемых частиц скорости не совпадают, то кинетическая энергия новой частицы будет меньше, поэтому берутся частицы, скорости которых не сильно отличаются. Утверждается, что для адаптивных сеток потеря кинетической энергии является незначительной, порядка нескольких процентов. Однако этот метод плохо подходит для структурированных сеток, потому что потеря энергии становится существенной, если происходит частое удаление частиц.

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; Т. В. Снытникова, науч. сотр., e-mail: snytav@yahoo.com; В. А. Вшивков, профессор, e-mail: vsh@ssd.sscs.ru

<sup>2</sup> Институт вычислительной техники СО РАН, просп. Лаврентьева, д. 6, 630090, Новосибирск; главный науч. сотр.; e-mail: gdudnikova@gmail.com

Второй метод представлен в [15]. В основе этого метода лежит сохранение всех сеточных величин и энергии. Вводятся функции специального вида, учитывающие вклад частиц в каждый узел сетки. Составляется система линейных уравнений с количеством неизвестных, равным количеству узлов в ячейке (4 для двумерных задач, 8 для трехмерных). После решения системы восстанавливаются характеристики новых частиц. Однако в результате решения уравнений могут возникнуть частицы с отрицательной массой. При этом, хотя по пространству частицы распределяются с учетом плотности, характер распределения скоростей может измениться, что является существенным недостатком при моделировании сред, в которых развиваются многопоточные течения.

Метод частиц в ячейке с адаптивными массами в одномерном случае представлен в [16]. При построении метода была поставлена цель получить более универсальный алгоритм, корректно сохраняющий особенности движения частиц и не допускающий увеличения счетных шумов. Этот метод (как и метод [15]) основан на коллективном вычислении и сохранении средних значений, но они считаются в ячейках вспомогательной сетки. В отличие от методов [13, 14] введены критерии для определения оптимального числа частиц в ячейке [17].

Идея о необходимости выделения области, в которых модельных частиц должно быть больше или меньше, встречается также в работе [12] для гидродинамических задач несжимаемой жидкости, связанных с исследованием падения капли в воду. В ней авторы для вычислений числа и размера таких областей используют расстояние до границы поверхности и число Рейнольдса.

Настоящая статья посвящена расширению метода на двумерный случай. Во втором разделе приводится метод частиц в ячейках с адаптивными массами в общем случае и его двумерный вариант. В третьем разделе рассмотрена задача взаимодействия лазерного импульса с плазмой. На ее примере описаны особенности использования метода для решения релятивистских задач.

**2. Метод частиц в ячейках с адаптивными массами.** При разработке метода контроля количества частиц в ячейке необходимо ответить на два вопроса:

- 1) когда и до какого уровня нужно изменять число частиц в ячейке, т.е. определить пороговые функции;
- 2) каким образом вычислять новые характеристики частиц.

Обычно основное внимание уделяют второму вопросу, обходя стороной первый. Проведенное в [17] исследование показало, что эффективность метода контроля количества частиц зависит от условий его применения, т.е. от ответа на первый вопрос. Здесь под эффективностью понимается уменьшение потери энергии и уровня счетных шумов. Ниже мы рассмотрим подробнее возможные ответы на первый вопрос.

**2.1. Пороговые функции.** Под пороговыми функциями понимается рекомендованное число частиц в ячейке, при этом подразумевается наличие диапазона допустимых значений. Иными словами, число частиц в ячейке увеличивается/уменьшается до рекомендованного числа, только если число частиц в ячейке выходит за пределы диапазона допустимых значений.

В методах, рассмотренных во введении, за пороговые функции берется константа: количество частиц изменяется, если их число в ячейке выходит за пределы  $[N_{low}, N_{high}]$ . Однако это хотя и самый простой, но не единственный вариант пороговых функций.

Можно выделить другие виды пороговых функций:

— пороговые функции, усредненные по всей области: за рекомендованное число частиц берется значение функции плотности  $N(\rho) = \frac{\rho}{\rho^*} n^*$ , где  $\rho = \max(\rho_{i-1}, \rho_i)$  — максимум плотности в узлах  $i$ -й ячейки,  $\rho^*$  — средняя плотность по всей области и  $n^*$  — среднее число частиц в ячейках; тогда границы диапазона допустимых значений вычисляются по формулам  $N_{low}(\rho) = \frac{2}{3} N(\rho)$  и  $N_{high}(\rho) = 2N(\rho)$ ;

— локально-усредненные функции [17]: число частиц выбирается исходя из значений, усредненных по соседним ячейкам; такие функции должны удовлетворять следующим условиям:

- 1) локальность: зависимость от значений ближайших ячеек (узлов);
- 2) прямая зависимость массы частиц от плотности: чем больше плотность, тем больше может быть масса частиц в ячейке; чем меньше плотность, тем меньше должна быть масса частиц;
- 3) при добавлении частиц масса частиц в ячейке должна стать меньше, чем 1.1 средней массы области локализации;
- 4) при удалении частиц шум в узлах не должен возрастать: масса частиц может увеличиться до минимума из средних масс соседних ячеек.

