УДК 517.97, 539.376

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Бормотин[1]

Рассматривается постановка обратных задач формообразования в виде квазистатического деформирования твердых тел. Строится и исследуется итеративный метод решения обратных задач формообразования элементов конструкций в условиях ползучести. Предлагается реализация разработанного метода с использованием комплекса программ инженерного анализа.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11–08–00845-а) и государственного задания Минобрнауки РФ (код проекта 1.2582.2011).

Ключевые слова: обратные задачи формообразования в условиях ползучести, вариационные неравенства, достаточные условия единственности, итеративные методы, метод конечных элементов.

1. Введение. В промышленности при изготовлении деталей преимущественно используется обработка материалов давлением в режиме пластического деформирования и в медленных высокотемпературных режимах. При моделировании таких процессов изготовления деталей можно сформулировать обратную задачу формообразования: определение внешних силовых и кинематических воздействий, под действием которых в течение заданного промежутка времени должно происходить деформирование в условиях ползучести, обеспечивающее заданную остаточную конфигурацию после упругой разгрузки [1, 2].

На основе анализа уравнений виртуальных работ показана корректность некоторых классов обратных задач неупругого деформирования [2]. В настоящей статье рассматриваются вариационные принципы квазистатического деформирования, которые позволяют строить уравнения равновесия относительно скоростей перемещений. Выраженные через приращения перемещений эти уравнения удобно использовать при решении общего класса геометрически и физически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) [3]. Достаточные условия единственности краевых задач обеспечивают выпуклость функционалов вариационных принципов [4]. Сведение обратных задач теории ползучести к вариационным неравенствам позволяет построить итеративные методы и доказать их сходимость.

2. Постановка задач формообразования. Пусть $V \subset R^3$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей S. Через $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $\widetilde{u} = \big(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3\big)$ обозначим векторы текущих и остаточных перемещений $u, \widetilde{u} \in \big[W_2^1(Q)\big]^3$, $Q = V \times\ [0 \leqslant t \leqslant T]$.

Рассмотрим квазистатическую задачу формообразования при бесконечно малых деформациях, включающую в себя деформирование в условиях ползучести и упругую разгрузку. Задачи деформирования в ползучести и упругой разгрузки могут быть представлены отдельными квазистатическими вариационными принципами. Обратную задачу теории ползучести можно сформулировать в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [5]

$$J\big(\dot{u}_i, \dot{\widetilde{u}}_i\big) = \int\limits_V W\big(\dot{\varepsilon}_{ij}\big)\, dV - \int\limits_S \dot{p}_i \dot{u}_i \, dS + \int\limits_V W\big(\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\big)\, dV, \tag{1}$$

где $W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \dfrac{1}{2}\, c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\eta_{kl}$ и $W\big(\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\big) = \dfrac{1}{2}\, c_{ijkl}\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}\eta_{kl}$ — потенциалы для деформирования в условиях ползучести [3]; c_{ijkl} — компоненты симметричного тензора упругих констант; $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij}$ — скорости текущих и остаточных деформаций; $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\sigma_{ij}, q_n)$ — скорости деформаций ползучести; q_n — набор структурных параметров; $i,\ j,\ k,\ l = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots, p$. Здесь

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{j,i}\right), \quad \dot{\widetilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}\big(\dot{\widetilde{u}}_{ij} + \dot{\widetilde{u}}_{j,i}\big); \tag{2}$$

[1] Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, самолетостроительный факультет, просп. Ленина, 27, 681013, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре; доцент, e-mail: cvmi@knastu.ru

кроме того, выражения с повторяющимися индексами означают суммирование по ним от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование: $u_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Потенциальная форма определяющих соотношений имеет вид [3]

$$\dot\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\dot\varepsilon_{ij})}{\partial\dot\varepsilon_{ij}} = c_{ijkl}(\dot\varepsilon_{kl} - \eta_{kl}), \quad \dot\rho_{ij} = \frac{\partial W\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\big)}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{kl} - \eta_{kl}\big). \tag{3}$$

