УДК 519.62

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА

О. Б. Арушанян[1], Н. И. Волченскова[1], С. Ф. Залеткин[1]

Предложен численно-аналитический метод решения задачи Коши для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод основан на приближении решения и его производной частичными суммами смещенных рядов Чебышёва. Коэффициенты рядов определяются с помощью итерационного процесса с применением квадратурной формулы Маркова с одним или двумя фиксированными узлами. Метод дает аналитическое представление решения и его производной и может быть использован для вычисления решений обыкновенных дифференциальных уравнений с более высокой точностью и с более крупным шагом дискретизации по сравнению с методами типа Рунге–Кутта и Адамса.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова.

1. Введение. В настоящей статье описывается метод приближенного решения задачи Коши для нормальных нежестких систем M обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X. \tag{1}$$

В основу метода положено разложение правой части системы, взятой на решении задачи, на сегменте $[x_0, x_0+h]$, $h \leqslant X$, в ряд Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Частичная сумма ряда используется в качестве многочлена, аппроксимирующего правую часть $f(x, y(x))$ уравнения (1). Вычисление коэффициентов разложения выполняется по квадратурной формуле Маркова с одним или двумя фиксированными узлами.

Как известно, на основе степенных разложений строятся одношаговые методы типа Рунге–Кутта и многошаговые методы типа Адамса. Приближенное решение y_h, вычисляемое на одном шаге методом Рунге–Кутта порядка n, имеет такой же порядок точности, что и увеличенная на единицу степень многочлена $P(x)$ в разложении точного решения $y(x)$ задачи (1) по формуле Тейлора на сегменте $[x_0, x_0+h]$:

$$y(x) = y_0 + (x-x_0)\,y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\,y_0'' + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\,y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,y_0^{(n+1)}(\xi) = P(x) + O\big((x-x_0)^{n+1}\big).$$

Здесь $y_0^{(j)} = y^{(j)}(x_0)$ и $x_0 < \xi < x_0+h$. Иными словами, это приближенное значение, по-существу, является с точностью до $O\big(h^{n+1}\big)$ значением $P(x_0+h)$ многочлена Тейлора в конце частичного сегмента $[x_0, x_0+h]$.

Однако многочлен Тейлора не является многочленом наилучшего равномерного приближения для $y(x)$ на данном сегменте. В отличие от многочлена Тейлора частичная сумма n-го порядка разложения решения $y(x)$ на том же сегменте в ряд Чебышёва не только является многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения для функции $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_0+h]$, но и дает для этой функции хорошее равномерное приближение на всем этом отрезке. Тем самым аппроксимация дифференциального уравнения, основанная на частичных суммах ряда Чебышёва, позволяет существенно повысить точность интегрирования дифференциальных уравнений по сравнению с методами типа Рунге–Кутта и при этом значительно увеличить длину h частичного сегмента. Это же относится и к многошаговым методам типа Адамса. Можно сказать, что интегрирование дифференциальных уравнений выполняется с помощью многочленов наилучшего равномерного приближения. Приведенные в разделе 8 примеры подтверждают это заключение (см. также [15–23]).

---

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, д. 1., стр. 4, 119992, Москва; О. Б. Арушанян, зав. лабораторией, e-mail: arush@srcc.msu.ru; Н. И. Волченскова, ст. науч. сотр., e-mail: nad1946@srcc.msu.ru; С. Ф. Залеткин, ст. науч. сотр., e-mail: iraz@srcc.msu.ru

Метод рядов Чебышёва применяется в [1–4] для частного случая линейных дифференциальных уравнений, когда коэффициенты уравнений имеют уже известные коэффициенты Чебышёва. В [28, 29] описано приложение аппроксимации на основе рядов Чебышёва для решения задач эфемеридной астрономии. В предлагаемом нами подходе расширена область применимости метода рядов Чебышёва.

Таким образом, в настоящей статье обсуждается новый численно-аналитический метод решения задачи Коши для линейных и нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1), принципиально отличающийся от традиционных методов типа Рунге–Кутта и типа Адамса. Для его практического применения достаточно иметь только подпрограмму вычисления правой части $f(x, y)$ системы (1).

Будем использовать систему смещенных многочленов Чебышёва первого рода $T_i^*(x)$ на отрезке [0, 1] и смещенный ряд Чебышёва $\sum\limits_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\varphi] T_i^*(x)$ для функции $\varphi(x) \in C^q_{[0,\,1]}$ с коэффициентами

$$a_i^*[\varphi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, \varphi(x) T_i^*(x)\, dx$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем 1/2). Предполагаем, что $f(x, y)$ имеет достаточное число непрерывных частных производных в области определения уравнения, обеспечивающих верность приводимых оценок и обоснованность применяемых преобразований.

2. Разложение решения задачи Коши и его производной в ряд Чебышёва. Зададим $h \leqslant X$ и рассмотрим на частичном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ задачу Коши (1). Пусть $\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h) = f\big(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\big)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Из допущения о гладкости правой части в (1) следует равномерная сходимость на $[x_0, x_0 + h]$ рядов

$$y(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad \Phi(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty}{}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha)$$

(для равномерной сходимости достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ имела непрерывные частные производные первого порядка). Коэффициенты Чебышёва разложения для $y(x_0 + \alpha h)$ связаны с коэффициентами разложения правой части $\Phi(\alpha)$ следующими соотношениями:

$$a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = \frac{h}{4i}\,\big(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\big), \qquad i > 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big] = y_0 + \frac{h}{4}\,\Big(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\, a_1^*[\Phi]\Big) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - 1}\, a_j^*[\Phi]. \tag{3}$$

3. Вывод уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва для правой части. Из приведенных соотношений видно, что для практического применения ортогонального разложения для $y(x_0 + \alpha h)$ необходимо иметь значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$, взятой на решении исходной задачи Коши. Для этого мы перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части, и описанию алгоритма их решения.

