

УДК 519.65

## МЕТОДЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЕТОК В СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧАХ

С. П. Копысов<sup>1</sup>, И. М. Кузьмин<sup>1</sup>, Л. Е. Тонков<sup>1</sup>

Рассматриваются методы деформирования расчетных сеток при решении сопряженных задач взаимодействия потока газа и жестких или деформируемых конструкций, решаемых в лагранжево-эйлеровой постановке. Исследуются методы бессеточной интерполяции Шепарда и радиальных базисных функций с компактным и глобальным носителем для определения движения узлов сетки, обеспечивающих максимальные степени деформации без вырождения ячеек. Приводится анализ предложенных алгоритмов, сравнение с методом диффузионной аналогии, использующим связность сетки, и обсуждаются примеры деформирования сеток в двумерных и трехмерных областях. Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН № 18 при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1005) и РФФИ (проекты № 11-01-00275а и 12-07-00080а).

**Ключевые слова:** взаимодействие газа/жидкости и твердого/деформируемого тела, деформирование расчетных сеток, метод Шепарда, радиальные базисные функции, параллельные вычисления.

**Введение.** При численном моделировании нестационарных течений жидкости или газа в областях с подвижными или деформирующимися границами требуется соответствующим образом модифицировать расчетную сетку. Такие течения возникают при расчетах конструкций, геометрия которых меняется во времени под действием различных сил (внутренней баллистики ракетных двигателей, исследования аэрогидроупругости аэродинамических элементов летательных аппаратов, флаттер лопаток турбореактивных двигателей и др.). Задачи, относящиеся к этому классу, получили общее название FSI (Fluid Structure Interaction — взаимодействие газа/жидкости с деформируемым телом).

В случае моделирования течений с учетом движения жестких границ при наличии подвижных лагранжевых внутренних или внешних границ или течений со свободными границами расчетная сетка и форма ее ячеек не являются фиксированными, а адаптируются под новые положения границ области, меняющихся во времени, что приводит к использованию подвижных и деформируемых сеток. Узлы в лагранжево-эйлеровых сетках движутся независимо от движения среды так, чтобы не допустить больших искажений ячеек и обеспечить равномерное распределение узлов, и позволяют избегать появления вырожденных ячеек.

Основная трудность реализации вычислительных алгоритмов на подвижных неструктурированных сетках состоит в сохранении качества деформированной сетки в расчетной области. В частности, необходимо обеспечить положительность объемов расчетных ячеек деформированной сетки. Кроме того, деформацию подвижных границ зачастую трудно предвидеть заранее.

Для неструктурированных вычислительных сеток требуется привлечение сложных алгоритмов деформирования сеток, таких как пружинная аналогия, диффузионная аналогия, интерполяционные методы и др., которые используют связность узлов вычислительной сетки в ячейки.

Необходимо отметить, что в настоящее время в прикладных задачах растет число ячеек в сетках, а сама топология расчетных сеток становится все более сложной: уже используются ячейки разной формы и размерности, все чаще встречаются блочные сетки с нестыкующимися и перекрывающимися границами и распределенные сетки по узлам вычислительной системы и др. Все это накладывает на алгоритмы деформации сетки новые требования и диктует, прежде всего, необходимость рассмотрения алгоритмов, не требующих информации о связности узлов в сетке и сокращающих затраты на ее передачу и их эффективное распараллеливание.

Настоящая статья построена следующим образом. В первом разделе формулируются основные требования к алгоритмам деформирования сеток. В разделе 2 описываются методы Шепарда и радиальных базисных функций, основанные на бессеточной интерполяции. В разделе 3 приводятся примеры деформаций сетки.

<sup>1</sup> Институт механики Уральского отделения РАН (ИМ УрО РАН), ул. Т. Барамзиной, д. 34, 426067, г. Ижевск; С. П. Копысов, зав. лабораторией, e-mail: s.kopysov@gmail.com; И. М. Кузьмин, мл. науч. сотр., e-mail: imkuzmin@gmail.com; Л. Е. Тонков, ст. науч. сотр., e-mail: tnk@udman.ru

**1. Алгоритмические особенности решения задач взаимодействия газа с деформируемыми телами.** При решении связанных задач взаимодействия потока газа и деформируемой конструкции согласование получаемых решений на границах подобластей является неотъемлемым и весьма важным этапом, существенно влияющим на адекватность получаемых результатов. Под согласованием понимается прежде всего совокупность операций по обмену результатами вычислений между соответствующими блоками решения газодинамической задачи и задачи динамики деформирования, интерполяции значений между узлами расчетных сеток, геометрическая адаптация сеток или деформирования сеток и, возможно, реализация семейства итерационных процедур при жестком связывании. Здесь приложения одновременно выполняются на кластере и обмениваются между собой данными на каждой итерации до выполнения необходимых условий сходимости. В этом подходе первоначально созданные сетки деформируются в соответствии с движением границ, не меняя своей структуры и размерности.

Основные требования для задач деформации сеток применительно к сопряженным задачам состоят в следующем:

- надежность, простота и удобство: алгоритм деформации должен обеспечивать заданное качество деформированной сетки;
- возможность обеспечения больших перемещений;
- вычислительные ресурсы: необходимые вычислительные затраты должны быть минимальны, так как деформация сетки должна осуществляться на каждом шаге по времени. Во многих случаях имеет смысл решать задачу деформирования расчетной сетки в отдельном параллельном приложении независимо от задач гидро- и газодинамики и динамики деформирования.

**2. Методы деформирования сеток.** Рассмотрим алгоритмы интерполяции перемещений и соответствующего деформирования сетки, основанные на как на бессеточной интерполяции, так и использующие существующую связанность узлов расчетной сетки.