Обозначим разность соотношений (3) через функции $\dot\sigma^e_{ij}$, которые представляют собой компоненты напряжений упругого деформирования: $\dot\rho_{ij} - \dot\sigma_{ij} = c_{ijkl}\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{kl} - \dot\varepsilon_{kl}\big) = \dot\sigma^e_{ij}$. Таким образом, можно записать следующие формулы:

$$\dot\rho_{ij} = \dot\sigma_{ij} + \dot\sigma^e_{ij}, \quad \dot\sigma^e_{ij} = \frac{\partial W^e\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\big)}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{kl} - \dot\varepsilon_{kl}\big). \tag{4}$$

Здесь $W^e\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\big) = \dfrac{1}{2}\, c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\dot{\tilde\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\dot\varepsilon_{kl}$.

Скорости деформаций ползучести в (3) и скорости текущих деформаций в (4) считаются начальными добавочными скоростями деформаций; тогда задача с указанными определяющими соотношениями может быть сведена к краевой задаче теории упругости с начальными приращениями деформаций [6].

Стационарное значение функционала (1) при учете независимости $\dot u_i$, $\dot{\tilde u}_i$ приводит к двум вариационным принципам

$$\delta J_1(\dot u_i) \equiv \int\limits_V \dot\sigma_{ij}\delta\dot\varepsilon_{ij}\, dV - \int\limits_S \dot p_i \delta\dot u_i dS = 0, \tag{5}$$

$$\delta J_2\big(\dot{\tilde u}_i\big) \equiv \int\limits_V \dot\rho_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV = 0. \tag{6}$$

Условия стационарности функционалов (5), (6) приводят к уравнениям равновесия для скоростей напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S соответственно:

$$\dot\sigma_{ij,j} = 0, \quad \dot\sigma_{ij}n_j = \dot p_i, \qquad \dot\rho_{ij,j} = 0, \quad \dot\rho_{ij}n_j = 0, \tag{7}$$

где n_i — компоненты нормали к поверхности S.

Вариационный принцип (6) с учетом (4) представляет собой задачу разгрузки с начальными скоростями напряжений $\dot\sigma_{ij}$ в объеме V [6]:

$$\int\limits_V \big(\dot\sigma_{ij} + \dot\sigma^e_{ij}\big)\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV = 0. \tag{8}$$

Выполнив преобразования

$$\int\limits_V \dot\rho_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV = \int\limits_V \dot\sigma_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV + \int\limits_V \dot\sigma^e_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV = \int\limits_S \dot\sigma_{ij}n_j\delta\dot{\tilde u}_i\, dS - \int\limits_V \dot\sigma_{ij,j}\delta\dot{\tilde u}_i\, dV + \int\limits_V \dot\sigma^e_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV$$

и учитывая (7), можно записать

$$\int\limits_V \dot\rho_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV = \int\limits_S \dot p_i\delta\dot{\tilde u}_i\, dS + \int\limits_V \dot\sigma^e_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV.$$

Тогда (6) примет вид

$$\int\limits_V \dot\sigma^e_{ij}\delta\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\, dV + \int\limits_S \dot p_i\delta\dot{\tilde u}_i\, dS = 0. \tag{9}$$

Условие стационарности функционала (9) приводит к уравнениям равновесия для скоростей напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S соответственно: $\dot\sigma^e_{ij,j} = 0$, $\dot\sigma^e_{ij}n_j = -\dot p_i$.

Замечая в (4), что скорости текущих деформаций в (8) остаются постоянными, можно сделать следующий вывод: вариационный принцип (6) эквивалентен задаче разгрузки тела с образованными в процессе деформирования в условиях ползучести скоростями полных деформаций $\dot\varepsilon_{ij}$ и напряжений $\dot\sigma_{ij}$, а также задаче деформирования теории упругости с начальными скоростями деформаций $\dot\varepsilon_{ij}$ и приложенными на поверхности S усилиями $-\dot\sigma_{ij}n_j$.