Рассмотрим частичную сумму ряда Чебышёва порядка k функции $\Phi(\alpha)$:

$$S_k(\alpha, \Phi) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha).$$

Вычислим коэффициенты $a_i^*[\Phi]$ по квадратурной формуле Маркова [5–11] с одним ($\alpha_0 = 0$) или двумя ($\alpha_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = 1$) наперед заданными узлами, k нефиксированными узлами $\alpha_j = \dfrac{1}{2}\Big(1 + \cos\dfrac{j\pi}{k+1}\Big)$, $j = 1, \ldots, k$, и весовой функцией $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$. Пусть многочлен $L_k(\alpha)$ представляет полученную таким образом частичную сумму:

$$L_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[L_k] T_i^*(\alpha), \tag{4}$$

где

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \frac{(-1)^i}{k+1}\, \Phi(0) + \frac{1}{k+1}\, \Phi(1) + \frac{2}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \cos\frac{ij\pi}{k+1}\, \Phi(\alpha_j). \tag{5}$$

Здесь использована квадратурная формула Маркова с двумя наперед заданными узлами; два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем $1/2$.

Заметим, что $L_k(\alpha)$ является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения для $\Phi(\alpha)$ на множестве узлов этой квадратурной формулы: α_j, $j=0,1,\dots,k+1$ [9, 10]. Если же для вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ использовать квадратурную формулу Маркова с одним наперед заданным узлом и k нефиксированными узлами $\alpha_j = \dfrac{1}{2}\Big(1+\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}\Big)$, $j=1,\dots,k$, то полученная таким же способом частичная сумма

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[J_k]T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}{}'\Phi(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j),$$

оказывается интерполяционным многочленом для $\Phi(\alpha)$ с узлами интерполирования, совпадающими с узлами квадратурной формулы α_j, $j=0,1,\dots,k$ [8, 10].

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $L_k(\alpha)$. Погрешность аппроксимации состоит из остаточного члена $r_k(\alpha,\Phi)$ ряда Чебышёва и ошибок в приближенных значениях коэффициентов Чебышёва:

$$\Phi(\alpha) - L_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha,\Phi),$$

где

$$R_i = R(\Phi T_i^*) = \frac{-1}{2^{4k+2}(2k+2)!}\sum_{l=0}^{i} C_{2k+2}^{l}\Phi^{(2k+2-l)}(\eta)T_i^{*(l)}(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Используя оценки для остатков ряда Чебышёва и квадратурной формулы Маркова [9, 10, 12], можно показать, что суммарная погрешность имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$.

Пусть

$$U(x_0+\alpha h) = y(x_0) + h\int_0^{\alpha} L_k(\xi)\,d\xi, \qquad \tilde\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, U(x_0+\alpha h)\big). \tag{6}$$

Определим числа $a_i^*[\tilde L_k]$, $i=0,1,\dots,k$, и многочлен $\tilde L_k(\alpha)$ по формулам

$$a_i^*[\tilde L_k] = \frac{2}{k+1}{\sum_{j=0}^{k+1}}{}''\tilde\Phi(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j), \qquad \tilde L_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}{}' a_i^*[\tilde L_k]T_i^*(\alpha). \tag{7}$$

Значения правой части $\tilde\Phi(\alpha_j)$ зависят от функции $U(x_0+\alpha h)$, которая, в свою очередь, зависит от коэффициентов Чебышёва $a_i^*[L_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0+\alpha h)$ системы (1), а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[L_k]$ в (4) и (5) являются неизвестными величинами. Будем определять коэффициенты Чебышёва функции $U(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}{}' a_i^*[U]T_i^*(\alpha)$ с помощью соотношений (2) и (3), в которых надо y заменить на U, а $a_i^*[\Phi]$ — на $a_i^*[\tilde L_k]$ из (7). Поэтому соотношения (7) являются уравнениями относительно коэффициентов $a_i^*[\tilde L_k]$.

Рассматривая $U(x_0+\alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0+\alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde L_k],\dots,a_k^*[\tilde L_k]$ и обозначая $x_j^0 = x_0+\alpha_j h$, запишем уравнения (7) в виде

$$a_i^*[\tilde L_k] = \frac{2}{k+1}{\sum_{j=0}^{k+1}}{}'' f\big(x_j^0, U(x_j^0; a_0^*[\tilde L_k],\dots,a_k^*[\tilde L_k])\big)\,T_i^*(\alpha_j). \tag{8}$$

4. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части системы. Подставляя в (8) вместо $a_i^*[\tilde L_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$, получим

$$a_i^*[\Phi] = \frac{2}{k+1}{\sum_{j=0}^{k+1}}{}'' f\big(x_j^0, U(x_j^0; a_0^*[\Phi],\dots,a_k^*[\Phi])\big)T_i^*(\alpha_j) + \rho_i. \tag{9}$$

Левая часть равенства (9) принимает значение $a_i^*[L_k]+R_i$, сумма в правой части (8) равна $a_i^*[L_k]+O(h^{k+2})$ для системы $y'=f(x,y)$ и равна $a_i^*[L_k]$ для системы $y'=f(x)$. Заметим, что $R_i=O(h^{2k+2-i})$ при $h\to 0$; в частности, $R_k=O(h^{k+2})$. Таким образом, невязка

$$\rho_i=a_i^*[\Phi]-\frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}''f\big(x_j^0,U(x_j^0;a_0^*[\Phi],\dots,a_k^*[\Phi])\big)T_i^*(\alpha_j),\qquad i=0,1,\dots,k, \tag{10}$$

которая при этом получается, будет иметь порядок

$$\rho_i=O(h^{2k+2-i})+O(h^{k+2}),\qquad \text{т.е.}\qquad \rho_i=O(h^{k+2}),\quad i=0,1,\dots,k, \tag{11}$$

для $y'=f(x,y)$ и $\rho_i=O(h^{2k+2-i})$ для $y'=f(x)$.

