

УДК 519.62+517.958:536.2

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕТОЧНЫХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Г. В. Кривовичев¹

Рассмотрены однопараметрические семейства решеточных схем Больцмана для решения линейного уравнения диффузии для случаев наборов скоростей D2Q5, D2Q7 и D2Q9. Проведено сравнение различных схем, предложенных в работах других авторов. При анализе устойчивости схем в пространстве параметров исследование устойчивости по начальным условиям проводится с помощью метода Неймана. Получены оптимальные значения параметра, при которых модули наибольших по модулю собственных значений матрицы перехода минимальны.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, линейное уравнение диффузии, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана.

1. Введение. В последние годы для решения различных задач механики и физики эффективно применяется метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее LBM), основанный на решении задач для систем дискретных кинетических уравнений специального вида — так называемых решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann equations, далее LBE) [1, 2]. В большинстве работ метод LBM применяется для решения задач, возникающих в механике жидкости, газа и плазмы [3–6], причем при решении ряда таких задач этот метод обладает преимуществами по сравнению с методами, основанными на решении уравнений механики сплошной среды. Прежде всего, это задачи о фазовых переходах [7–10], задачи о течениях со свободными поверхностями [11] и задачи о течениях в пористых средах [12, 13]. Популярности методу LBM во многом способствует его алгоритмическая простота и широкие возможности для распараллеливания на современных GPU (Graphics Processing Units) [9, 10, 14–17].

Большие успехи в применении метода LBM побудили ряд исследователей рассматривать этот метод не только как эффективный аппарат для численного моделирования различных течений, но и как метод для численного решения начально-краевых и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Были построены LBE-схемы, предназначенные для решения уравнений Лапласа [18], Кортевега–де Фриза [19, 20], Кортевега–де Фриза–Бюргерса [20, 21], Бюргерса–Хаксли [20], а также системы уравнений Лоренца [22], систем нелинейных уравнений гиперболического типа [23] и многих других. В подобных схемах искомое решение вычисляется как сумма функций распределения, которые удовлетворяют соответствующим системам LBE-уравнений. Вид равновесных функций распределения и параметры, входящие в LBE-уравнения, отыскиваются таким образом, чтобы с помощью метода Чепмена–Энскога можно было получить исходное уравнение в частных производных.

Настоящая статья посвящена исследованию LBE-схем с одним параметром релаксации, разработанных для решения линейного уравнения диффузии или теплопроводности. Рассматриваются только плоские задачи с постоянным коэффициентом диффузии и случай отсутствия внутренних источников. Исследуются схемы, использованные в работах [24–36]. Для дискретных наборов скоростей D2Q5, D2Q7 и D2Q9 представлены семейства схем, зависящих от параметра, значения которого могут влиять на устойчивость метода. На основе анализа устойчивости по начальным условиям с помощью метода Неймана найдены оптимальные значения параметра для рассмотренных семейств LBE-схем.

2. Решеточные уравнения Больцмана для решения линейного уравнения диффузии. Система LBE-уравнений, на основе которой производятся расчеты в рамках метода LBM, имеет вид

$$f_i(t + \delta t, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i \delta t) = f_i(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{\tau} \left(f_i(t, \mathbf{r}) - f_i^{(eq)}(c(t, \mathbf{r})) \right), \quad (1)$$

где t — время; $\mathbf{r} = (x, y)$ — узел пространственной решетки (сетки) с характерным расстоянием l ; f_i , $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbf{N}$, — функции распределения псевдочастиц со скоростями \mathbf{V}_i , за время δt переходящих

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

в соседние узлы решетки; τ — безразмерное время релаксации ($\tau = \lambda/\delta t$, где λ — истинное время релаксации); $f_i^{(\text{eq})}$ — равновесные функции распределения; c — концентрация (решение уравнения диффузии).

Необходимо отметить, что в рамках метода LBM для моделирования гидродинамических течений равновесные функции распределения, используемые в уравнениях типа (1), специальным образом аппроксимируют локальные равновесные функции распределения Максвелла [37, 38]. При применении же LBM к решению линейного уравнения диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c, \quad (2)$$

где D — коэффициент диффузии, достаточно потребовать, чтобы функции $f_i^{(\text{eq})}$ были такими, чтобы выполнялись соотношения [24, 30, 31]

$$c(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n f_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n f_i^{(\text{eq})}(c(t, \mathbf{r})). \quad (3)$$

Для выполнения (3) достаточно взять $f_i^{(\text{eq})}$ в виде

$$f_i^{(\text{eq})} = W_i c(t, \mathbf{r}), \quad (4)$$

где $W_i \geq 0$ — параметры, для которых выполняется условие $\sum_{i=1}^n W_i = 1$. С учетом (3) и (4) из (1) с помощью метода Чепмена–Энскога может быть получено уравнение (2) [24].