Для удовлетворения условиям, приведенным выше, необходимо знать не только число частиц в ячейке, но и их среднюю массу. Целые индексы используются для узлов, половинные — для ячеек. В одномерном случае локализация проводится по 5 ячейкам и 4 узлам. Тогда значение рекомендованной средней мас-

сы  $am'_i$  вычисляется по следующей формуле:  $am'_{i-1/2} = 0.5(\rho_{i-1} + \rho_i) 0.2 \sum_{k=-2}^2 am_{i+k-1/2} \left( 0.25 \sum_{k=-2}^1 \rho_{i+k} \right)^{-1}$ .

Пороговая функция для добавления частиц:  $am_{i-1/2} > 1.1am'_{i-1/2}$ . Число частиц в ячейке увеличивается до  $n'_{i-1/2} = n_{i-1/2} \frac{am_{i-1/2}}{\min(am'_{i-1/2}, am_{i-3/2}, am_{i+1/2})}$ .

Пороговая функция для удаления:  $am_{i-1/2} < 0.9am'_{i-1/2}$ . Число частиц в ячейке уменьшается до  $n'_{i-1/2} = n_{i-1/2} \frac{am_{i-1/2}}{\min(am'_{i-1/2}, am_{i-3/2}, am_{i+1/2})}$ . В двумерном случае локализация проводится по 25 ячейкам и 16 узлам.

В статье [17] рассматривалось применение различных пороговых функций на примере решения одномерной задачи о распаде произвольного разрыва плотности ионов в неизотермической плазме. Было показано, что третий вид пороговых функций дает лучший результат по уровню шумов и сохранению энергии, в то время как первый для класса задач (например, тех, где есть разрыв плотности) приводит к значительному увеличению счетного шума.

**2.2. Вспомогательная сетка.** После того как решено, когда и до какого уровня изменять число частиц в ячейке, нужно решить, каким образом это делать. Заметим, что средние величины не сохраняют информацию о тонких эффектах, таких как сгущение частиц вокруг нескольких центров по скорости или пространству внутри ячейки.

Чтобы сохранить особенности расположения частиц внутри ячейки, вводится вспомогательная сетка (рис. 1). Для одномерных задач вспомогательная сетка двумерная: по координате и по скорости, при этом достаточна сетка  $3 \times 3$ . Для двумерной задачи вспомогательная сетка должна быть четырехмерной (2 размерности по пространству и 2 размерности по скоростям), т.е. состоять из  $2^4$  ячеек. В трехмерном случае размерность возрастает до шести, а количество ячеек до 64. Объяснение этого приводится ниже при распределении частиц по ячейкам вспомогательной сетки. Заметим, что эта сетка не хранится постоянно, а необходима только для подсчета в ее ячейках некоторых величин.

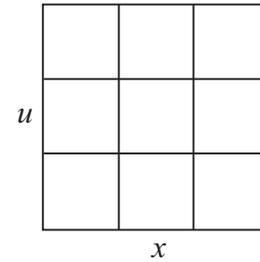


Рис. 1. Вспомогательная сетка в одномерном случае

Итак, в каждой ячейке вспомогательной сетки считаются следующие значения, соответствующие законам сохранения:

- полная масса:  $M^i = \sum m_j$ ;
- положение центра масс:  $\bar{X}^i = \frac{1}{M^i} \sum m_j x_j$ ,  $\bar{Y}^i = \frac{1}{M^i} \sum m_j y_j$ ;
- средняя скорость:  $\bar{V}_x^i = \frac{1}{M^i} \sum m_j v_{xj}$ ,  $\bar{V}_y^i = \frac{1}{M^i} \sum m_j v_{yj}$ ;
- момент импульса;
- энергия.

Здесь индекс  $i$  — номер ячейки вспомогательной сетки, а  $j$  — номер частицы, попавшей в эту ячейку. Перед тем, как вычислять характеристики новых частиц, необходимо распределить частицы по ячейкам вспомогательной сетки.

На первом шаге вычисляется  $k^i = \left\lceil \frac{N^* M^i}{\sum M^i} + 0.7 \right\rceil$ . Напомним, что  $N^*$  — число частиц, полученное

пороговой функцией.

На втором шаге, при необходимости,  $k^i$  корректируется, чтобы выполнялись законы сохранения массы и энергии. Для этого проверяется выполнение двух условий:

1)  $k^i = 0$ ,  $M^i > 0$ , т.е. в ячейку вспомогательной сетки частицы попадали, но их общая масса не достаточна для расположения частицы; в этом случае, чтобы предотвратить потерю массы, необходимо положить  $k^i = 1$ ;

2)  $k^i \leq 1$ ,  $Q^i - Q(\bar{V}^i) > 0$ , т.е. средняя скорость не может обеспечить выполнение закона сохранения энергии; в этом случае, чтобы не допустить потери энергии, необходимо ввести разброс скорости, но для этого нужны хотя бы две частицы, т.е.  $k^i = 2$ .