Обозначим $\delta_i=a_i^*[\Phi]-a_i^*[\tilde{L}_k]$, $i=0,1,\dots,k$. Вычитая (8) из (9) и используя формулу конечных приращений Лагранжа, имеем

$$\delta_i=\frac{2}{k+1}\sum_{m=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{k+1}{}''\frac{\partial f(x_j^0,\hat{y})}{\partial y}\,\frac{\partial U(x_j^0;\hat{a}_0,\,\dots\,,\hat{a}_k)}{\partial a_m^*[\Phi]}\,T_i^*(\alpha_j)\right]\delta_m+\rho_i.$$

В производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial a_m^*}$ аргументы с крышечкой наверху $\hat{y},\hat{a}_0,\dots,\hat{a}_k$ берутся в соответствии с теоремой Лагранжа о среднем значении. Как видно из (2) и (3), скалярная матрица $\dfrac{\partial U(x_j^0;\hat{a}_0,\,\dots\,,\hat{a}_k)}{\partial a_m^*[\Phi]}$ порядка M содержит множитель h. Поэтому последнее равенство может быть представлено в виде

$$\delta_i=\frac{2}{k+1}\sum_{m=0}^{k}hQ_{im}\delta_m+\rho_i,\qquad i=0,1,\dots,k,$$

где Q_{im} — квадратные матрицы порядка M, зависящие от i и m. Отсюда вытекает, что δ_i имеет тот же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е. $\delta_i=O(h^{k+2})$, $i=0,1,\dots,k$, для системы $y'=f(x,y)$ и $\delta_i=O(h^{2k+2-i})$ для системы $y'=f(x)$. Приведенные оценки верны, если $f(x,y)$ имеет непрерывные производные по x и y до порядка $2k+2$ включительно.

5. Итерационный процесс определения коэффициентов Чебышёва. Применим метод последовательных приближений для решения системы уравнений (8). Пусть мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i=0,1,\dots,k$. Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{L}_k]$. Способы выбора нулевого приближения рассмотрены в [20–23]. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$, полагая здесь $\nu=0$, $i=0,1,\dots,k$.

Определим ν-е приближение коэффициентов $a_i^*[U]$ решения U по формулам (2) для $i=1,2,\dots,k+1$ и (3) для $i=0$, а именно

$$a_i^{*(\nu)}[U]=\frac{h}{4i}\big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]-a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]\big),\qquad i=1,2,\dots,k+1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\,a_0^{*(\nu)}[U]=y_0+\frac{h}{4}\big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]-\frac{1}{2}\,a_1^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]\big)-\frac{h}{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{(-1)^j}{j^2-1}\,a_j^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]. \tag{13}$$

Входящие в (12) коэффициенты $a_{k+1}^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$, $a_{k+2}^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U]$ вычисляем ν-е приближение

$$U^{(\nu)}(x_j^0)=\sum_{i=0}^{k+1}{}'a_i^{*(\nu)}[U]T_i^*(\alpha_j),\qquad \tilde{\Phi}(\alpha_j)=f\big(x_j^0,U^{(\nu)}(x_j^0)\big),\qquad j=1,\dots,k+1. \tag{14}$$

Теперь по первой формуле (7) или, что то же самое, по формуле (8) находим $(\nu+1)$-е приближение коэффициентов Чебышёва правой части системы (1), а именно

$$\begin{aligned} a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{L}_k]&=\frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}''\tilde{\Phi}(\alpha_j)T_i^*(\alpha_j)=\\ &=\frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}''f\big(x_j^0,U^{(\nu)}(x_j^0)\big)T_i^*(\alpha_j),\qquad i=0,1,\dots,k. \end{aligned} \tag{15}$$

Дальнейшие приближения для $a_i^{*(\nu)}[U]$ и $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{L}_k]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, строятся по такой же схеме с использованием формул (12)–(15). Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U^{(\nu)}(x_j^0)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$ на единицу. При этом порядок точности приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно $y(x_j^0) - U^{(\nu)}(x_j^0)$ и $a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$, увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности $O(h^{k+2})$ формулы $y(x) \approx U(x_0+\alpha h)$, в которой U определяется по формулам (4)–(6). Итерации продолжаются до достижения максимального порядка точности решения, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$ и $a_i^*[\Phi]$ решения задачи Коши и правой части (1) принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu + 1$, а именно

$$a_i^*[y] = a_i^{*(\nu+1)}[U], \quad i = 0, 1, \ldots, k+1, \quad a_i^*[\Phi] = a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{L}_k], \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{16}$$

6. Сходимость итерационного процесса. Рассмотрим условия сходимости метода последовательных приближений.