Если решается уравнение конвекции–диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{U}\nabla c = D\Delta c, \quad (5)$$

описывающее процесс переноса пассивной примеси в жидкости, движущейся со скоростью \mathbf{U} , то выражение для $f_i^{(\text{eq})}$ имеет более сложный вид, поскольку в этой ситуации необходимо учитывать зависимость от гидродинамической части, а само выражение получается при применении квадратурных формул при дискретизации в пространстве скоростей [36]. Отметим, что схемы, разработанные для решения уравнения (5), можно использовать и для решения уравнения (2), полагая во всех выражениях $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, что и использовалось некоторыми авторами [31–35].

Выражение для зависимости коэффициента диффузии D от параметров модели, используемой в рамках метода LBM, получается при выводе уравнения (2) из (1) методом Чепмена–Энскога.

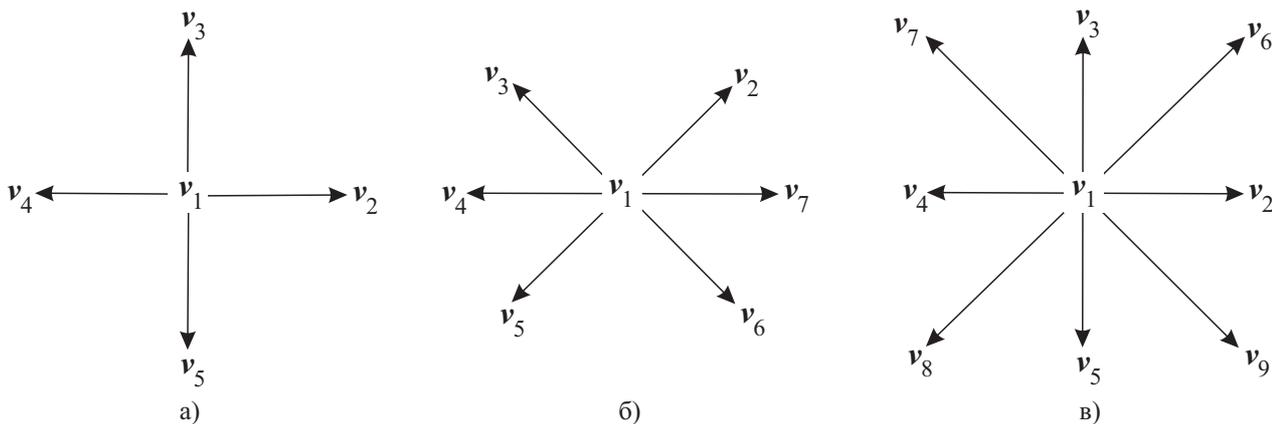


Рис. 1. Наборы возможных скоростей для двумерного случая: а) D2Q5; б) D2Q7; в) D2Q9

Возможные скорости \mathbf{V}_i задаются таким образом: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, n$, где $V = l/\delta t$ — характерная скорость. Здесь мы рассматриваем следующие наборы скоростей:

1) набор D2Q5 (рис. 1а): $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$;

2) набор D2Q7 (рис. 1б): $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{v}_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$,

$$\mathbf{v}_5 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{v}_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \mathbf{v}_7 = (1, 0);$$

3) набор D2Q9 (рис. 1в): $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$,
 $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$, $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$.

Заметим, что набор D2Q5, в отличие от D2Q7 и D2Q9, не может быть использован в методе LBM для моделирования гидродинамических процессов в связи с нарушением изотропности тензора решетки [1], что влечет за собой невозможность получения уравнений Навье–Стокса, тогда как для случая линейного уравнения диффузии такой проблемы не стоит.

Следует отметить, что одним из применений LBE-схем, разработанных для решения линейных диффузионных задач, является их использование для решения стационарных задач математической физики — прежде всего задач для уравнений Лапласа и Пуассона при применении метода установления [39]. Такому подходу посвящены работы [28, 32–34, 40].

Ниже рассмотрены LBE-схемы, которые будут исследоваться в настоящей работе. Выражение для D для всех этих схем имеет следующий вид: $D = \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \frac{\gamma l^2}{\delta t}$; схемы отличаются друг от друга конкретным значением безразмерного параметра γ .

2.1. Случай набора D2Q5. По всей видимости, одной из первых LBE-схем, предложенных для решения уравнения (2), была схема со следующими параметрами: $W_1 = 0$, $W_{2,3,4,5} = 1/4$ [24], т.е. фактически рассматривался набор D2Q4. Значение γ равно $1/2$.