Достаточные условия единственности [3, 4] решения задач деформирования с введенными потенциалами: $\int\limits_V \triangle\dot\sigma_{ij}\triangle\dot\varepsilon_{ij}\,dV > 0$, $\int\limits_V \triangle\dot\rho_{ij}\triangle\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0$, $\int\limits_V \triangle\dot\sigma^e_{ij}\triangle\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0$ или $\int\limits_V \triangle\left(\dfrac{\partial W(\dot\varepsilon_{ij})}{\partial\dot\varepsilon_{ij}}\right)\triangle\dot\varepsilon_{ij}\,dV > 0$, $\int\limits_V \triangle\left(\dfrac{\partial W(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}}\right)\triangle\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0$, $\int\limits_V \triangle\left(\dfrac{\partial W^e(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij})}{\partial\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}}\right)\triangle\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\,dV > 0$ для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения (2)), принимающих заданные значения на границе. Здесь $\triangle$ означает разность соответствующих решениям величин в любых двух различных формах деформации.

3. Итеративный метод решения обратных задач формообразования. Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования (5) и разгрузки (6). Тогда утверждается, что функционалы в (5) и (6) не только стационарны, но и достигают абсолютного минимума для действительной формы деформаций [4].

Таким образом, обратную задачу формообразования в ползучести можно представить в виде минимизации следующих функционалов:

$$\dot u = \operatorname{argmin}\left\{\int\limits_V W(\dot\varepsilon_{ij})\,dV,\quad u \in \left[W_2^1(Q)\right]^3\right\}, \tag{10}$$

$$\dot{\tilde u} = \operatorname{argmin}\left\{\int\limits_V W\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\big)\,dV,\quad \tilde u \in \left[W_2^1(Q)\right]^3,\quad \int\limits_S \big(\dot{\tilde u} - \dot{\tilde u}^*\big)^2\,dS = 0\right\}. \tag{11}$$

Здесь $\dot{\tilde u}^* = \big(\dot{\tilde u}_1^*, \dot{\tilde u}_2^*, \dot{\tilde u}_3^*\big)$ — заданная скорость остаточных перемещений.

Пусть символ $(\cdot,\cdot)_{|S}$ означает скалярное произведение в $L_2(S)$: $(u,v)_{|S} = \int\limits_S \sum\limits_{i=1}^3 u_i v_i\,dS$. Соответствующая этому скалярному произведению норма имеет вид $\|u\|_S = \sqrt{(u,u)_{|S}} = \left\{\int\limits_S \sum\limits_{i=1}^3 u_i^2\,dS\right\}^{1/2}$. Кроме того, обозначим $a(\dot u,\dot v) = \int\limits_V \dfrac{\partial W(\dot u_{ij})}{\partial \dot u_{ij}}\,\dot v_{ij}\,dV$ и $a\big(\dot{\tilde u},\dot{\tilde v}\big) = \int\limits_V \dfrac{\partial W(\dot{\tilde u}_{ij})}{\partial \dot{\tilde u}_{ij}}\,\dot{\tilde v}_{ij}\,dV$.

Вследствие выпуклости функционалов задачу (10), (11) представим вариационными неравенствами

$$a(\dot u, \dot v - \dot u) \geqslant 0 \quad \forall \dot v, \quad \|\dot v - \dot u\|_S^2 = 0, \tag{12}$$

$$a\big(\dot{\tilde u}, \dot{\tilde v} - \dot{\tilde u}\big) \geqslant 0 \quad \forall \dot{\tilde v}, \quad \big\|\dot{\tilde u} - \dot{\tilde u}^*\big\|_S^2 = 0. \tag{13}$$

Связное ограничение в (12) $g(\dot u,\dot v) \equiv \|\dot v - \dot u\|_S^2 = 0$ можно представить неравенством [7]

$$\big(\nabla_{\dot v}^{\mathrm T} g(\dot u,\dot u), \dot v - \dot u\big)_{|S} \geqslant 0, \quad \text{или} \quad (\dot u - \dot u, \dot v - \dot u)_{|S} \geqslant 0.$$