Расчетная сетка представляет собой взаимосвязанную совокупность следующих объектов: конечных объемов/элементов (т.е. ячеек  $\Omega^e$ ), их граней, ребер  $\varphi^e$  и узлов  $\theta^e$ . Односвязное объединение сеточных ячеек  $\Omega^e$  будем называть сеточной областью  $\Omega = \bigcup_e \Omega^e$ , а ее замыкание обозначим через  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ , где граница  $\Gamma$  — множество (не обязательно односвязное) граничных граней. Сеточная расчетная область  $\bar{\Omega}^h$  включает в себя расчетную область ( $\bar{\Omega} \subset \bar{\Omega}^h$ ) и состоит из двух сеточных подобластей  $\bar{\Omega}^h = \bar{\Omega}_g^h \cup \bar{\Omega}_s^h$ , где  $\bar{\Omega}_g^h, \bar{\Omega}_s^h$  — сеточные расчетные подобласти для задач газодинамики и динамики деформируемого тела соответственно. Расчетные подобласти  $\Omega_g^h$  и  $\Omega_s^h$  — это открытые области с границами  $\Gamma_g^h$  и  $\Gamma_s^h$ . Каждая сеточная расчетная подобласть вместе с границей образует соответствующее замыкание подобласти  $\bar{\Omega}_g^h = \Omega_g^h \cup \Gamma_g^h, \bar{\Omega}_s^h = \Omega_s^h \cup \Gamma_s^h$ .

Важным в дискретизации связанных расчетных областей является обеспечение соответствия границ геометрических и сеточных областей  $\Gamma$  и  $\Gamma^h$ , которые в идеальном случае должны совпадать, что имеет место только в простейших случаях. Если граница  $\Gamma$  криволинейная, то будем считать, что граничные узлы из  $\Gamma^h$  лежат на  $\Gamma$ , а граничные ребра и грани или совпадают, или аппроксимируют соответствующие участки исходной границы. Кроме того, следует учитывать тот факт, что расчетные сетки на границе  $\Gamma_{gs} = \Gamma_g^h \cap \Gamma_s^h$  часто используются несогласованными в том смысле, что узлы расчетной сетки на  $\Gamma_g^h$  и  $\Gamma_s^h$  не совпадают.

При решении сопряженных задач неизбежно возникают задачи интерполяции параметров и деформации сетки. Например, на каждом временном шаге необходимо выполнить интерполяцию значений давления с  $\Gamma_g^h$  на  $\Gamma_s^h$  и вычислить перемещения границы газодинамической сетки  $\mathbf{u}_g^h$  относительно перемещений  $\mathbf{u}_s^h$ , полученных на  $\Gamma_s^h$ , после решения динамической задачи теории упругости, а также деформировать  $\Omega_g^h$  относительно нового положения  $\Gamma_g^h$ . Эти задачи сходны и их решение сводится к тем или иным методам интерполяции параметров (давления, перемещений) с одной расчетной сетки на другую. В настоящей статье рассматривается и оценивается эффективность и качество различных алгоритмов интерполяции на примере решения задачи деформирования расчетной сетки  $\Omega_g^h$ .

Задача деформирования сетки заключается в нахождении отображения, которое переводит узлы расчетной сеточной области  $\Omega_g^h$  в момент времени  $t$  в положение для решения задачи в момент времени  $t + \Delta t$ , соответствующее перемещениям границы  $\Gamma_g^h$ . Такое отображение, как минимум, должно удовлетворять требованию однозначности. На первом этапе вычисляется движение границ расчетных областей, которое соответствует сеточным объектам  $\Gamma_g^h$ . Затем по интерполяционным алгоритмам рассчитываются значения перемещений для внутренних узлов сетки  $\Omega_g^h$  и вычисляются положения узлов сетки для следующего

шага по времени. Обозначим через  $n_\Omega$  число узлов  $\Omega_g^h$  и через  $n_\Gamma$  число узлов  $\Gamma_g^h$ .

Контроль качества деформации расчетной сетки заключается в следующем: проверка неотрицательности значения объема каждой ячейки; отслеживание отсутствия пересечения ячеек; оценка того, что соседние ячейки должны обладать соразмерными мерами объема или площади, т.е. не допускать ситуаций, в которых из двух соседних ячеек одна во много раз больше. Контроль мер качества не исчерпывается перечисленными мерами, однако они являются необходимыми.

**2.1. Методы механической аналогии.** Применение пружинной аналогии растяжения/сжатия к построению деформированных неструктурированных сеток обсуждается в [1], а пружинной аналогии кручения — в [2]. Комбинированный подход разрабатывается в [3]. Методы построения деформированной сетки на основе решения уравнения растяжения упругого стержня применяется в [4], а на основе решения уравнения Бельтрами и диффузии — в [5].

Преимущества данной группы методов связаны с возможностью оптимизации жесткости, естественным обеспечением сеточной согласованности и достижимостью больших деформаций при использовании метода конечных элементов в геометрически нелинейной постановке. Однако возникает и ряд проблем, связанных с большой размерностью рассматриваемой задачи и большими затратами оперативной памяти. Кроме того, требуется рассмотрение специальных случаев для несовместных сеток и сеток, содержащих многогранники.

Для сравнения в настоящей статье рассматривается метод деформации расчетной сетки, основанный на диффузионной аналогии (обозначаемый далее как МДА), описывающей деформацию с помощью линейной теории диффузии. Выбор этого метода обусловлен учетом связи между компонентами вектора скоростей узлов расчетной сетки, что должно обеспечить качественный результат. Поскольку данный метод связан с решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности, важным аспектом работы алгоритма является выбор и эффективная реализация численного метода решения СЛАУ.

Диффузионная аналогия для задачи деформации сетки [6] описывается уравнениями

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_g^h, \tag{1}$$

с граничными условиями  $\mathbf{u}|_{\Gamma_{gs}} = \mathring{\mathbf{u}}_g$ , где  $\mathbf{u}$  — скорость деформации сетки,  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{u}$ ,  $\gamma$  — коэффициент диффузии, который уменьшается с радиусом  $r$  от деформированной границы  $\gamma(r) = \frac{1}{r^p}$ . Выбор зависимости может быть выполнен и для каждой точки сетки. Для получения надежных результатов будем использовать функцию с показателем  $p = 2$ , обеспечивающим эффективное и гладкое движение сетки.