В работах [26, 27] использовалась схема с таким набором W_i : $W_1 = 1/3$, $W_{2,3,4,5} = 1/6$ и таким значением γ : $\gamma = 1/3$.

В статье [25] для решения уравнения для компоненты вектора завихренности, по структуре совпадающего с (5), использовалась схема с такими параметрами: $W_i = 1/5$, $i = 1, \dots, 5$, при $\gamma = 2/5$.

2.2. Случай набора D2Q7. В работе [29] была предложена схема с параметрами $W_i = 1/7$, $i = 1, \dots, 7$, $\gamma = 3/7$.

В статье [30] приведена схема со следующими значениями параметров: $W_1 = 1/2$, $W_{2,\dots,7} = 1/12$, $\gamma = 1/4$.

2.3. Случай набора D2Q9. В работе [30] представлена схема с такими значениями параметров: $W_1 = 4/9$, $W_{2,3,4,5} = 1/9$, $W_{6,7,8,9} = 1/36$, $\gamma = 1/3$. Значения параметров совпадают с аналогичными значениями для LBE-схемы, применяемой для моделирования течений несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости [1–4].

В [36] при использовании метода дискретизации в пространстве скоростей, предложенном в [37, 38], построена схема для решения уравнения (5), которой соответствуют следующие параметры: $W_1 = 0$, $W_{2,3,4,5} = 1/6$, $W_{6,7,8,9} = 1/12$, $\gamma = 2/3$. В работах [32–34] эта схема использовалась для решения уравнения Пуассона–Больцмана, в [31, 35] — для решения уравнения теплопроводности.

2.4. Однопараметрические семейства схем. Как известно [41, 42], за счет введения параметра в коэффициенты разностных схем можно влиять на ряд их свойств, таких как аппроксимация, устойчивость и монотонность. При этом имеют дело уже не с конкретной схемой, а с семейством схем, зависящим от параметра. Как правило, вводится скалярный параметр $\sigma \in [0, 1]$. В статье [30] было построено два таких семейства LBE-схем, предназначенных для решения уравнения (2), — для случаев наборов D2Q7 и D2Q9 соответственно.

Семейство для случая набора D2Q7 определяется посредством задания зависимости W_i от σ : $W_1 = \sigma$, $W_{2,\dots,7} = (1 - \sigma)/6$. Зависимость γ от σ имеет вид $\gamma = (1 - \sigma)/2$. Как можно заметить, при $\sigma = 1/7$ из этого семейства получается схема из [29], при $\sigma = 1/2$ — схема из [30].

Семейство для случая набора D2Q9 определяется посредством задания следующей зависимости W_i от σ : $W_1 = \sigma$, $W_{2,\dots,5} = (1 - \sigma)/5$, $W_{6,\dots,9} = (1 - \sigma)/20$. Зависимость γ от σ имеет вид $\gamma = 3(1 - \sigma)/5$. Как можно заметить, при $\sigma = 4/9$ из этого семейства получается схема из работы [30]. Схему из [36] из этого семейства получить нельзя.

Предложим аналогичное однопараметрическое семейство для случая набора D2Q5: зависимость W_i от параметра определим в виде $W_1 = \sigma$, $W_{2,3,4,5} = (1 - \sigma)/4$. Используя процедуру метода Чепмена–Энскога, аналогичную описанной в [24], получим следующую зависимость γ от σ : $\gamma = (1 - \sigma)/2$, совпадающую с аналогичной зависимостью для случая набора D2Q7. При $\sigma = 0$ из этого семейства получается схема из [24], при $\sigma = 1/5$ — схема из [25], при $\sigma = 1/3$ — схема из [26, 27].

При рассмотрении однопараметрических семейств LBE-схем возникает вопрос о выборе значения параметра σ . В настоящей статье предлагается решать эту задачу на основе анализа устойчивости в пространстве параметров. Предлагается использовать то значение параметра σ , при котором наименьшее

значение имеют модули наибольших по модулю собственных значений матрицы перехода. Полученные оптимальные схемы сравниваются с рассмотренными выше схемами.

3. Постановка задачи об исследовании устойчивости. Система (1) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\tilde{f}_i(\tilde{t} + 1, \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{V}_i) - \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{\tau} \left(\tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}}) - \tilde{f}_i^{(\text{eq})}(\tilde{c}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{r}})) \right). \quad (6)$$

Здесь \tilde{t} , $\tilde{\mathbf{r}}$, \tilde{c} , \tilde{f}_i , $\tilde{f}_i^{(\text{eq})}$ — безразмерные независимые и зависимые переменные соответственно. Для удобства дальнейшего изложения знак тильды в обозначениях безразмерных переменных будем опускать, подразумевая при этом, что речь будет идти только о безразмерных переменных.