Систему уравнений (8), решением которой являются коэффициенты $a_i^*[\tilde{L}_k]$, запишем в виде

$$a_i^*[\tilde{L}_k] = \varphi_i\big(a_0^*[\tilde{L}_k], a_1^*[\tilde{L}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{L}_k]\big), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

где $\varphi_i\big(a_0^*[\tilde{L}_k], a_1^*[\tilde{L}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{L}_k]\big)$ — правая часть системы (8). Обозначим l-ю компоненту вектор-функции φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{L}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, $i, m = 0, 1, \ldots, k$, $l, n = 1, \ldots, M$. Учитывая, что каждая компонента вектора U зависит от одноименной компоненты вектора $a_m^*[\tilde{L}_k]$, получаем для производной следующее выражение:

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \frac{\partial f\big(x_j^0, U(x_j^0; a_0^*[\tilde{L}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{L}_k])\big)}{\partial y_n} \frac{\partial U_n(x_j^0; a_0^*[\tilde{L}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{L}_k])}{\partial a_{nm}} T_i^*(\alpha_j).$$

Из (2) и (3) вытекает, что

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{17}$$

Из выражения для невязки (10) и оценок (11), (17) следует, что система (8) имеет единственное решение, которое можно получить методом последовательных приближений [13, 14]. Выбрав малую длину h частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, можно обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода простой итерации (14), (15). Если Q — матрица, составленная из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей найденных частных производных $\max\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, то достаточным условием для сходимости метода простой итерации является условие, что какая-нибудь норма матрицы Q меньше единицы, например

$$||Q||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \quad ||Q||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{M(k+1)} Q_{ij} < 1, \quad ||Q||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{M(k+1)} Q_{ij}^2} < 1,$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $Q^T Q$ [13, 14]. Таким образом, при значениях h, для которых удовлетворяется какое-либо из выписанных условий, последовательные приближения $a_i^{*(\nu)}[\tilde{L}_k]$, определяемые по (14), (15), будут при $\nu \to \infty$ сходиться к решению системы (8).

7. Аналитическое приближение к решению задачи Коши. Определенные итерационным способом значения (16) коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$ используются в частичной сумме

$$y(x_0 + \alpha h) \approx U(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

для аналитического представления приближенного решения задачи Коши (1) на частичном сегменте $[x_0, x_0 + h]$. В частности, значение решения в конце сегмента $x_0 + h$ может быть найдено по формуле

$$y(x_0 + h) \approx U(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y].$$

При этом погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$ имеет порядок $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ определяются с помощью приведенного выше итерационного процесса приближенно, то указанная здесь оценка погрешности решения справедлива тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно h.

8. Примеры. В этом разделе рассмотрены пять тестовых задач Коши. Одна задача линейная, остальные нелинейные. В первых трех задачах приближенное решение строится в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышёва на заданном промежутке интегрирования [0, 1]. В задачах 4 и 5 задается разбиение отрезка интегрирования на несколько частичных сегментов и на каждом сегменте решение представляется в виде частичной суммы ряда. Ранее метод рядов Чебышёва сравнивался в [15–23] с другими численными методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Набор таких методов включал в себя одношаговые методы типа Рунге–Кутта (классический метод Рунге–Кутта и метод Мерсона четвертого порядка, а также неявный трехстадийный метод Рунге–Кутта шестого порядка) и многошаговые методы (предсказывающе-исправляющие методы Адамса и Штермера пятого порядка).

В настоящей статье метод рядов Чебышёва сравнивается с двумя другими методами. Это метод Гира для нежестких систем с автоматическим выбором шага интегрирования и переменным порядком (максимальный допустимый порядок равен семи) [24, 25]. Метод Гира является многошаговым предсказывающе-исправляющим методом Адамса, в котором так называемый *фронт многошагового метода* запоминается в виде вектора факторизованных производных и в котором предсказание и исправление имеют один и тот же порядок. С методом Гира сравнение ведется на тестовых задачах 2, 3 и 4. Второй метод — это гибридный алгоритм [24], с которым проводится сравнение в примере 5. Все вычисления проводились с 15–16 значащими цифрами.

Пример 1. Интегрируется дифференциальное уравнение

$$y' = 512x^3 - 768x^2 + 320x - 32, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{18}$$

Правая часть уравнения (18) равна $8U_3^*(x)$, где $U_3^*(x)$ — смещенный многочлен Чебышёва второго рода. В табл. 1 приведены коэффициенты Чебышёва разложения решения $y(x) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(x)$ и его производной $y'(x) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[y']T_i^*(x)$ на отрезке [0, 1] при $k = 5$. Там же даны точное решение в конце промежутка интегрирования, его приближенное значение и абсолютная погрешность.

Таблица 1

Номер коэффициента	Коэффициенты Чебышёва	
	для y	для y'
0	$-.6862999751833243 \times 10^{-15}$	$.1291935308733727 \times 10^{-14}$
1	$-.6459676543668635 \times 10^{-15}$	$.1600000000000000 \times 10^{2}$
2	$.0000000000000000 \times 10^{0}$	$.5167741234934908 \times 10^{-14}$
3	$-.1076612757278106 \times 10^{-15}$	$.1600000000000000 \times 10^{2}$
4	$.1000000000000000 \times 10^{1}$	$.6459676543668635 \times 10^{-14}$
5	$.3229838271834318 \times 10^{-15}$	$.0000000000000000 \times 10^{0}$
6	$.0000000000000000 \times 10^{0}$	—
Приближенное и точное решения при $x = 1$ и абсолютная погрешность: Y $=.9999999999999991 \times 10^{0}$ YT$=.1000000000000000 \times 10^{1}$ DELTA Y $=.8881784197001252 \times 10^{-15}$		

Второй столбец табл. 1 содержит коэффициенты Чебышёва для решения $y(x)$. Все коэффициенты, кроме четвертого, с точностью до ошибок округления равны нулю; четвертый коэффициент равен единице. Отсюда следует, что решением задачи Коши (18) является смещенный многочлен Чебышёва $T_4^*(x)$. Третий столбец таблицы содержит коэффициенты Чебышёва для производной $y'(x)$. Все коэффициенты, кроме первого и третьего, с точностью до ошибок округления равны нулю; первый и третий коэффициенты равны 16. Таким образом, производная решения равна $y'(x) = 16\big(T_1^*(x)+T_3^*(x)\big)$ или $\big(T_4^*(x)\big)' = 8U_3^*(x)$. Последнее равенство совпадает с выражением для производной смещенных многочленов Чебышёва через многочлены Чебышёва второго рода при $n = 3$:

$$\big(T_{n+1}^*(x)\big)' = 2(n+1)U_n^*(x).$$

Таким образом, если правая часть уравнения является алгебраическим многочленом, то результат интегрирования такого уравнения методом рядов Чебышёва заключается в том, что разложения решения и его производной по степеням независимой переменной преобразуются в разложения по смещенным многочленам Чебышёва первого рода.