Система линейных алгебраических уравнений, получаемая при конечно-объемной аппроксимации уравнений (1), решалась предобусловленным методом сопряженных градиентов.

**2.2. Метод Шепарда.** Метод Шепарда [7], или метод обратных взвешенных расстояний (IDW — Inverse Distance Weighted) является методом многомерной интерполяции, в котором значения функции в произвольных точках являются суммой взвешенных значений функции в исходных точках. Основной областью применения данного метода является обработка картографических, геологических и других экспериментальных данных.

Рассмотрим применение метода Шепарда для определения деформаций узлов расчетной сетки. В общем виде значение перемещений  $\mathbf{u}$  в узлах  $\mathbf{x}$  при известных перемещениях границы  $\mathring{\mathbf{u}}_g(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n_\Gamma$ , выражается следующим образом:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \omega_i(\mathbf{x}) \mathring{\mathbf{u}}_g \left( \sum_{j=1}^{n_\Gamma} \omega_j(\mathbf{x}) \right)^{-1}, \quad \omega_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^p}. \tag{2}$$

Здесь  $\omega_i$  — весовая функция, где  $p$  — положительное вещественное число.

Таким образом, задачу интерполяции для множества точек можно переписать в виде матрично-векторного произведения, удобного для распараллеливания:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = W \mathring{\mathbf{u}}_g, \tag{3}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1(\mathbf{x}_1) & \dots & W_1(\mathbf{x}_{n_\Gamma}) \\ \vdots & & \vdots \\ W_{n_\Omega}(\mathbf{x}_1) & \dots & W_{n_\Omega}(\mathbf{x}_{n_\Gamma}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}_{n_\Omega}) \end{pmatrix}, \quad \mathring{\mathbf{u}}_g = \begin{pmatrix} \mathring{\mathbf{u}}_g(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ \mathring{\mathbf{u}}_g(\mathbf{x}_{n_\Gamma}) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_\Omega}$  — координаты узлов  $\Omega_g^h$ , а  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_\Gamma}$  — координаты узлов  $\Gamma_g^h$ .

Задание весовой функции таким способом обеспечивает уменьшение веса точки при увеличении расстояния между точками, т.е. при больших значениях параметра  $p$  увеличивается влияние точек, расположенных вблизи интерполируемой точки. Кроме того, при  $0 < p < 1$  функция  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  имеет сглаженные пики в окрестности исходных точек  $\mathbf{x}_i$ , а для значений  $p > 1$  пики становятся острыми.

Таким образом, значение  $p$  влияет на гладкость интерполяции, зависит от максимального расстояния между исходными точками и допустимости влияния отдельных точек на конечный результат. Выбор параметра  $p$  может определяться несколькими факторами, связанными с границами, в частности с подвижностью границы или ее полным закреплением, а также характерными изменениями, такими как вращение, сдвиги и др. Обычно параметр выбирается равным  $p = 2$ .

Для алгоритма характерно следующее: простота реализации и отсутствие большого числа параметров, нуждающихся в настройке при использовании весовой функции вида (2), работоспособность в пространстве любой размерности; вычисление интерполианта имеет трудоемкость  $\mathcal{O}(N)$ , глобальность интерполяции приводит к тому, что интерполиант становится более чувствителен даже к удаленным точкам, в узлах интерполяции функция плоская, т.е. имеет нулевую производную.

В модифицированной версии метода Шепарда с выделенной зоной влияния радиуса  $r$  значение весовой функции  $\omega_i(\mathbf{x})$  определяется как  $\omega_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{r\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} \right)^2$ ,  $r = \max_i \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ ,  $i = 1, \dots, n_\Gamma$ .

**2.3. Радиальные базисные функции.** Использование радиальных базисных функций [8] обладает рядом преимуществ: рассмотрение движения отдельных точек, а не сетки (позволяет использовать только данные об узлах, не учитывая данные, связанные с сеткой, что сокращает затраты на коммуникации); возможность рассмотрения систем меньшего размера при использовании функций с компактным носителем; высокая параллельная эффективность, связанная прежде всего с тем, что решение задачи сводится к решению системы уравнений, поиск которого можно достаточно эффективно распараллеливать. Однако возможно возникновение вывернутых ячеек и требуются дополнительные условия для случаев, когда не все границы сетки включены в качестве исходных точек.

Основной идеей метода является поиск необходимого интерполианта в виде линейной комбинации, образованной радиальными базисными функциями [9]. В общем случае для задачи деформирования области

$\Omega_g^h$  интерполиант запишется следующим образом:  $w_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_\Gamma} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + v(x)$ . Здесь  $\mathbf{x} = (x_j, y_j, z_j)$ ,

коэффициенты  $\lambda_j$  и полиномы  $v$  определяются из условия  $w_i(\mathbf{x}_j) = W_j^i$  и требования  $\sum_{j=1}^{n_\Gamma} \lambda_j b(\mathbf{x}_j) = 0$  для

всех полиномов  $b$  степени меньше или равной степени полинома  $v$ . Введение дополнительного полинома  $v$  применяется в случае использования радиальных базисных функций вида MQ (MultiQuadratic), IMQ (Inverse MultiQuadratic) и TPS (Thin-Plate Spline), см. табл. 1.