Небольшая вспомогательная сетка обеспечивает возможность изменения числа частиц. Если при добавлении каждая частица попадает в отдельную ячейку, то число частиц практически не изменится за счет округления. В то же время, удаление частиц происходит за счет тех ячеек, в которые попало не

менее трех частиц. Поэтому 9 ячеек для одномерных задач и 16 для двумерных являются оптимальным размером вспомогательной сетки.

После вычисления числа частиц масса вычисляется по формуле:  $m'_j = M^i/k^i$ .

**2.3. Вычисление характеристик частиц.** Итак, необходимо вычислить для новых частиц координаты и скорости (импульсы) таким образом, чтобы выполнялись основные законы сохранения. Они складываются из средних величин (для сохранения центра масс и импульса системы) и разброса значений (для сохранения энергии и момента импульса). Для одномерной задачи найти разброс величин не составляет труда, поскольку скорости и координаты независимы.

В некоторых случаях удается перейти в систему координат, где разбросы значений по координатам и скоростям будут не сильно связаны.

В общем случае новые значения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_j &= \bar{X} + \delta x_j, & \sum \delta x_j &= 0, & y_j &= \bar{Y} + \delta y_j, & \sum \delta y_j &= 0, \\ v_{xj} &= \bar{V}_x + \delta v_{xj}, & \sum \delta v_{xj} &= 0, & v_{yj} &= \bar{V}_y + \delta v_{yj}, & \sum \delta v_{yj} &= 0. \end{aligned}$$

Если задача трехмерная, то вычисляются  $z_j$  и  $v_{z,j}$ .

Для поиска добавочных величин выбирается случайная последовательность чисел со средним, равным 0:  $\Delta X_1, \dots, \Delta X_n$ , при этом будем считать, что  $\delta x_j = \beta_x \Delta X_j$ , где  $|\beta_x| \leq 1$ . Эта операция прodelьвается для всех наборов величин, которые необходимо вычислить. После подстановки в законы сохранения получается система уравнений и неравенств относительно неизвестных  $\beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_{vx}, \beta_{vy}, \beta_{vz}$  (неравенства возникают из области значений неизвестных). Решение этой системы дает все необходимые значения координат и скоростей.

Таким образом значительно уменьшается количество неизвестных. Если из-за нелинейности законов сохранения получается сложная система уравнений, то ее можно упростить путем разложения некоторых функций в ряд Тейлора, ограничиваясь второй производной.

Рассмотрим сказанное на конкретных примерах.

**2.3.1. Одномерная задача в декартовых координатах.** Как уже упоминалось, поиск коэффициентов в одномерном случае не составляет труда. Опустим верхние индексы ячеек вспомогательной сетки, чтобы не перегружать формулы.

В ячейках вспомогательной сетки посчитаны:  $k$  — число частиц,  $M$  — полная масса,  $\bar{X}$  — положение центра масс,  $\bar{V}$  — средняя скорость,  $Q = 0.5 \sum m_j v_j^2$  — кинетическая энергия. Выбираются случайным образом  $\Delta X_i$  и  $\Delta V_i$ . Подставляем в закон сохранения энергии:

$$2Q = \sum m_i (\bar{V} + \beta_{vx} \Delta V_i)^2 = \frac{M}{k} \sum (\bar{V}^2 + 2\beta_{vx} \bar{V} \Delta V_i + \beta_{vx}^2 \Delta V_i^2) = M \left( \bar{V}^2 + \frac{\beta_{vx}^2}{k} \sum \Delta V_i^2 \right).$$

Получаем систему  $\beta_{vx}^2 = \frac{k}{\sum \Delta V_i^2} \left[ \frac{2Q}{M} - \bar{V}^2 \right], \quad |\beta_{vx}| \leq 1, \quad |\beta_x| \leq 1.$

**2.3.2. Двумерная задача в декартовых координатах.** В двумерном случае в ячейках вспомогательной сетки считаем: число частиц  $k$ , полная масса  $M$ , положение центра масс  $\bar{X}, \bar{Y}$ , средняя скорость  $\bar{V}_x, \bar{V}_y$ , момент импульса  $I_x = \frac{\sum m_j x_j v_{yj}}{M}, I_y = \frac{\sum m_j y_j v_{xj}}{M}, L = \frac{\sum m_j v_{xj} v_{yj}}{M}$ , кинетическая энергия  $Q = \sum m_j (v_{xj}^2 + v_{yj}^2)$ .

Заметим, что в отличие от момента импульса кинетическая энергия вычисляется не по координатам, а суммарно. Поэтому для определенности системы берется величина  $L$ , которая отражает корреляцию компонент скоростей по координатам.