Пример 2. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = e^{-y}, \qquad y(0) = \ln 2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{19}$$

Точным решением задачи является логарифмическая функция $y(x) = \ln(2+x)$. Приближенные значения коэффициентов Чебышёва разложения решения $y(x) \approx \sum\limits_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ на отрезке [0, 1] вычисляются при $k = 15$. Результаты вычислений представлены в табл. 2. Там же приведены точное решение задачи (19), его приближенное значение в конце промежутка интегрирования и абсолютная погрешность.

Таблица 2

Номер коэффициента	Коэффициент	Абсолютная погрешность коэффициента
0	$.1812274616882574 \times 10^{1}$	$.0000000000000000 \times 10^{0}$
1	$.2020410288672876 \times 10^{0}$	$-.2775557561562891 \times 10^{-15}$
2	$-.1020514433643804 \times 10^{-1}$	$.2949029909160572 \times 10^{-16}$
3	$.6872859538243735 \times 10^{-3}$	$-.4553649124439119 \times 10^{-17}$
4	$-.5207248546376935 \times 10^{-4}$	$.2934122129288896 \times 10^{-17}$
5	$.4208311415510729 \times 10^{-5}$	$-.2363221922839498 \times 10^{-18}$
6	$-.3542714867415160 \times 10^{-6}$	$-.1688295482555431 \times 10^{-17}$
7	$.3067601814802804 \times 10^{-7}$	$.5179143251317017 \times 10^{-18}$
8	$-.2711543742360892 \times 10^{-8}$	$-.1327252651871961 \times 10^{-19}$
9	$.2434858163856567 \times 10^{-9}$	$.2934237624381924 \times 10^{-18}$
10	$-.2213735648785853 \times 10^{-10}$	$.2754636195440061 \times 10^{-18}$
11	$.2033024001671632 \times 10^{-11}$	$.6463074148258942 \times 10^{-18}$
12	$-.1882623831134245 \times 10^{-12}$	$-.4636543614574714 \times 10^{-19}$
13	$.1755606877822220 \times 10^{-13}$	$-.6526479310647954 \times 10^{-18}$
14	$-.1646004761062565 \times 10^{-14}$	$-.7768954747967931 \times 10^{-18}$
15	$.1562985851855103 \times 10^{-15}$	$-.1030437089104304 \times 10^{-17}$
16	$-.1509751525186065 \times 10^{-16}$	$.3925763182436730 \times 10^{-18}$
Приближенное и точное решения при $x = 1$ и абсолютная погрешность: Y $=.1098612288668110 \times 10^{1}$ YT$=.1098612288668110 \times 10^{1}$ DELTA Y $=.0000000000000000 \times 10^{0}$		

Второй столбец табл. 2 содержит приближенные значения коэффициентов разложения решения $y(x)$, третий столбец содержит абсолютные погрешности приближенных значений этих коэффициентов. Погрешности коэффициентов определялись исходя из следующей формулы для смещенного ряда Чебышёва логарифмической функции:

$$\ln(2+x) = 2\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\,\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2i}}{i}\,T_i^*(x).$$

Нулевой коэффициент $a_0^*[y]$ имеет все верные значащие цифры. Первый коэффициент имеет 15 верных знаков после десятичной запятой, второй коэффициент имеет 16 верных знаков. Остальные коэффициенты имеют от 17 до 19 верных знаков после десятичной запятой. Поскольку все коэффициенты Чебышёва для $y(x)$ с десятичными порядками от 10^1 до 10^{-16} содержатся в частичной сумме $\sum\limits_{i=0}^{16}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ и имеют абсолютные погрешности не менее чем с 16 нулями после десятичной запятой, все цифры в полученном приближенном значении решения $y(1)$ являются верными.

При интегрировании задачи (19) методом Гира седьмого максимального допустимого порядка наилучшая фактически достигнутая точность в конце отрезка [0, 1] составляет 0.444×10^{-15}, при этом для достижения этой точности требуется выполнить 141 шаг интегрирования и 301 вычисление правой части уравнения (19). В методе рядов Чебышёва решение получено за один шаг и 289 обращений к правой части.

Пример 3. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2q}{1+\operatorname{tg}^2 y}, \quad y(0) = -\operatorname{arctg} q, \quad q = \frac{1}{8}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{20}$$

Точным решением задачи является обратная тригонометрическая функция $y(x) = \operatorname{arctg}\big[q/(2x-1)\big]$. Приближенные значения коэффициентов Чебышёва разложения решения $y(x) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ на отрезке $[0,\ 1]$ вычислены описанным выше итерационным методом при $k = 10$ за пять итераций. Результаты вычислений представлены в табл. 3. Там же приведены точное решение задачи (20), его приближенное значение в конце промежутка интегрирования вместе с абсолютной погрешностью.