Система (6) представляет собой систему из линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, и для исследования устойчивости ее решения по начальным условиям можно воспользоваться методом Неймана [39, 43].

Рассмотрим невозмущенное решение системы (6), представляющее собой совокупность значений равновесных функций распределения, соответствующих единичному значению безразмерной концентрации: $\bar{f}_i = f_i^{(\text{eq})}(1)$. Представим решение (6) в виде

$$f_i(t, \mathbf{r}) = \bar{f}_i + \delta f_i(t, \mathbf{r}), \quad (7)$$

где члены $\delta f_i(t, \mathbf{r})$ имеют смысл возмущений.

Подставляя (7) в (6) и учитывая (3) и (4), получим следующую систему относительно возмущений:

$$\delta f_i(t + 1, \mathbf{r} + \mathbf{V}_i) = \delta f_i(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{\tau} \left(\delta f_i(t, \mathbf{r}) - W_i \sum_{p=1}^n \delta f_p(t, \mathbf{r}) \right). \quad (8)$$

Представляя решение (8) в виде $\delta f_i(t, \mathbf{r}) = F_i(t) \exp(\mathbf{i}\Theta \mathbf{r}^T)$, где $\mathbf{i}^2 = -1$, $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_x, \theta_y \in [-\pi, \pi]$, получим систему относительно коэффициентов $F_i(t)$:

$$F_i(t + 1) = \sum_{p=1}^n G_{ip} F_p(t), \quad (9)$$

где G_{ip} — элементы матрицы перехода: $G_{ip} = \begin{cases} \exp(-\mathbf{i}\Theta \mathbf{V}_i^T) \left(1 - \frac{1}{\tau} + \frac{W_i}{\tau} \right), & i = p, \\ \exp(-\mathbf{i}\Theta \mathbf{V}_i^T) \frac{W_i}{\tau}, & i \neq p. \end{cases}$

Таким образом, задача об исследовании устойчивости невозмущенного решения системы (6) сведена к задаче исследования устойчивости нулевого решения системы (9). Согласно спектральному признаку [43], нулевое решение будет устойчиво, если все собственные значения матрицы перехода по модулю не будут превосходить единицы. К сожалению, для рассматриваемых в настоящей работе схем аналитически собственные значения матрицы $\{G_{ip}\}_{i,p=1}^n$ найти не удалось (использовались пакеты компьютерной алгебры Maple и Mathematica), в связи с чем задачи на собственные значения решались численно с помощью QR-алгоритма, программно реализованного на языке FORTRAN 90 в свободно распространяемом пакете EISPACK [44].

Исследование устойчивости производилось в пространстве параметров (τ, σ) при изменении τ в интервале $[1/2, 100]$. Область изменения параметров τ и σ разбивалась равномерной сеткой из 500×500 узлов, область изменения θ_x и θ_y — сеткой из 200×200 узлов. Для каждого значения (τ, σ) вычислялось значение следующей функции: $\Lambda(\tau, \sigma) = \max_{(\theta_x, \theta_y)} \left(\max_i |\lambda_i(\tau, \sigma, \theta_x, \theta_y)| \right)$, где λ_i — собственные значения матрицы $\{G_{ip}\}_{i,p=1}^n$.

Для получения оптимального значения параметра σ для семейства ЛВЕ-схем на построенной в области изменения (τ, σ) сетке путем простого перебора находилось минимальное значение функции Λ .

4. Результаты расчетов. На рис. 2–4 представлены линии уровня функции Λ для случаев семейств D2Q5, D2Q7 и D2Q9 соответственно, кружком обозначена точка, соответствующая точке минимума. Отметим, что для всех случаев минимум оказался единственным.