При подстановке искомых величин получается следующая система уравнений:

$$a \beta_{vx}^2 + b \beta_{vy}^2 = Q^*, \quad \beta_{vx} \beta_{vy} = L^*, \quad \beta_x \beta_{vy} = Ix^*, \quad \beta_y \beta_{vx} = Iy^*.$$

Здесь  $a = \sum \Delta V_{xj}^2, b = \sum \Delta V_{yj}^2, Q^* = k \left( \frac{2Q}{M} - (\bar{V}_x^2 + \bar{V}_y^2) \right),$

$$L^* = k \frac{L - \bar{V}_x \bar{V}_y}{\sum \Delta V_{xj} \Delta V_{yj}}, \tag{1}$$

$$Ix^* = k \frac{Ix - \bar{X}\bar{V}_y}{\sum \Delta X_j \Delta V_{yj}}, \quad Iy^* = k \frac{Iy - \bar{Y}\bar{V}_x}{\sum \Delta Y_j \Delta V_{xj}}.$$

Решение ищется в области  $|\beta_{vx}| \leq 1$ ,  $|\beta_{vy}| \leq 1$ ,  $|\beta_x| \leq 1$ ,  $|\beta_y| \leq 1$ .

### 3. Взаимодействие лазерного импульса с плазмой.

**3.1. Постановка задачи.** Рассмотрена задача в следующей постановке [5]. В области, имеющей форму прямоугольника, находится фольга, моделируемая как тонкий слой плазмы, состоящей из электронов и ионов одного типа. На левой границе области возбуждаются электрическое и магнитное поля, моделирующие лазерный импульс. Импульс взаимодействует с фольгой, частично отражаясь и проходя через нее. Режимы проникновения и отражения лазерного импульса зависят от его характеристик и плотности плазмы.

Система уравнений в безразмерной форме состоит из кинетических уравнений для ионной и электронной компонент  $\frac{dp_i}{dt} = k(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}])$ ,  $\frac{dp_e}{dt} = -(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}])$ ,  $\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \mathbf{v}_\alpha$  и уравнений Максвелла  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{j}$ ,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ . Здесь индексом  $\alpha = i, e$  обозначаются соответственно ионы или электроны,  $k = m_e/m_i$  — отношение масс электронов и ионов,  $p_\alpha = \gamma_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  — релятивистский импульс частиц,  $\gamma_\alpha^{-1} = \sqrt{1 - v_\alpha^2}$ .

В качестве масштабов для обезразмеривания выбраны величины: длина волны лазерного импульса  $\lambda$ , период волны лазерного импульса  $t_0 = 2\pi/\omega_0$  ( $\omega_0$  — частота электромагнитного импульса), скорость света  $c$ , напряженность электрического поля  $\mathbf{E}_0 = \frac{m_e c \omega_0}{2\pi e}$ , плотность плазмы  $n_0 = \frac{m_e \omega_0^2}{16\pi^3 e^2}$ .

Плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{j}$  удовлетворяют уравнению неразрывности  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ .

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) внутри области электрическое и магнитное поля равны нулю:  $\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{B}(x, y) = 0$ .

На рис. 2 приведено отношение плотности плазмы к критической в зависимости от координаты  $x$  при  $t = 0$ . По координате  $y$  плотность в начальный момент времени не меняется.

Граничные условия ставятся следующим образом. На границе  $x = 0$  задаются электрическое и магнитное поля как функции времени и координаты  $y$ . В зависимости от выбора этих функций можно получить различным образом локализованный электрический импульс, моделирующий лазерный. На противоположной границе ( $x = L_x$ ) задаются условия, позволяющие электромагнитным волнам свободно покинуть расчетную область.

На боковых границах  $y = 0, L_y$  граничные условия формулируются так, чтобы они не влияли на процессы, протекающие внутри области решения. Здесь были использованы периодические граничные условия.

Метод решения подробно описан в [5].

**3.2. Особенности метода для релятивистских задач.** В разделе 2.2 использовались классические законы сохранения, но данная задача относится к релятивистским. Поэтому возникает вопрос: в какой форме брать законы сохранения?

Заметим, что в первую очередь должны сохраняться силы, действующие на модельную среду, которые, в свою очередь, определяют законы сохранения. В рассматриваемой задаче — это плотности токов.

Для вычисления плотности токов используется схема [5]

$$\begin{aligned} J_{x,i,l-1/2}^{.m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} (1 - \delta_y), & J_{x,i,l+1/2}^{.m+1/2} &= q \frac{\Delta x}{\tau} \delta_y, \\ J_{y,i-1/2,l}^{.m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} (1 - \delta_x), & J_{y,i+1/2,l}^{.m+1/2} &= q \frac{\Delta y}{\tau} \delta_x, \\ J_{z,i-1/2,l-1/2}^{.m+1/2} &= qv_z^{m+1/2} \left[ (1 - \delta_x)(1 - \delta_y) + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], & J_{z,i-1/2,l+1/2}^{.m+1/2} &= qv_z^{m+1/2} \left[ (1 - \delta_x)\delta_y + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], \\ J_{z,i+1/2,l-1/2}^{.m+1/2} &= qv_z^{m+1/2} \left[ \delta_x(1 - \delta_y) + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], & J_{z,i+1/2,l+1/2}^{.m+1/2} &= qv_z^{m+1/2} \left[ \delta_x \delta_y + \frac{\Delta x \Delta y}{12h_x h_y} \right], \end{aligned}$$