Пусть  $\mathring{\mathbf{u}}_g$  — перемещения узлов границы  $\Gamma_g^h$ . Тогда система уравнений в матричной форме для неизвестных коэффициентов  $\lambda$  и  $\mu$  принимает форму

$$\begin{bmatrix} \Phi_\Gamma & B_\Gamma \\ B_\Gamma^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{u}}_g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \Phi_\Gamma = \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad B_\Gamma = [1 \ x_j \ y_j \ z_j]. \quad (4)$$

Перемещения узлов  $\Omega_g^h$  будем искать в виде  $[\Phi_{\Gamma\Omega} B_\Omega] \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = W_\Omega$ , где  $W_\Omega$  — приращения координат узлов сетки  $\Omega_g^h$ . Кроме того, значения на  $\Omega_g^h$  могут быть получены и непосредственно из соотношения

$$W_\Omega = [\Phi_{\Gamma\Omega} B_\Omega] \begin{bmatrix} \Phi_\Gamma & B_\Gamma \\ B_\Gamma^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{u}}_g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм деформации расчетных сеток использует интерполирующие функции радиального базиса (РБФ), т.е. функции, значения которых зависят только от нормы аргумента и имеющие различные классы гладкости. В данной работе исследовался ряд радиальных функций как с компактным [8], так и с глобальным носителем [9] (табл. 1).

Таким образом, рассматриваемые выше задачи сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений с матрицами, разреженность и порядок которых зависит от выбора радиальных базисных функций. Такие системы можно эффективно решать предобусловленным методом сопряженных градиентов на графическом ускорителе (GPU, Graphics Processing Unit). Нами использовался решатель СЛАУ

собственной разработки, который позволяет решать системы на кластере с использованием нескольких GPU [10]. Отметим, что данный решатель использовался и в связываемых приложениях OpenFOAM гидро- и газодинамики и механики деформирования FESstudio [11].

Таблица 1

Функции радиального базиса

Функция	Обозначения	Вид
Гауссиан	GA2	$\exp \{-\ \mathbf{x}\ ^2\}$
	GA	$\exp \{-\ \mathbf{x}\ \}$
Мультиквадратичная	MQ	$\sqrt{1 + \ \mathbf{x}\ ^2}$
Обратная мультиквадратичная	IMQ	$(\sqrt{1 + \ \mathbf{x}\ ^2})^{-1}$
Сплайн тонкой пластины	TPS	$\ \mathbf{x}\ ^2 \log \ \mathbf{x}\ $
Ву	WUC0	$1 - \ \mathbf{x}\ $
Ву	WUC2	$(1 - \ \mathbf{x}\ )^3 * (1 + 3\ \mathbf{x}\ ^3)$
Ву	WUC4	$(1 - \ \mathbf{x}\ )^5 * (1 + 5 * \ \mathbf{x}\  + 9 * \ \mathbf{x}\ ^2 + 5 * \ \mathbf{x}\ ^3 + \ \mathbf{x}\ ^4)$
Вендланда	WC0	$(1 - \ \mathbf{x}\ )^2$

**3. Примеры расчетных сеток.** Тестирование алгоритмов деформирования расчетных сеток проводилось на двумерных и трехмерных областях с неструктурированными сетками с ячейками треугольной/тетраэдральной и четырехугольной формы с различными шагами сетки: деформация границы, поворот и деформация тела в плоской прямоугольной области (1280–7744 ячеек); движение сфер в кубе (11 904–154 000 ячеек); поворот заслонки в цилиндрическом канале (2000–167 810 ячеек). В отличие от других известных примеров, рассматриваемые далее задачи характеризуются существенным влиянием деформируемых границ на всю сеточную область.

Обязательным условием применения алгоритмов деформации сеток является оценка их мер качества после деформации. В настоящей работе использовались меры качества, представленные в [12]; перечислим некоторые из них: минимальный/максимальный двугранный угол, масштабируемый якобиан в ячейке, соотношения ребер, объем ячейки и др. Кроме этого, проводилась оценка обусловленности системы уравнений, получаемых на основе радиальных базисных функций и времени решения системы методом сопряженных градиентов с диагональным предобусловливателем. Сравнения проводились для семейства компактных и глобальных радиальных функций различных классов гладкости из табл. 1.

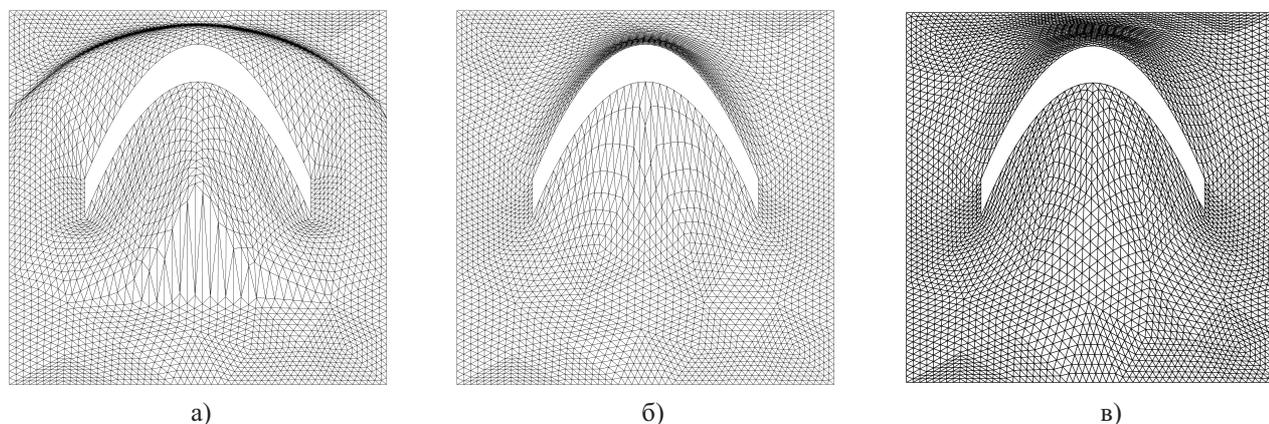


Рис. 1. Примеры деформирования сетки при изгибе пластины: а) метод Шепарда с радиусом влияния  $r = 0.25$ ; б) РБФ с компактным носителем  $r = 0.25$ ; в) РБФ с глобальным носителем

**3.1. Изгиб пластины.** Анализ изгиба пластины проводился в квадратной области с единичной длиной ребра и жестко закрепленными торцами пластины (рис. 1). Сетка содержала 7552 треугольных ячеек и 3889 узлов. В качестве радиальной базисной функции использовалась WC0, параметр  $p$  метода Шепарда был выбран равным 4.