В случае семейства для набора D2Q5 минимальное значение Λ , равное 0.9929, достигается при $\sigma = 0.4221$ и $\tau = 34.28$. При таком σ значения Λ , большие единицы, достигаются вблизи границ по τ — в

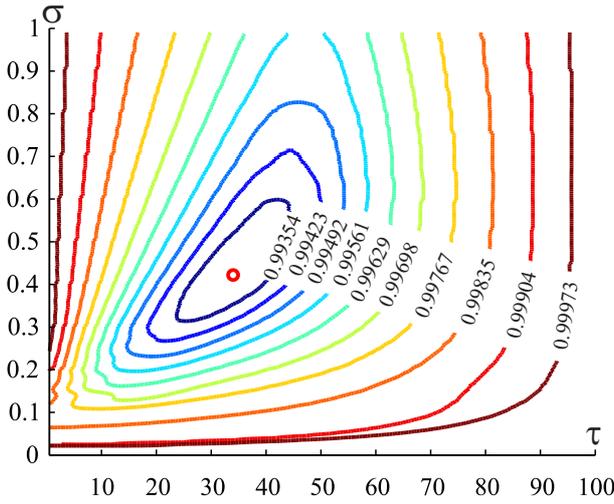


Рис. 2. Линии уровня функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ в случае семейства для набора D2Q5

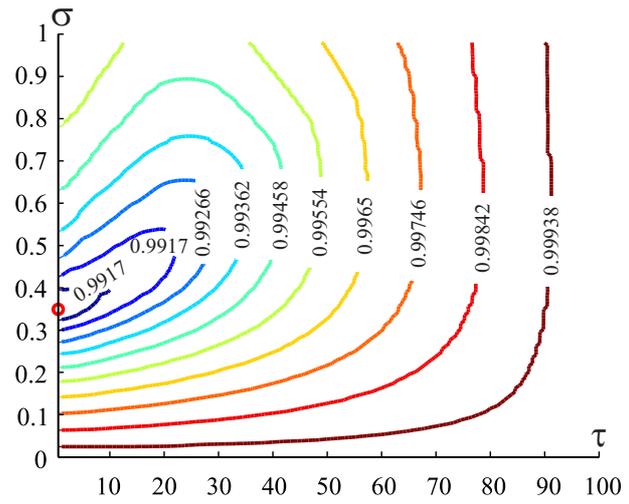


Рис. 3. Линии уровня функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ в случае семейства для набора D2Q7

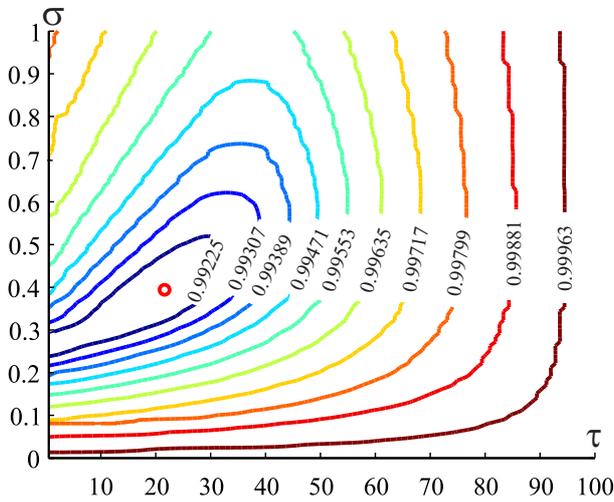


Рис. 4. Линии уровня функции $\Lambda(\tau, \sigma)$ в случае семейства для набора D2Q9

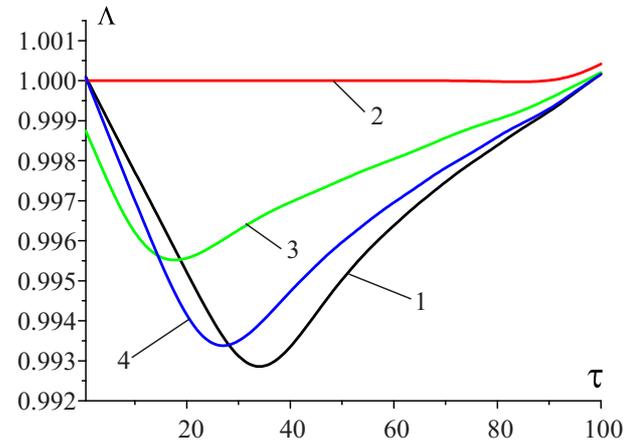


Рис. 5. Графики функции Λ при фиксированных значениях σ для случая набора D2Q5: 1) схема при оптимальном значении σ ; 2) схема из [24]; 3) схема из [25]; 4) схема из [26, 27]

окрестности $\tau = 1/2$ и $\tau = 100$. В случае $\sigma = 0$ (схема из [24]) на большей части промежутка изменения τ ($\tau \in [1/2, 84]$) функция Λ имеет единичное значение, при $\tau > 84$ ее значения превосходят единицу. При $\sigma = 1/3$ (схема из [26, 27]) минимальное значение Λ равно 0.9934 — оно достигается при $\tau = 27.04$. Как и в случае оптимальной схемы, значения Λ , превышающие единицу, достигаются вблизи границ рассматриваемой области. В случае $\sigma = 1/5$ (схема из [25]) минимальное значение 0.9955 достигается при $\tau = 16.14$. Здесь значения Λ , большие единицы, достигаются только в окрестности $\tau = 100$.