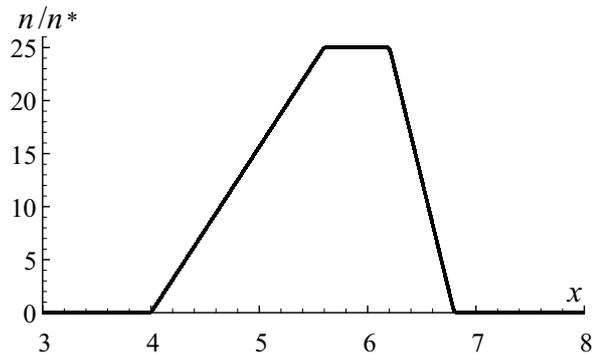


Рис. 2. Плотность электронов и ионов при  $t = 0$

где  $\Delta x = \tau v_x^{m+1/2}$ ,  $\Delta y = \tau v_y^{m+1/2}$  — приращение координат в прямоугольнике,  $\delta x = 0.5\tau v_x^{m+1/2} + x^m - x_i$ ,  $\delta y = 0.5\tau v_y^{m+1/2} + y^m - y_i$ . Здесь  $x_i, y_i$  — узлы сетки, такие, что  $x_i < x^m < x_{i+1}$ ,  $y_i < y^m < y_{i+1}$ , а  $v_z^{m+1/2}$  — z-компонента скорости частицы. В безразмерных величинах скорости считаются через импульсы:

$$v_x = \frac{p_x}{\sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}, \quad v_y = \frac{p_y}{\sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}, \quad v_z = \frac{p_z}{\sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}.$$

После подстановки  $\Delta x, \delta x, \Delta y, \delta y$  в формулы для  $j_{x,i,l-1/2}^{m+1/2}$  и  $j_{y,i-1/2,l}^{m+1/2}$  имеем

$$j_{x,i,l-1/2}^{m+1/2} = qv_x^{m+1/2}(1 + y_i) - \frac{q}{h_y} v_x^{m+1/2} y^m - \frac{q\tau}{2h_y} v_x^{m+1/2} v_y^{m+1/2},$$

$$j_{y,i-1/2,l}^{m+1/2} = qv_y^{m+1/2}(1 + x_i) - \frac{q}{h_x} v_y^{m+1/2} x^m - \frac{q\tau}{2h_x} v_x^{m+1/2} v_y^{m+1/2}.$$

Необходимо, чтобы до и после добавления/удаления частиц все компоненты плотности тока совпадали. Значения для новых частиц будем обозначать штрихами.

После суммирования по всем частицам и перегруппировки получаем

$$\left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} \right] (1 + y_i) = \frac{1}{h_y} \left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} y_l - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} y'_j \right] + \frac{\tau}{2h_y} \left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} v_{yl} - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} v'_{yj} \right],$$

$$\left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{yl} - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{yj} \right] (1 + x_i) = \frac{1}{h_x} \left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{yl} x_l - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{yj} x'_j \right] + \frac{\tau}{2h_x} \left[ \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} v_{yl} - \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} v'_{yj} \right].$$

Приравниваем разности в квадратных скобках к нулю и получаем требуемые ограничения:

$$\sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} = \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj}, \quad \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{yl} = \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{yj}, \tag{2}$$

$$\sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} y_l = \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} y'_j, \quad \sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{yl} x_l = \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{yj} x'_j, \tag{3}$$

$$\sum_{l=1}^{n_{old}} q_l v_{xl} v_{yl} = \sum_{j=1}^{n_{new}} q'_j v'_{xj} v'_{yj}. \tag{4}$$

Заметим, что ограничения (2) соответствуют классическому закону сохранения импульса, поскольку в модели  $q$  пропорционально массе. Ограничения (3) обеспечивают выполнение классического закона сохранения момента импульса. Ограничение (4) соответствует  $L$  из раздела 2.3.2.

Таким образом, в этой задаче схема вычисления плотности токов определяет использование классических законов сохранения для метода частиц в ячейках с адаптивными массами.

**3.3. Результаты моделирования.** Расчеты были выполнены с использованием двух программ: *adapt* (метод частиц в ячейках с адаптивными массами) и *pic* (метод частиц в ячейках).

Область моделирования:  $30\lambda \times 8\lambda$ . Характеристики плазмы приведены в разделе 3.1 на рис. 2. Лазерный импульс круговой поляризации имеет следующие характеристики: амплитуда равна 5, длина  $20\lambda$ . *Счетные параметры*: шаг по сетке 0.02, шаг по времени 0.01, количество модельных электронов и ионов в ячейке: *pic* по 9, *adapt* по 9. Общее число частиц: *pic* 1 008 001, *adapt* не более 1 010 000, т.е. больше на 0.2%. На рис. 3 показано распределение электронов по заряду в начальный момент времени. По координате  $|q|$  выбрана логарифмическая шкала.