В данном тесте рассматривалось выделение подобласти при помощи введения радиуса влияния, в которой сетка деформируется применимо к методам Шепарда и РБФ. Радиус влияния позволяет ограничить число рассматриваемых узлов расчетной сетки. В тесте использовался радиус влияния  $r = 0.25$ .

В двумерных областях использовались меры качества сетки: соотношение длин ребер ячеек  $q_e$ , отношение площадей соседних ячеек  $q_a$ , скошенность ячейки  $q_s = \max \left[ \frac{\alpha_{\max} - \alpha_n}{\alpha_n}, \frac{\alpha_n - \alpha_{\min}}{\alpha_n} \right]$ , где  $\alpha_{\max}$  и  $\alpha_{\min}$  — максимальный и минимальный угол в ячейке;  $n = 1, 2$ ;  $\alpha_1 = 60^\circ$  и  $\alpha_2 = 90^\circ$  — для треугольной и четырехугольной ячеек соответственно.

В рассматриваемых случаях после деформирования с учетом радиуса влияния были получены следующие результаты:

- скошенность ячеек полученной сетки:  $q_s(\text{WC0}) = 1.82$  и  $q_s(\text{IDW}) = 1.99$ ;
- отношение площадей соседних ячеек:  $q_a(\text{WC0}) = 5.23$  и  $q_a(\text{IDW}) = 1988.83$ ;
- соотношение длин ребер:  $q_e(\text{WC0}) = 100.27$  и  $q_e(\text{IDW}) = 33351.6$ ;
- для метода РБФ с глобальными функциями без учета радиуса влияния (рис. 1в)) меры качества имели значения:  $q_s(\text{WC0}) = 1.61$ ;  $q_a(\text{WC0}) = 2.79$ ;  $q_e(\text{WC0}) = 19.34$ .

Введение радиуса влияния ухудшает качество получаемой сетки, а также существенно уменьшает величину достигаемой максимальной деформации. Результаты тестов показали (рис. 1б и 1в), что деформирование с использованием РБФ с компактными и глобальными функциями приводит к сеткам хорошего качества с величиной прогиба, равной 0.36 и соответствующей 100 шагам деформирования. Для функций WUC0 и WC0 с радиусом влияния  $r = 0.25$  наблюдается приемлемое качество сетки; величины деформации такие же, как и для РБФ с глобальным носителем. Остальные рассматриваемые РБФ при первом шаге деформации порождают вырожденные ячейки.

Метод Шепарда (рис. 1а) при достижении той же величины прогиба порождает вырожденные элементы и самопересечения вблизи границы области влияния. Наблюдается существенное ухудшение качества получаемой сетки для любых значений радиуса. В дальнейших вычислительных экспериментах сетки рассматривались без введения радиуса влияния, т.е. задействованы были все точки деформируемой области.

**3.2. Вращение пластины.** Этот тест включает в себя движение сетки при повороте недеформируемой пластины, находящейся в центре квадратной области со стороной, равной единице. Вращение производилось на сетках с ячейками треугольной и четырехугольной формы. Поворот из начального положения до конечного осуществлялся как за один шаг, так и за несколько, граничные узлы сетки могли свободно перемещаться вдоль границ, которым они принадлежат. Тест проводился для диффузионного алгоритма, метода Шепарда и метода радиальных базисных функций. В качестве функции носителя для РБФ использовались различные функции, часть которых представлена в табл. 1.

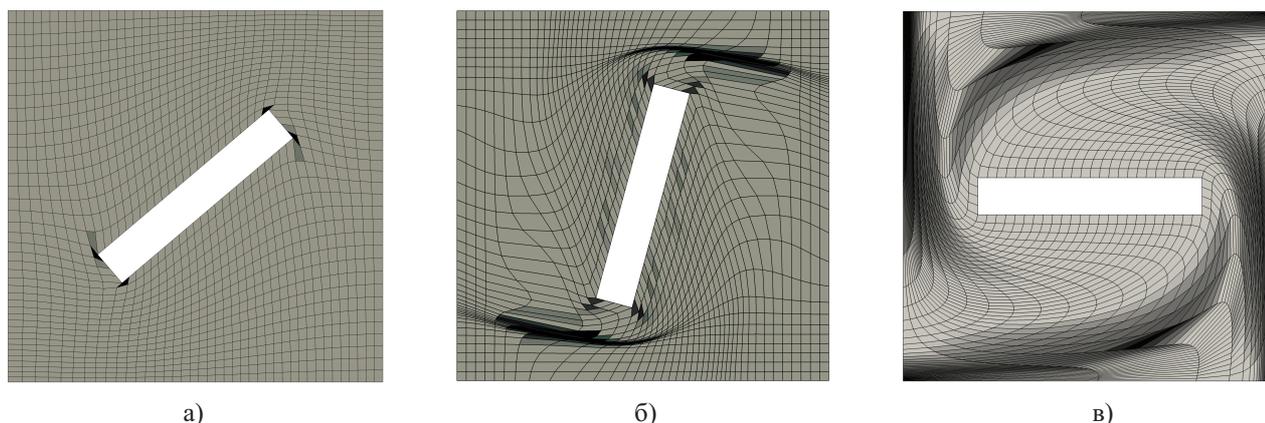


Рис. 2. Распределение параметра скошенности ячеек сетки в задаче о вращении пластины: а) диффузионный алгоритм; б) метод Шепарда; в) радиальные базисные функции

Примеры деформированных расчетных сеток, содержащих 1697 узлов и 3200 треугольных ячеек и 1600 четырехугольных ячеек, приведены на рис. 2. На рисунке показано распределение параметра ско-

шенности ячеек в пределах  $q_s = [0.01, \dots, 0.5]$ . Здесь более темные цвета соответствуют левой границе параметра.