На рис. 5 представлены графики функции Λ при фиксированных значениях σ , отвечающих указанным схемам. Как можно видеть, наиболее “близкой” по такому свойству к оптимальной схеме является схема из работ [26, 27]. Однако следует отметить, что для случая значений τ , близких к $1/2$ (что соответствует важному для практики случаю малых значений D), из рассмотренных схем лучше подойдет схема из [25] либо за счет выбора значений σ можно подобрать схему, устойчивую по спектральному критерию при таких значениях τ .

В случае семейства для набора D2Q7 значения Λ в окрестности $\tau = 1/2$ оказались меньше единицы для всех значений σ , тогда как вблизи $\tau = 100$ значения Λ превышают единицу. При этом оптимальной схеме соответствует значение $\Lambda = 0.9898$, которое имеет место при $\sigma = 0.3489$ и $\tau = 0.5$; иными словами, минимум достигается на границе области, которая соответствует случаю $D = 0$. Аналогичная ситуация имеет место при $\sigma = 1/7$ (схема из [29]) — минимальному значению 0.9965 соответствует $\tau = 0.5$. В случае

решения задач при малых значениях D вполне можно воспользоваться этими схемами. В случае $\sigma = 1/2$ (схема из [30]) минимальное значение, равное 0.9914, достигается уже внутри области — при $\tau = 17.19$. На рис. 6 представлены графики Λ при фиксированных σ , соответствующих упомянутым схемам.

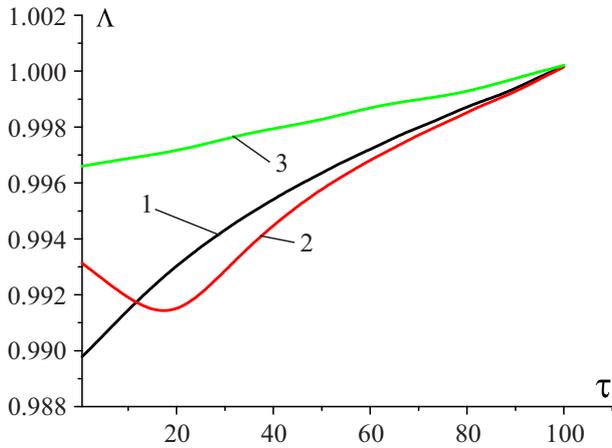


Рис. 6. Графики функции Λ при фиксированных значениях σ для случая набора D2Q7: 1) схема при оптимальном значении σ ; 2) схема из [30]; 3) схема из [29]

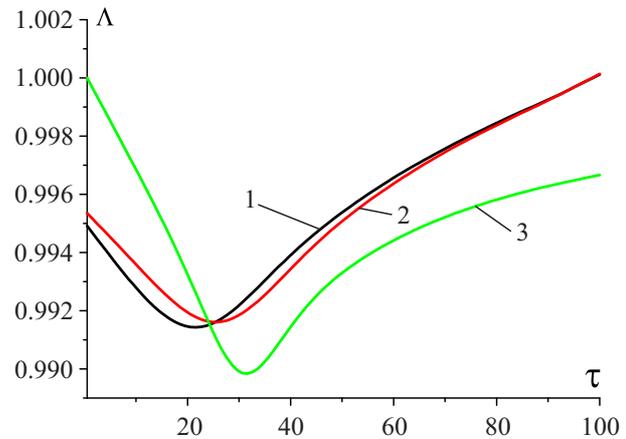


Рис. 7. Графики функции Λ при фиксированных значениях σ для случая набора D2Q9: 1) схема при оптимальном значении σ ; 2) схема из [30]; 3) схема из [36]

В случае набора D2Q9 оптимальной оказалась схема, соответствующая значению $\sigma = 0.3939$, при котором минимальное значение 0.9914 достигается при $\tau = 21.60$. Для схемы из [30], которой соответствует $\sigma = 4/9$, минимальное значение Λ достигается при $\tau = 25.62$ и равно 0.9916. Как можно видеть из рис. 7, графики Λ для этих двух схем близки друг другу. На этом же рисунке представлен график функции, аналогичной Λ , но зависящей только от τ , построенный для схемы из [36], — ее минимальное значение меньше, чем для случая схем из однопараметрического семейства: оно равно 0.9899 и достигается при $\tau = 31.65$. Таким образом, эту схему можно считать более предпочтительной, чем схемы из предложенного в [30] семейства.