Таблица 3

Номер коэффициента	Коэффициент	Абсолютная погрешность коэффициента
0	$-.1158741071843883 \times 10^{-16}$	$.1158741071843883 \times 10^{-16}$
1	$.1245154965970993 \times 10^{0}$	$.0000000000000000 \times 10^{0}$
2	$-.4301656822630964 \times 10^{-17}$	$.4301656822630964 \times 10^{-17}$
3	$-.1608751515071087 \times 10^{-03}$	$.3279711571768651 \times 10^{-17}$
4	$-.3525774642946025 \times 10^{-17}$	$.3525774642946025 \times 10^{-17}$
5	$.3741338800658270 \times 10^{-06}$	$.1489030981713857 \times 10^{-17}$
6	$-.8042577834179582 \times 10^{-18}$	$.8042577834179582 \times 10^{-18}$
7	$-.1035823646552640 \times 10^{-08}$	$.6494672685957570 \times 10^{-18}$
8	$-.1591892545246051 \times 10^{-18}$	$.1591892545246051 \times 10^{-18}$
9	$.3122637670315579 \times 10^{-11}$	$.4727965388152965 \times 10^{-16}$
10	$-.1567010952420456 \times 10^{-18}$	$.1567010952420456 \times 10^{-18}$
11	$-.9826548575739707 \times 10^{-14}$	$-.7640659518605187 \times 10^{-16}$
Приближенное и точное решения при $x = 1$ и абсолютная погрешность: Y $=.1243549945467614 \times 10^{0}$ YT$=.1243549945467614 \times 10^{0}$ DELTA Y$=.2775557561562891 \times 10^{-16}$		

Второй столбец табл. 3 содержит приближенные значения коэффициентов разложения решения $y(x)$, третий столбец содержит абсолютные погрешности приближенных значений этих коэффициентов.

Абсолютные погрешности коэффициентов определялись исходя из следующего выражения смещенного ряда Чебышёва для обратной тригонометрической функции:

$$\operatorname{arctg}\frac{q}{2x-1} = 2\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{p^{2i+1}}{2i+1} T_{2i+1}^*(x), \quad p = \frac{\sqrt{1+q^2}-1}{q}, \quad q \neq 0.$$

Четные коэффициенты данного разложения равны нулю. Соответствующие им приближенные значения (второй столбец таблицы) имеют десятичные порядки -16, -17, -18. Приближенные значения нечетных коэффициентов имеют от 16 до 18 верных знаков после десятичной запятой. Поскольку все ненулевые (нечетные) коэффициенты Чебышёва для $y(x)$ с десятичными порядками от 10^0 до 10^{-16} содержатся в частичной сумме $\sum_{i=0}^{11}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ и имеют абсолютные погрешности не менее чем с 16 нулями после десятичной запятой, все цифры в полученном приближенном значении $y(1)$ являются верными.

Как видно из табл. 3, приближенное значение решения задачи имеет 16 верных цифр. Для вычисления значения приближенного решения с тем же числом верных цифр методом Гира седьмого максимального допустимого порядка требуется выполнить 119 шагов интегрирования и 254 вычисления правой части уравнения (20). В методе рядов Чебышёва решение получено за один шаг и 78 обращений к правой части.

Пример 4. Интегрируется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений [26]

$$\begin{aligned} &y_1' = 2xy_1y_4, \quad y_2' = 10xy_1^5y_4, \quad y_3' = 2xy_4, \quad y_4' = -2x(y_3-1), \\ &y_i(0) = 1, \quad i = 1,2,3,4, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f, \quad x_f = 5. \end{aligned} \tag{21}$$

Решение системы имеет вид

$$y_1(x) = e^{\sin x^2}, \quad y_2(x) = e^{5\sin x^2}, \quad y_3(x) = \sin x^2 + 1, \quad y_4(x) = \cos x^2.$$

Все компоненты решения колеблющиеся. Компонента $y_2(x)$ характерна тем, что имеет большую скорость изменения вблизи окрестности своих экстремальных значений. Задавалось разбиение отрезка интегрирования на несколько частичных сегментов длиной h; на каждом таком сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда Чебышёва. Значения h и k, число частичных сегментов длиной h, на которые разбивался отрезок интегрирования (число шагов N_h), а также количество верных десятичных знаков в приближенных значениях каждой компоненты решения, вычисленной в конце промежутка интегрирования $x_f = 5$, приведены в табл. 4.

Таблица 4. Количество верных десятичных знаков для компонент решения

№	Число шагов N_h	h	k	$y_1(x_f)$	$y_2(x_f)$	$y_3(x_f)$	$y_4(x_f)$
1	250	0.02	10	12	12	12	13
2	125	0.04	10	13	12	13	14
3	125	0.04	12	14	12	14	15
4	63	0.08	15	13	14	13	14
5	50	0.1	30	13	14	13	14
6	34	0.15	30	13	15	13	14
7	25	0.2	28	14	14	14	15
8	25	0.2	30	13	14	14	14
9	20	0.25	28	15	13	15	15
10	20	0.25	30	15	13	16	15
11	17	0.3	38	14	13	14	15
12	17	0.3	40	14	13	14	14

При $h = 0.02$ и $k = 10$ (первая строка табл. 4) компоненты решения y_1, y_2, y_3, y_4 в точке $x_f = 5$ имеют соответственно 12, 12, 12 и 13 верных цифр после десятичной запятой. При $h = 0.04$ и $k = 10$ (вторая строка таблицы) у компонент y_1, y_2, y_3, y_4 количество верных десятичных знаков составляет 13, 12, 13 и 14. Такое повышение точности можно объяснить тем, что при увеличении шага уменьшение вычислительной погрешности в приближенном значении $y(x_f)$ преобладает над увеличением погрешности метода, в результате чего полная погрешность уменьшается. При $h = 0.04$ и $k = 12$ (третья строка таблицы) погрешность метода в $y(x_f)$ уменьшается по сравнению с погрешностью метода при $k = 10$, в результате чего уменьшается также полная погрешность приближенного значения $y(x_f)$ и количество верных цифр в компонентах y_1, y_3, y_4 возрастает: компоненты y_1, y_3, y_4 имеют соответственно 14, 14, 15 верных цифр, компонента $y_2(x_f)$ имеет 12 верных цифр, но ее абсолютная погрешность меньше, чем при $k = 10$.