Применение алгоритма, основанного на диффузионной аналогии, обеспечивало поворот пластины без вырождения ячеек только на угол  $45^\circ$ . Как видно из рисунка, вырождение начинается на ячейках, связанных с угловыми точками вращаемого тела. Подбора переменного коэффициента диффузии в работе не проводилось, так как такой подбор достаточно сложно реализуется и существенно не повышает эффективность метода.

В экспериментах с использованием метода Шепарда максимальный угол поворота достигал  $75^\circ$ . С увеличением параметра  $p$  максимальный угол поворота возрастает и достигается при значениях параметра  $p = 5, 6, 7$ ; при дальнейшем увеличении  $p = 8, 9$  максимальный угол поворота уменьшается. При малых степенях ( $p < 1$ ) смещение узлов происходит только в ближайшей окрестности пластины, что приводит к вырождению элементов уже при первых шагах поворота. При максимально возможном повороте на сетке наблюдаются характерные складки, связанные с малой подвижностью граничных узлов на верхней и нижней границах области. Параметр  $p$  метода Шепарда влияет на гладкость решения, но не может существенно повлиять на качество получаемой сетки при больших деформациях и на область влияния. Введение дополнительных параметров (например, в различных модификациях алгоритма Шепарда) обуславливает дополнительный подбор параметров и, соответственно, ведет к увеличению вычислительных затрат на решение задачи.

На рис. 2 представлены результаты деформирования сеток только с четырехугольными ячейками. Хотя сам алгоритм не использует структуру связности узлов в ячейках сетки, результат деформации узлов сетки с последующим учетом топологии ячейки определяет предельные деформации. Отметим, например, рис. 2а и 2б, где вырождение четырехугольных ячеек наблюдается в угловых точках пластины. Для произвольных неструктурированных сеток с примерно одним и тем же числом узлов сетки с треугольными ячейками всегда позволяли осуществить поворот на больший угол.

Предельные значения параметра скошенности были получены при повороте на  $180^\circ$  с использованием РБФ вида WUC2. При этом допустимые значения качества сетки скошенности  $q_s = 0.88$  соответствовали повороту на угол  $110^\circ$ .

Важным для рассмотрения остается выбор числа шагов деформирования, который по сути должен быть компромиссом между вычислительными затратами и качеством получаемой сетки. В рассматриваемом тесте с использованием РБФ деформация за один шаг на  $180^\circ$  не приводила к удовлетворительным результатам. Минимальное число шагов деформации, при котором расчетная сетка не имела вырожденных ячеек, составило три шага ( $q_s = 0.97, q_a = 1.69, q_e = 479.42$ ). Дальнейшее увеличение числа шагов деформации даже несколько ухудшает качество деформированной сетки; так, при числе шагов, равном 36, параметры сетки были следующие:  $q_s = 0.99, q_a = 1.53, q_e = 537.86$ .

Для метода Шепарда уменьшение угла поворота за один шаг приводит к незначительному улучшению качества сетки. Так, при повороте пластины на  $75$  градусов за  $15$  шагов получены следующие значения параметров:  $q_s = 0.99, q_a = 2.8842, q_e = 23.46$ . Тот же самый угол поворота при числе шагов деформации, равном  $75$ , позволил немного улучшить меры качества сетки:  $q_s = 0.98, q_a = 2.92, q_e = 22.82$ .

Таблица 2

Меры качества деформируемых сеток для задачи движения сфер

Метод	Отношение ребер	Мин. двугран. угол	Масшт. якобиан
Исходная сетка ( $M = 76864, N = 14574$ )	[1.03, 4.4]	[14.2, 82]	[0.09, 0.97]
Метод Шепарда (1-й шаг)	[1.03, 5.1]	[14.2, 82]	[0.0883, 0.97]
МДА (3-й шаг)	[1.04, 7.2]	[8.6, 85.4]	[0.043, 0.98]
РБФ(WUC2) (5-й шаг)	[1.04, 7.7]	[4.18, 87.9]	[0.028, 0.97]
РБФ(WUC0) (5-й шаг)	[1.07, 8.3]	[4.7, 88.1]	[0.02, 0.97]
РБФ(GA) (5-й шаг)	[1.08, 8.3]	[4.6, 88]	[0.02, 0.96]

**3.3. Движение сфер.** Рассматривалось также деформирование сеток в трехмерных областях, одна из которых содержала куб с единичной стороной. В объеме куба была построена сетка с  $76\ 864$  тетраэдральными ячейками и  $14\ 574$  узлами. Двум сферам различного диаметра пошагово задавалось смещение их центров на  $|u| = 0.03$  по диагонали куба навстречу друг другу. Меры качества начальной и деформированных сеток приведены в табл. 1. Качество получаемой сетки оценивалось по нескольким мерам

качества: соотношение максимальной и минимальной длин ребер тетраэдра, минимальный двугранный угол тетраэдра и нормированный якобиан (табл. 2). Как показали расчеты, метод Шепарда при  $p = 6$  позволяет выполнить только один шаг деформации. Уменьшение характерного размера сетки и использование различных вариантов движения сфер (уменьшение размера ячейки, поочередное движение) не изменяет результаты, полученные методом Шепарда. Радиальная симметрия, свойственная этому методу, которая хорошо видна в данном случае, приводит к тому, что происходит вырождение ячеек вблизи поверхности пересечения областей влияния сфер.

Это хорошо видно из рис. 3а (для сравнения показан пятый шаг деформирования, в котором уже присутствуют вырожденные ячейки): между двумя сферами присутствует слой элементов, которые подверглись влиянию деформации при движении обеих сфер, что привело к вырождению элементов в этом слое. Алгоритм диффузионной аналогии (с параметром  $\gamma(r) = 1/r^p$  при  $p = 1$ ) позволил осуществить три шага деформации. Вырожденные элементы также появляются в слое, расположенном между двумя сферами.