Как можно заметить, для всех рассматриваемых семейств наименьшие значения Λ достигались при $\tau \sim 10$. Необходимо отметить, что при практических расчетах при увеличении значения τ может наблюдаться возрастание погрешности получаемых результатов. Это связано с тем, что в выражение для коэффициента диффузии D , полученное по методу Чепмена–Энскога, входят τ , δt и l , и при проведении расчетов с заданным значением D при изменении τ необходимо подбирать соответствующие значения δt и l . Похожая ситуация будет при решении с помощью метода LBM различных задач гидродинамики [45–47], когда в зависимости от значений кинематической вязкости ν и τ величины δt и l могут оказаться такими, что число Маха перестает быть малым, что приводит к погрешностям в результатах численных расчетов. Для гидродинамических задач эту проблему можно исправить с использованием метода LBM с несколькими параметрами релаксации (multiple relaxation time, далее MRT) [48]. Для случая задач, связанных с моделированием диффузионных процессов, ситуация, по всей видимости, аналогичная. При этом MRT-схемы позволяют еще и улучшать устойчивость метода. Подобные схемы для решения уравнения диффузии были предложены, например, в работах [49–52].

5. Заключение. В настоящей статье проведено исследование устойчивости однопараметрических семейств явных решеточных схем Больцмана для решения уравнения диффузии. Для случаев различных наборов возможных скоростей приведены значения параметра, при которых модули наибольших по модулю собственных значений минимальны. В рамках данного исследования не рассматривались MRT-схемы [49–52], позволяющие улучшать устойчивость метода. Исследование таких схем планируется провести в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
2. Succi S. The Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Oxford: Oxford Clarendon, 2001.
3. Chen S., Doolen G.D. Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1998. **30**. 329–364.

4. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *Int. J. of Multiphase Flow*. 2003. **29**. 117–169.
5. *Dellar P.G.* Lattice kinetic schemes for magnetohydrodynamics // *J. of Computational Physics*. 2002. **179**. 95–126.
6. *Dellar P.G.* Moment equations for magnetohydrodynamics // *J. of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2009. **9**. 06003–060025.
7. *Kupershtokh A.L.* A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases // *Computers and Mathematics with Applications*. 2011. **61**. 3537–3548.
8. *Kupershtokh A.L.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // *Computers and Mathematics with Applications*. 2010. **59**. 2236–2245.
9. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 130–138.
10. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**. 384–390.
11. *Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J.* A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*. 2013. **71**. 223–248.
12. *Guo Z., Zhao T.S.* Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // *Physical Review E*. 2002. **66**. 036304-1–036304-9.
13. *Pan C., Luo L.S., Miller C.T.* An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous media flow simulation // *Computers and Fluids*. 2006. **35**. 898–909.
14. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 227–231.
15. *Букулов Д.А., Сенин Д.С., Демин Д.С., Дмитриев А.В., Грачев Н.Е.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // *Вычислительные методы и программирование*. 2012. **13**, № 1. 221–227.
16. *Rinaldi P.R., Dari E.A., Venere M.J., Clansse A.* A lattice Boltzmann solver for 3D fluid simulation on GPU // *Simulation Modelling Practice and Theory*. 2012. **25**. 163–171.
17. *Xiong Q.G., Li B., Xu J., Fang X.J., Wang X.W., Wang L.M., He X.F., Ge W.* Efficient parallel implementation of the lattice Boltzmann method on large clusters of graphics processing units // *Computer Science and Technology*. 2012. **57**, № 7. 707–715.
18. *Zhang J., Yan G., Dong Y.* A new lattice Boltzmann model for the Laplace equation // *Applied Mathematics and Computation*. 2009. **215**. 539–547.
19. *Yan G., Zhang J.* A higher-order moment method of the lattice Boltzmann model for the Korteweg de Vries equation // *Mathematics and Computers in Simulation*. 2009. **79**. 1554–1565.
20. *Lai H.L., Ma C.F.* A higher order lattice BGK model for simulating some nonlinear partial differential equations // *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2009. **52**, № 7. 1053–1061.
21. *Ma C.F.* A new lattice Boltzmann model for KdV–Burgers equation // *Chinese Physics Letters*. 2005. **22**, № 9. 2313–2315.
22. *Yan G., Yuan L.* Lattice Bhatnagar–Gross–Krook model for the Lorenz attractor // *Physica D*. 2001. **154**. 43–50.
23. *Wang Z., Shi B., Xiang X., Chai Z., Lu J.* Lattice Boltzmann method for n -dimensional nonlinear hyperbolic conservation laws with the source term // *Chaos*. 2011. **21**. 013120-1–013120-8.
24. *Wolf-Gladrow D.A.* A lattice Boltzmann equation for diffusion // *J. of Statistical Physics*. 1995. **79**, № 5/6. 1023–1032.
25. *Chen S., Tolke J., Geller S., Krafczyk M.* Lattice Boltzmann model for incompressible axisymmetric flows // *Physical Review E*. 2008. **78**. 046703-1–046703-8.
26. *Huber C., Parmigiani A., Chopard B., Manga M., Bachmann O.* Lattice Boltzmann model for melting with natural convection // *Int. J. of Heat and Fluid Flow*. 2008. **29**. 1469–1480.
27. *Huber C., Cassata W.S., Renne P.R.* A lattice Boltzmann model for noble gas diffusion in solids: the importance of domain shape and diffusive anisotropy and implications for thermochronometry // *Geochimica et Cosmochimica Acta*. 2011. **75**. 2170–2186.
28. *Hirabayashi M., Chan Y., Ohashi H.* The lattice BGK model for the Poisson equation // *JSME Int. J. Ser. B*. 2001. **44**, № 1. 45–52.
29. *Ponce Dawson S., Chen S., Doolen G.P.* Lattice Boltzmann computations for reaction–diffusion equations // *J. of Chemical Physics*. 1993. **98**, № 2. 1514–1523.
30. *Blaak R., Sloot P.M.A.* Lattice dependence for reaction–diffusion in lattice Boltzmann modelling // *Computer Physics Communications*. 2000. **129**. 256–266.
31. *Mishra S.C., Mondal B., Kush T., Krishna R.S.R.* Solving transient heat conduction problems on uniform and non-uniform lattices using the lattice Boltzmann method // *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2009. **36**. 322–328.
32. *Wang J., Wang M., Li Z.* Lattice evolution solution for the nonlinear Poisson–Boltzmann equation in confined domains // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. **13**. 575–583.