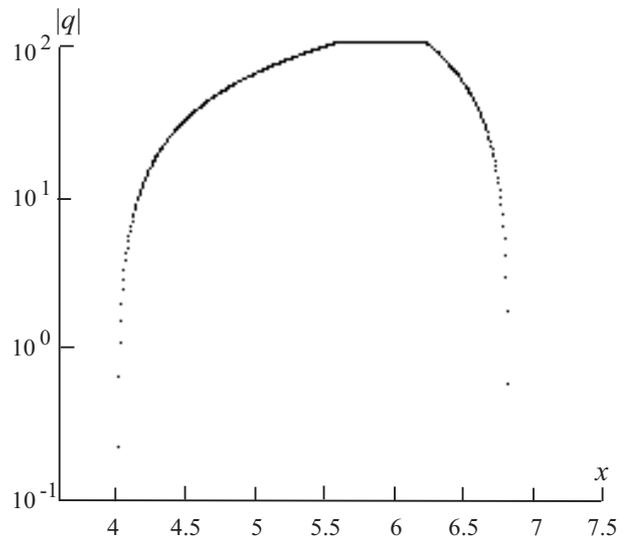


Рис. 3. Распределение зарядов у модельных электронов при  $t = 0$

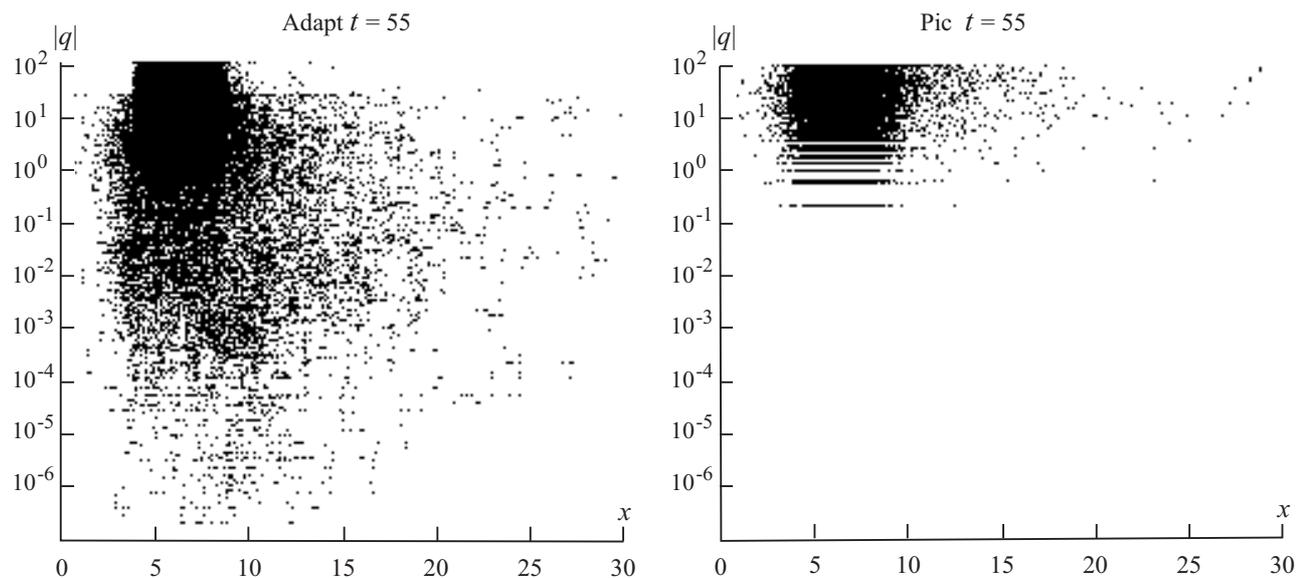


Рис. 4. Распределение зарядов у модельных электронов

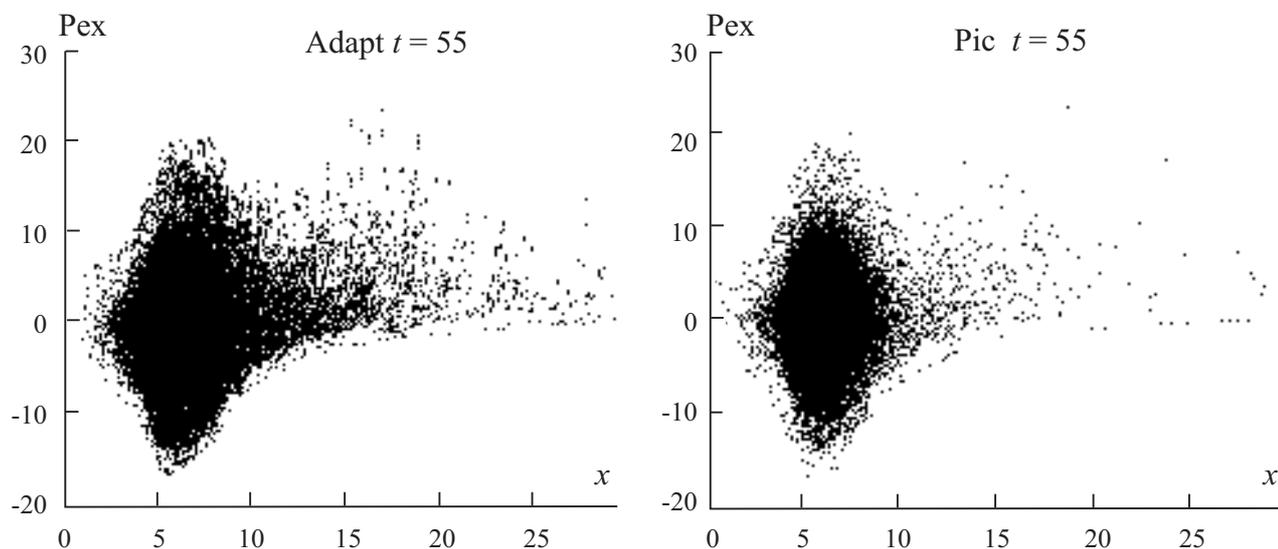


Рис. 5. Фазовая плоскость электронов

В результате динамического изменения числа частиц распределение заряда модельных электронов изменяется (рис. 4). Это особенно видно в области вне фольги. При сравнимом числе частиц во всей области заряд модельных электронов, вылетевших с фольги, в расчете *adapt* варьируется от  $-10^{-7}$  до  $-30$ . В расчете *pic* заряд варьируется от  $-0.1$  до  $-110$ . Это приводит к видимым изменениям в распределении электронов по скоростям в фазовой плоскости (рис. 5). На рис. 6 приведены графики фазовой плоскости и распределения зарядов модельных электронов для расчета, выполненного по программе *pic* с общим числом электронов 2 800 000. Существенное увеличение общего числа частиц является недостаточным: в зоне низкой плотности недостаточно “легких” модельных частиц. Чтобы обеспечить для этой области распределение заряда  $[10^{-3}, 10^{-1}]$ , необходимо увеличить общее число частиц еще на два порядка при данных параметрах сетки.

Количество ионов практически не меняется, и графики фазовой плоскости для расчетов отличаются не существенно (рис. 7).

**4. Заключение.** В настоящей статье представлен метод частиц в ячейках с адаптивными массами в общем случае и его двумерный вариант. Приведено применение метода для решения задачи взаимодействия лазерного импульса с плазмой. Описаны особенности использования метода для решения релятивистских задач.