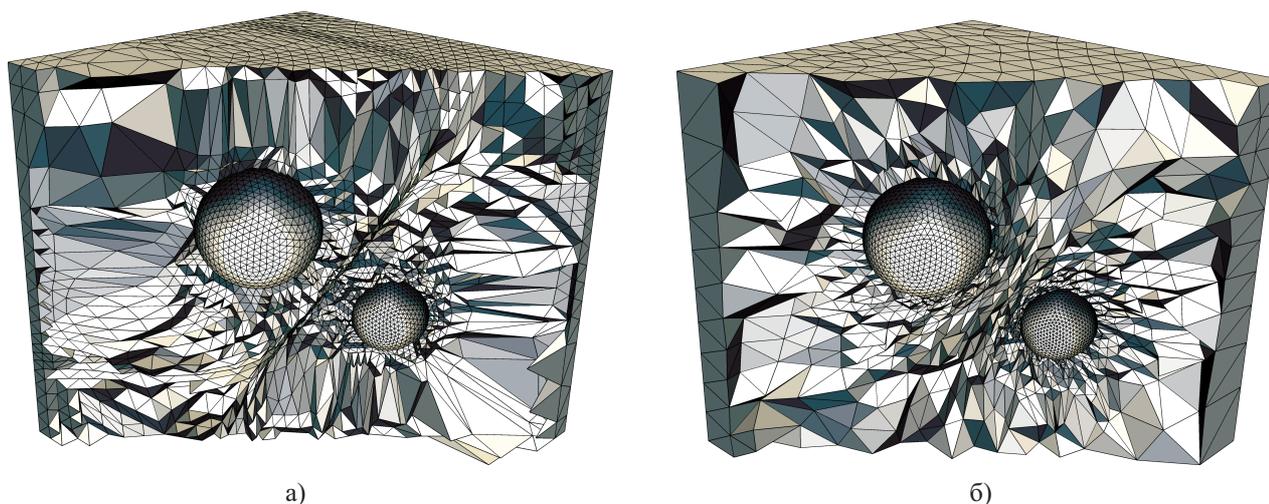


Рис. 3. Пример деформирования сетки в задаче движения сфер: а) диффузионный алгоритм; б) радиальные базисные функции

Деформированные сетки, полученные с помощью различных РБФ (рис. 3б), стабильно дают примерно одинаковые меры качества даже на пятом шаге деформации (табл. 2). На шестом шаге появляются вырожденные элементы, расположенные в слое между двумя сферами. Введение радиуса влияния для всех рассмотренных функций на первом шаге порождает вырожденные элементы.

**3.4. Поворот заслонки в канале.** Следующий тест задачи деформирования сетки представлен для случая взаимодействия потока газа с открывающейся заслонкой. Тетраэдральная расчетная сетка состояла из 167 810 тетраэдров и 31 442 узлов. Поворот заслонки осуществлялся вокруг оси  $O_x$  за один шаг и составил  $60^\circ$ . На рис. 4 представлены исходная расчетная сетка и сетка после поворота заслонки на  $60^\circ$ .

Максимальный угол поворот в методе Шепарда без вырождения элементов составил  $10^\circ$  при значении параметра  $p = 6$ . Вырожденные элементы появляются вблизи оси поворота пластины. Это связано с ограничением влияния интерполирующей функции в области между поворачиваемой заслонкой и границами области, содержащей небольшое число ячеек. Использование алгоритма МДА позволило повернуть заслонку на угол  $20^\circ$ . При увеличении угла поворота алгоритм деформирует границу области несмотря на ее закрепление, что является недопустимым. Эта особенность накладывает дополнительные условия на проверку качества получаемой сетки при решении сопряженных задач, что увеличивает вычислительные затраты. Максимальная деформация достигнута с использованием радиальной базисной функции с компактным носителем  $WC0$   $\phi(\|\mathbf{x}\|) = \left(1 - \frac{\|\mathbf{x}\|}{r}\right)^2 \in C^0$ . Результаты показали, что деформирование сетки практически не ухудшило мер качества сетки, несмотря на большой угол ( $60^\circ$ ) поворота заслонки. Дальнейшее увеличение угла поворота порождает вырожденные элементы, как в случае с методом Шепарда, вблизи оси поворота заслонки. Как и в тесте с движением сфер, радиус влияния, при первом шаге порождает вырожденные элементы.

Оценка времени выполнения методов получена на гибридном вычислительном кластере “Уран” ИММ УрО РАН с графическими ускорителями и использованием технологии CUDA. Для методов Шепарда (3)

и диффузионной аналогии (1) вычислительные затраты на центральном процессоре близки и составили примерно 13 секунд. Для решения задачи деформирования с помощью РБФ рассматривались различные базисные функции. Расчеты показали, что время решения СЛАУ зависит от выбора базисной функции. Это связано с тем, что получаемые матрицы для построения интерполянта имеют разные числа обусловленности  $\kappa$ . Оценки показывают, что для радиальных функций вида WC0 обусловленность системы (4) может быть порядка  $\kappa = Ch^{-4}$ , а WC2  $\kappa = Ch^{-6}$ , где  $h$  — характерный размер сетки,  $C$  — некоторая константа.

Например, для функции WC0 обусловленность матрицы составляет  $\kappa = 2.6 \times 10^7$ , при этом время решения СЛАУ одним потоком центрального процессора составило 42.03 секунды. Использование графических ускорителей для решения СЛАУ позволило сократить время расчета до 3.1 секунды. Несмотря на большой порядок числа обусловленности некоторых получаемых матриц, использование диагонального предобусловливателя для метода сопряженных градиентов обеспечило сходимость решения.

Кроме того, отметим, что суммарные затраты в связанном приложении должны учитывать формирование матриц, постановку граничных условий и оценку мер качества и, тем самым, порой могут нивелировать затраты, связанные с тем или иным алгоритмом.