33. Wang J., Wang M., Li Z. Lattice Poisson–Boltzmann simulations of electro-osmotic flows in microchannels // J. of Colloid and Interface Science. 2006. **296**. 729–736.
34. Wang J., Wang M., Chen S. Roughness and cavitations effects on electro-osmotic flows in rough microchannels using the lattice Poisson–Boltzmann methods // J. of Computational Physics. 2007. **226**. 836–851.
35. Kameli H., Kowsary F. Solution of inverse heat conduction problem using the lattice Boltzmann method // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2012. **39**. 1410–1415.
36. He X., Chen S., Doolen G.D. A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit // J. of Computational Physics. 1998. **146**. 282–300.
37. He X., Luo L.-S. A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. 1997. **55**, № 6. R6333–R6336.
38. He X., Luo L.-S. Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // Physical Review E. 1997. **56**, № 6. 6811–6817.
39. Федоренко П.П. Введение в вычислительную физику. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2008.
40. Wang H., Yan G., Yan B. Lattice Boltzmann model based on the rebuilding-divergency method for the Laplace equation and the Poisson equation // J. of Scientific Computing. 2011. **46**. 470–484.
41. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009.
42. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009.
43. Рунтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
44. Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C. Matrix eigensystem routines. EISPACK Guide. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
45. He X., Luo L.S. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation // J. of Statistical Physics. 1997. **88**, № 3/4. 927–944.
46. Cheng M., Yao Q., Luo L.S. Simulation of flow past a rotating circular cylinder near a plane wall // Int. J. of Computational Fluid Dynamics. 2006. **20**, № 6. 391–400.
47. Fares E. Unsteady flow simulation of the Ahmed reference body using a lattice Boltzmann approach // Computers and Fluids. 2006. **35**. 940–950.
48. d’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.S. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions // Philosophical Transactions of Royal Society of London A. 2002. **360**. 437–451.
49. Van der Sman R.G.M., Ernst M.H. Diffusion lattice Boltzmann scheme on a orthorhombic lattice // J. of Statistical Physics. 1999. **94**, № 1/2. 203–217.
50. Van der Sman R.G.M. Finite Boltzmann schemes // Computers and Fluids. 2006. **35**. 849–854.
51. Rasin I., Succì S., Miller W. A multi-relaxation lattice kinetic method for passive scalar diffusion // J. of Computational Physics. 2005. **206**. 453–462.
52. Kuzmin A., Ginzburg I., Mohamad A.A. The role of the kinetic parameter in the stability of two-relaxation-time advection–diffusion lattice Boltzmann schemes // Computers and Mathematics with Applications. 2011. **61**. 3417–3442.

Поступила в редакцию
11.03.2013