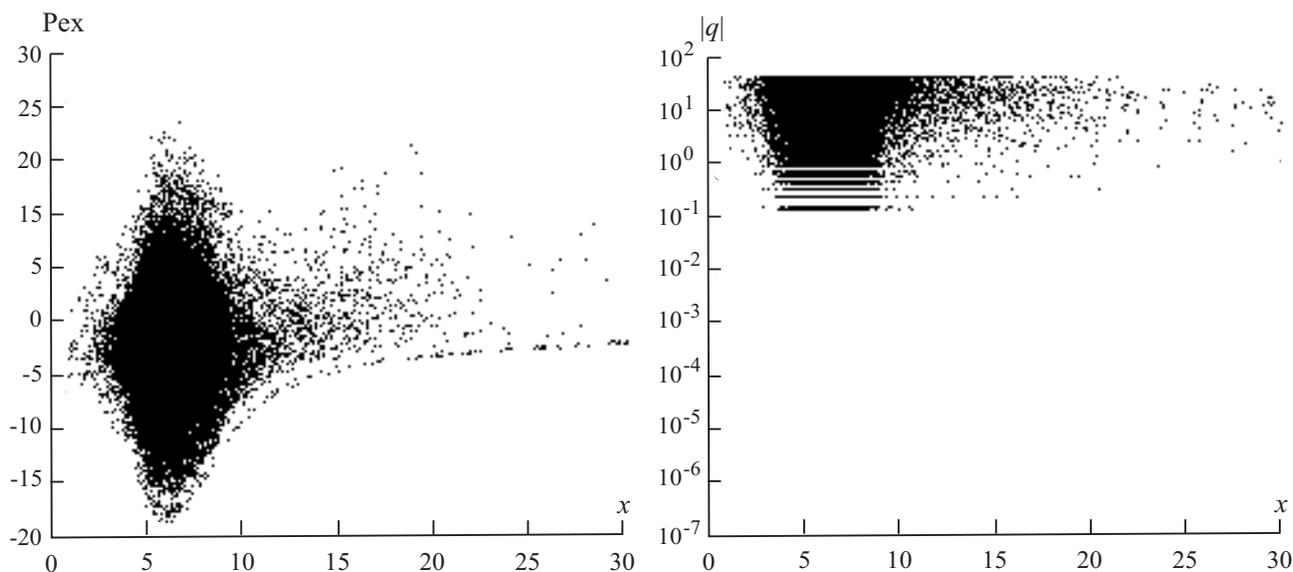


Рис. 6. Фазовая плоскость электронов и распределение зарядов при  $t = 55$

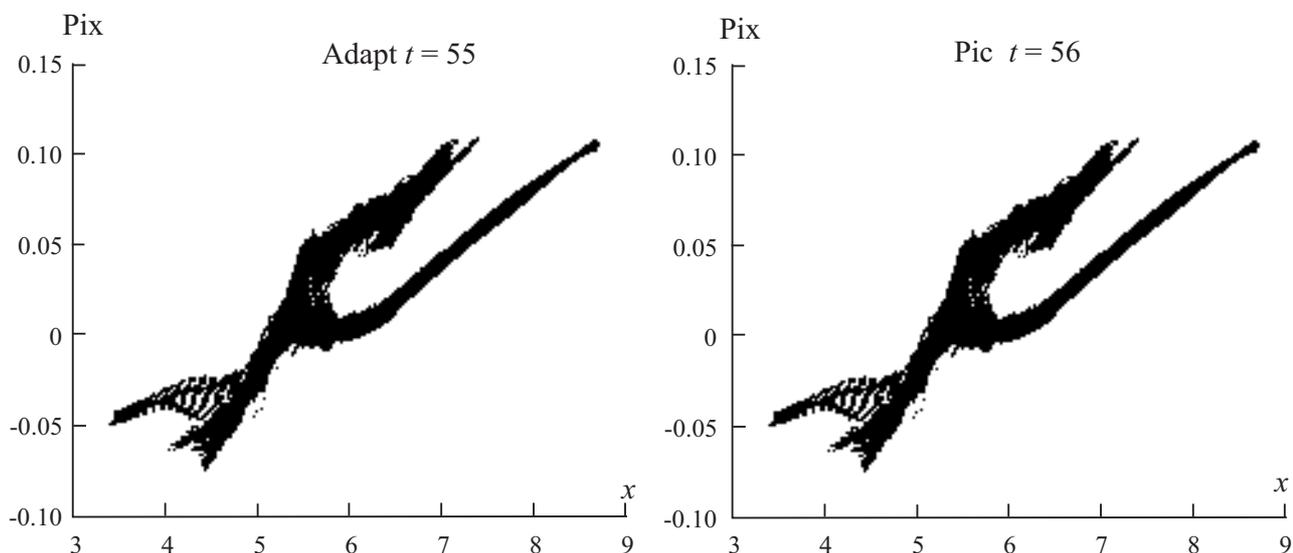


Рис. 7. Фазовая плоскость ионов

Показано, что использование динамического изменения числа частиц в ячейке позволяет на несколько порядков уменьшить заряд модельных частиц в областях с низкой плотностью при небольшом увеличении общего числа частиц. Это дает возможность уменьшить время счета и повышает точность расчетов в областях с пониженной плотностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харлоу Ф.Х. Численный метод “частиц-в-ячейках” для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. С.С. Григоряна и Ю.Д. Шмыглевского. М.: Мир, 1967.
2. Яценко Н.Н., Анучина Н.Н., Петренко В.Е., Шожин Ю.И. О методах расчета задач газовой динамики с большими деформациями // Числ. мет. мех. спл. среды. 1970. 1. 40–62.
3. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
4. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
5. Григорьев Ю.Н., Вшивков В.А., Федорук М.П. Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. М.: Изд-во СО РАН, 2005.
6. Боронина М.А., Вшивков В.А., Левичев Е.Б., Никитин С.А., Снытников В.Н. Алгоритм для трехмерного моделирования ультрарелятивистских пучков // Вычислительные методы и программирование. 2007. 8, № 2. 203–210.

7. *Вшивков В.А., Снытников А.В.* Построение эффективного параллельного метода решения уравнения Пуассона для моделирования эволюции протопланетного диска // *Вычислительные методы и программирование.* 2009. **10**, № 1. 105–111.
8. *Вшивков В.А., Терехов А.В.* О самодействии в методе частиц в ячейках // *Вычислительные методы и программирование.* 2008. **9**, № 1. 52–61.
9. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
10. *Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Снытников А.В.* Адаптивное изменение массы модельных частиц при моделировании тлеющего ВЧ-разряда в силовой плазме // *Вычислительные технологии.* 2008. **13**, № 1. 22–30.
11. *Берендеев Е.А., Иванов А.В., Лазарева Г.Г., Снытников А.В.* Моделирование на суперЭВМ динамики плазменных электронов в ловушке с инверсными магнитными пробками и мультипольными магнитными стенками // *Вычислительные методы и программирование.* 2013. **14**. 149–154.
12. *Hong W., House D.H., Keyser J.* Adaptive particles for incompressible fluid simulation // *Visual Computer.* 2008. **24**. 535–543.
13. *Lapenta G., Brackbill J.U.* Dynamic and selective control of the number of particles in kinetic plasma simulations // *J. of Computational Physics.* 1994. **115**. 213–227.
14. *Lapenta G.* Automatic adaptive multi-dimensional particle in cell // *Advanced Methods for Space Simulations.* Tokyo: TERRAPUB, 2007. 61–76.
15. *Welch D.R., Genoni T.C., Clark R.E., Rose D.V.* Adaptive particle management in a particle-in-cell code // *J. of Computational Physics.* 2007. **227**. 143–155.
16. *Snytnikova T.V.* Particle-in-cell method with adaptive mass // *Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Numerical Analysis.* 2009. **14**. 81–93.
17. *Snytnikova T.V.* Threshold functions for inserting or deleting particles in the PIC method with adaptive mass // *Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Numerical Analysis.* 2011. **15**. 73–84.

Поступила в редакцию  
28.05.2013

---