**4. Заключение.** Применение радиальных базисных функций к задаче деформирования обеспечивает более высокое качество получаемых сеток и большие значения деформации. Алгоритм диффузионной аналогии и метод Шепарда менее требовательны к вычислительным ресурсам. Однако применение графических ускорителей при решении задачи деформирования расчетной сетки и метода РБФ позволяет сократить время решения, которое становится сопоставимо со временем решения другими рассматриваемыми методами. Использование функций с компактным носителем в качестве радиальной базисной функции позволяет учитывать влияние только ближайших узлов, что необходимо при решении задач со сложной геометрией.

Введение радиуса влияния сокращает число узлов, участвующих при формировании матрицы интерполянта, что уменьшает размер получаемой СЛАУ и, как следствие, сокращает время ее решения. Как показывают тесты, радиус влияния можно вводить только с учетом представления о характере деформаций конкретной задачи на каждом временном шаге решения сопряженной задачи.

Полученные результаты показали, что выбор радиальных базисных функций, используемый для получения деформируемых сеток с допустимыми мерами качества, различен для двумерных и трехмерных областей. В рассматриваемых случаях двумерных областей наиболее качественная сетка получается с функциями WUC2, WC0, GA, WUC4. С функциями WUC0, GA2 наблюдается вырождение элементов уже при небольших степенях деформации. В трехмерном случае высокое качество получаемых сеток достигается с использованием радиальных функций GA, WUC0. Для функций MQ, IMQ, TPS как в двумерном, так и в трехмерном случае получаемые матрицы имеют числа обусловленности  $\kappa \sim 10^{20}$ , что сказывается на сходимости решения СЛАУ и приводит к необходимости построения специальных предобусловливателей.

При небольших деформациях и объемах сеточных данных, с точки зрения вычислительных затрат, эффективнее применять метод Шепарда, не требующий сеточной структуры данных. Однако бессеточный метод РБФ с глобальными функциями является более универсальным для деформирования сеток в сопряженных задачах, его эффективность возрастает с увеличением величины деформации и объема интерполируемых данных.

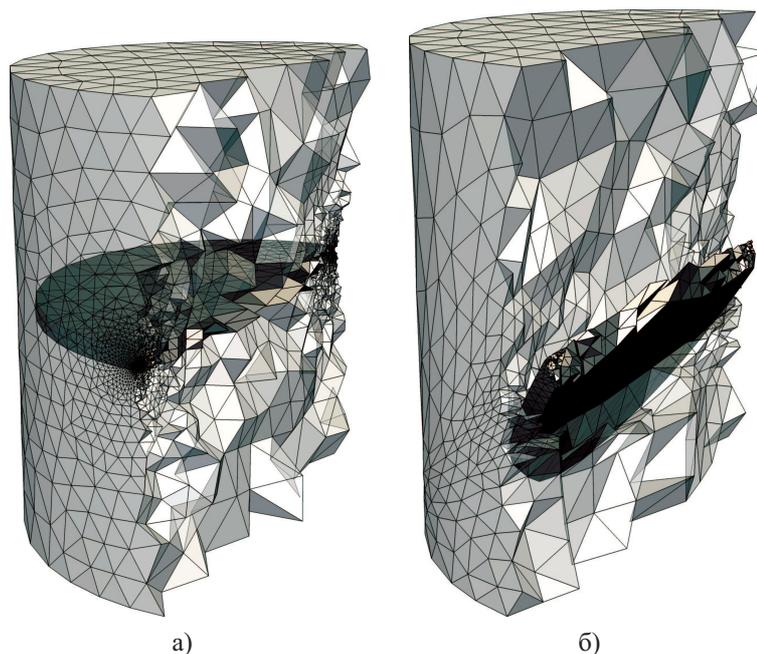


Рис. 4. Пример деформирования сетки в задаче взаимодействия потока газа с открывающейся заслонкой: а) исходная сетка; б) сетка после поворота заслонки на 60°

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Batina J.T.* Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes // *AIAA Journal*. 1990. **28**, N 8. 1381–1388.
2. *Farhat C., Degand C., Koobus B., Lesoinne M.* An improved method of spring analogy for dynamic unstructured fluid meshes // *AIAA Paper*. 1998. 1998–2070.
3. *Degand C., Farhat C.* A three-dimensional torsion spring analogy method for unstructured dynamic meshes // *Computers and Structures*, 2002. **80**. 305–316.
4. *Волков К.Н.* Дискретизация уравнений Навье–Стокса на подвижных неструктурированных сетках // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**. 256–273.
5. Построение разностных сеток с помощью уравнений Бальтрами и диффузии / Под ред. Глассер А.Г., Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И., Васева И.А., Лиханова Ю.В. Новосибирск: Наука, 2006.
6. *Jasak H., Tuković Ž.* Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method // *Transactions of FAMENA*. 2007. **30**, N 2. 1–18.
7. *Shepard D.* A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data // *Proc. of the 1968 ACM National Conference*. New York: ACM Press, 1968. 517–524.
8. *de Boer A., van der Schoot M.S., Bijl H.* Mesh deformation based on radial basis function interpolation // *Computer and Structures*. 2007. **85**. 784–795.
9. *Schaback R.* Creating surfaces from scattered data using radial basis functions // *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design III*. Dohlen M., Lyche T., Schumaker L.L. (Eds.). Nashville: Vanderbilt Univ. Press, 1995. 477–496.
10. *Копысов С.П., Кузьмин И.М., Недожогин Н.С., Новиков А.К.* Параллельные алгоритмы формирования и решения системы дополнения Шура на графических ускорителях // *Ученые записки Казанского университета. Сер. Физико-математическая*. 2012. № 3. 190–201.
11. *Копысов С.П., Новиков А.К., Пономарев А.Б., Рычков В.Н.* Программная среда генерации, перестроения, разделения сеток и построения расчетных моделей для параллельных распределенных вычислений // *Вычислительные методы и программирование*. 2006. **7**, № 2. 137–150.
12. *Stimpson C.J., Ernst C.D., Knupp P., Pebay P., Thompson D.* The Verdict Geometric Quality Library. Sandia Lab. Report SAND2007-175. Sandia, 2007.

Поступила в редакцию  
25.04.2013

---