При увеличении шага ($h = 0.08$, $h = 0.1$) и параметра k ($k = 15$, $k = 30$) число верных цифр в компонентах решения y_1, y_2, y_3, y_4 в точке $x_f = 5$ составляет соответственно 13, 14, 13 и 14 (четвертая и пятая строки таблицы). При увеличении шага до значения $h = 0.15$ при $k = 30$ (шестая строка таблицы) уменьшение вычислительной погрешности в приближенном значении $y(x_f)$ преобладает над увеличением погрешности метода, в результате чего полная погрешность уменьшается. Компонента $y_2(x_f)$ имеет 15 верных цифр; для остальных компонент количество верных цифр остается без изменения, но их абсолютные погрешности меньше, чем при $h = 0.1$ и $k = 30$. По аналогичной причине происходит повышение числа верных знаков для компонент y_1, y_3, y_4 соответственно до значений 14, 14, 15 при увеличении шага с $h = 0.15$ до $h = 0.2$ (седьмая строка таблицы). Однако это же увеличение шага приводит к некоторому росту погрешности метода для сильно изменяющейся компоненты y_2 и число верных цифр для $y_2(x_f)$ уменьшается на единицу.

При $h = 0.25$ и $k = 28$ (девятая строка табл. 4) компоненты y_1, y_2, y_3, y_4 имеют соответственно 15, 13, 15 и 15 верных десятичных знаков. При $h = 0.25$ и $k = 30$ (десятая строка таблицы) компоненты y_1, y_2, y_3, y_4 имеют соответственно 15, 13, 16 и 15 верных цифр. Увеличение точности для y_1, y_3, y_4 в точке x_f по сравнению с приближенными значениями, вычисленными при $h = 0.2$, происходит по указанной выше причине. Уменьшение на одну верную цифру в приближенном значении для $y_2(x_f)$ объясняется тем, что для сильно изменяющейся компоненты, какой является $y_2(x)$ вблизи окрестности своих экстремальных значений, увеличение размера h частичного сегмента (шага дискретизации) влечет некоторое снижение точности.

Строки 11 и 12 табл. 4 показывают, что метод рядов Чебышёва даже при таком крупном шаге $h = 0.3$ позволяет вычислить приближенные значения для $y_1(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ в конце промежутка интегрирования $x = x_f$ с 14 и $y_2(x_f)$ с 13 верными цифрами после десятичной запятой.

При интегрировании задачи (21) методом Гира седьмого максимального допустимого порядка количество верных десятичных знаков, соответствующее наилучшей фактически достигнутой точности решения $y(x_f)$ в конце отрезка x_f, для компонент $y_1(x_f)$, $y_2(x_f)$, $y_3(x_f)$, $y_4(x_f)$ соответственно следующее: 12, 12, 12, 13. Дальнейшие попытки увеличить точность приводят к столь малым размерам шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу *реальной области асимптотики* этого метода [27]. Для достижения указанной точности требуется выполнить 5013 шагов интегрирования и 10 140 вычислений правой части системы (21). В методе рядов решение получено с существенно более высокой точностью за значительно меньшее число шагов (см. второй столбец табл. 4, параметр N_h) и за меньшее число обращений к правой части системы. Например, при $h = 0.04$ и $k = 12$ (третья строка табл. 4) число шагов $N_h = 125$, число обращений к правой части $N_f = 7745$; при $h = 0.08$ и $k = 15$ (четвертая строка табл. 4) число шагов $N_h = 63$, число обращений к правой части $N_f = 9633$.

Пример 5. Интегрируется нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = -10(y-1)^2, \quad y(0) = 2, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_f, \quad x_f = 1. \tag{22}$$

Решением уравнения (22) является рациональная функция $y(x) = 1 + 1/(1 + 10x)$. Эта задача рассматривается в [24], где для ее решения используется явный гибридный алгоритм Грэгга и Штеттера четвертого порядка, относящийся к классу методов, объединяющих в себе черты методов Рунге–Кутта и линейных многошаговых методов. В [24] показано, что при интегрировании (22) с шагом $h = 0.01$ полная погрешность ε в точке $x_n = nh$ уменьшается с увеличением n (в точке $x = 0.9$ имеем $\varepsilon = 17 \times 10^{-8}$), тогда как при $h = 0.1$ погрешность катастрофически возрастает и достигает в точке $x = 0.9$ значения $\varepsilon = 2 \times 10^6$. Здесь малые погрешности метода и ошибки округления развиваются устойчиво при $h = 0.01$, но неустойчиво при $h = 0.1$.

Для решения уравнения (22) мы применили разбиение отрезка интегрировании на несколько частичных сегментов длиной h; на каждом сегменте решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда Чебышёва. Значения h и k, число частичных сегментов длиной h, на которые разбивался отрезок интегрирования (число шагов N_h), а также абсолютная погрешность ε (т.е. $\bigl[-\lg|\varepsilon|\bigr]$) приближенных значений решения, вычисленных в конце промежутка интегрирования, представлены в табл. 5.

Таблица 5. Количество нулей в погрешности ε после десятичной запятой, ($[-\lg|\varepsilon|]$) для $y(x_f)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число шагов N_h	100	20	10	10	10	5	5	5	4	4	4	3	3	3	3	3
h	0.01	0.05	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.3	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
k	5	5	5	10	15	10	15	20	10	15	20	10	15	20	30	40
$[-\lg|\varepsilon|]$	12	9	6	11	15	7	11	14	5	9	12	4	9	11	15	16

При $h = 0.01$ и $k = 5$ (первый столбец табл. 5) количество верных цифр в приближенном значении решения $y(x_f)$ равно 12. Удлинение шага ($h = 0.05$ и $h = 0.1$) при $k = 5$ (второй и третий столбцы табл. 5) приводит к увеличению погрешности метода, полная погрешность приближенного значения $y(x_f)$ возрастает: число верных знаков в $y(x_f)$ уменьшается до 9 при $h = 0.05$ и до 6 при $h = 0.1$. При увеличении k ($k = 10$, $k = 15$) при $h = 0.1$ (четвертый и пятый столбцы табл. 5) погрешность метода уменьшается, вместе с ней уменьшается полная погрешность и число верных цифр в $y(x_f)$ увеличивается до 11 при $k = 10$ и до 15 при $k = 15$. Удлинение шага ($h = 0.2$) и уменьшение k до $k = 10$ (шестой столбец таблицы) приводит к возрастанию погрешности метода и полной погрешности, и число верных цифр в $y(x_f)$ сокращается до 7. Увеличение k ($k = 15$, $k = 20$) при $h = 0.2$ (седьмой и восьмой столбцы таблицы) вызывает уменьшение погрешности метода и полной погрешности, и число верных цифр в $y(x_f)$ возрастает до 11 при $k = 15$ и до 14 при $k = 20$. Удлинение шага ($h = 0.3$) и уменьшение k до 10 (девятый столбец таблицы) приводит к возрастанию погрешности метода и полной погрешности, число верных знаков в $y(x_f)$ сокращается до 5. Увеличение k ($k = 15$, $k = 20$) при $h = 0.3$ (десятый и одиннадцатый столбцы) влечет уменьшение погрешности метода и полной погрешности, и число верных знаков возрастает до 9 при $k = 15$ и до 12 при $k = 20$. Аналогично объясняется изменение числа верных знаков в $y(x_f)$, приведенных в столбцах 12–16 этой таблицы.

Как видно из табл. 5, при использовании метода рядов Чебышёва для решения задачи Коши (22) полная погрешность ε приближенного решения в конце промежутка x_f мала не только при $h = 0.1$, но и при большей величине h. Так, при $h = 0.35$ все 16 цифр в приближенном значении решения $y(x_f)$ являются верными (столбцы 15 и 16 в табл. 5). Метод рядов устойчив при бóльших значениях h, чем алгоритм Грэгга и Штеттера.

9. Заключение. Примеры 1, 2 и 3 еще раз наглядно иллюстрируют действительную способность рассматриваемого приближенного аналитического метода правильно воспроизводить смещенные ряды Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведенные результаты во всех пяти задачах, наряду с подобными результатами в [15–23], позволяют сделать следующий вывод. Представление решения обыкновенного дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда Чебышёва дает возможность вычислять приближение к решению с высокой точностью, причем такая высокая точность на практике может оказаться недостижимой для одношаговых методов типа Рунге–Кутта (классический метод Рунге–Кутта и метод Мерсона четвертого порядка, неявный трехстадийный метод Рунге–Кутта шестого порядка), многошаговых методов Адамса и Штермера пятого порядка, метода Гира для нежестких задач с автоматическим выбором шага и переменным порядком (с максимальным допустимым порядком, равным семи) для той же разрядной сетки, поскольку эта точность требует для указанных методов столь малых размеров шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу их *реальной области асимптотики* [27].

Благодаря замечательным аппроксимирующим свойствам предложенный метод может быть использован для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с более высокой точностью и с более крупным шагом дискретизации по сравнению с перечисленными выше алгоритмами. Такие высокоточные методы интегрирования необходимы, например, для решения многих задач небесной механики и астродинамики, задач космической геодезии и навигационных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13–01–00096-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988.
3. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
4. *Хемминг Р.В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1972.
5. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М: Наука, 1986.
6. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998.
7. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Алгебраические основы численного анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
8. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2009. № 6. 18–22.
9. *Залеткин С.Ф.* Формула численного интегрирования Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 1. 141–157.
10. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О некоторых свойствах частичных сумм рядов Чебышева // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 3. 26–34.
11. *Залеткин С.Ф.* Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием ортогональных разложений // Математическое моделирование. 2010. **22**, № 1. 69–85.
12. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.
13. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1962.
14. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2007.
15. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений на основе ортогональных разложений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2009. **14**, № 4. 59–68.
16. *Arushanyan O.B., Zaletkin S.F.* Application of Markov's quadrature in orthogonal expansions // Moscow University Mathematics Bulletin. 2009. **64**, № 6. 244–248.
17. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О применении ортогональных разложений для приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2010. № 4. 40–43.
18. *Arushanyan O.B., Volchenskova N.I., Zaletkin S.F.* Application of orthogonal expansions for approximate integration of ordinary differential equations // Moscow University Mathematics Bulletin. 2010. **65**, № 4. 172–175.
19. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева // Сибирские электронные математические известия. 2010. **7**. 122–131.
20. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сибирские электронные математические известия. 2011. **8**. 273–283.
21. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* О вычислении коэффициентов ортогональных разложений решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2011. **16**, № 2. 41–47.

22. *Арушанян О.Б., Волченскова Н.И., Залеткин С.Ф.* Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышева // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 5. 24–30.
23. *Arushanyan O.B., Volchenskova N.I., Zaletkin S.F.* Calculation of expansion coefficients of series in Chebyshev polinomials for a solution to a Cauchy problem // Moscow University Mathematics Bulletin. 2012. **67**, № 5/6. 211–216.
24. *С*овременные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979.
25. *Gear C.W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.
26. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
27. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
28. *Беликов М.В.* Метод численного интегрирования с чебышевской аппроксимацией для решения задач эфемеридной астрономии. Препринт № 4. Ленинград: Ин-т теор. астрономии, 1990.
29. *Беликов М.В., Трубицина А.А.* Метод полиномиальной аппроксимации эфемеридных данных. Препринт № 10. Ленинград: Ин-т теор. астрономии, 1990.

Поступила в редакцию
11.03.2013