Учитывая ограничения в (12), методом штрафа [8] получим неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\,(\dot u_{\varepsilon_1} - \dot u_{\varepsilon_1}, \dot v - \dot u_{\varepsilon_1})_{|S} + a(\dot u_{\varepsilon_1}, \dot v - \dot u_{\varepsilon_1}) \geqslant 0 \quad \forall \dot v, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_1 \to 0. \tag{14}$$

Используя метод штрафа для (13), запишем неравенство относительно известного значения $\dot{\tilde u}^*$:

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\,\big(\dot{\tilde u}^* - \dot{\tilde u}_{\varepsilon_2}, \dot{\tilde v} - \dot{\tilde u}^*\big)_{|S} + a\big(\dot{\tilde u}^*, \dot{\tilde v} - \dot{\tilde u}^*\big) \geqslant 0 \quad \forall \dot{\tilde v}, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_2 \to 0. \tag{15}$$

Для построения итеративного процесса воспользуемся управлением с помощью обратных связей [9].

Введем аддитивное управление $\dot{\bar{u}}_{\varepsilon_2} = \dot{\tilde{u}}_{\varepsilon_2} - \dot{\tilde{u}}^*$ и представим (15) в виде

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}_{\varepsilon_2}, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right)_{|S} + a\left(\dot{\tilde{u}}^* + \dot{\bar{u}}_{\varepsilon_2}, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) \geqslant 0 \quad \forall \dot{\tilde{v}}, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_2 \to 0, \quad \text{или}$$
$$\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}_{\varepsilon_2}, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right)_{|S} + a\left(\dot{\tilde{u}}_{\varepsilon_2}, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) \geqslant 0 \quad \forall \dot{\tilde{v}}, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_2 \to 0. \tag{16}$$

Итеративный аналог суммы неравенств (14) и (16) имеет вид

$$A_1^k\left(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}\right)_{|S} + a\left(\dot{u}^k, \dot{v} - \dot{u}^{k+1}\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) + A_2^k\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right)_{|S} \geqslant 0 \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{\tilde{v}}, \tag{17}$$

где $A_1^k > 0$, $A_2^k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_1^k = \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_2^k = \infty$.

Покажем, что для такой формулировки задачи имеет место устойчивость, а именно непрерывная зависимость остаточных скоростей перемещений от текущих. Пусть скорости текущих перемещений $\dot{u}^1$ изменились на $\Delta\dot{u}$, т.е. $\dot{u}^2 = \dot{u}^1 + \Delta\dot{u}^1$, а скорости остаточных перемещений $\dot{\tilde{u}}^1$ — на $\Delta\dot{\tilde{u}}$, т.е. $\dot{\tilde{u}}^2 = \dot{\tilde{u}}^1 + \Delta\dot{\tilde{u}}$; тогда можно записать неравенства

$$A_1\left(\dot{u}^2 - \dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^2\right)_{|S} + a\left(\dot{u}^1, \dot{v} - \dot{u}^2\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) + A_2\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right)_{|S} \geqslant 0 \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{\tilde{v}},$$
$$A_1\left(\dot{u}^1 - \dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^1\right)_{|S} + a\left(\dot{u}^2, \dot{v} - \dot{u}^1\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^2, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) + A_2\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^2, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right)_{|S} \geqslant 0 \quad \forall \dot{v}, \quad \forall \dot{\tilde{v}}.$$

Штрафные коэффициенты, очевидно, можно взять одинаковыми, выбрав наибольшие. Примем в первом неравенстве $\dot{v}_i = \dot{u}_i^1$ и $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}^* + \dot{\tilde{u}}_i^2 - \dot{\tilde{u}}_i^1$, а во втором — $\dot{v}_i = \dot{u}_i^2$ и $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}^* + \dot{\tilde{u}}_i^1 - \dot{\tilde{u}}_i^2$ и просуммируем:

$$-2A_1\left\|\dot{u}^2 - \dot{u}^1\right\|_S^2 - a\left(\dot{u}^1, \dot{u}^2 - \dot{u}^1\right) + a\left(\dot{u}^2, \dot{u}^2 - \dot{u}^1\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right) -$$
$$- a\left(\dot{\tilde{u}}^2, \dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right) + A_2\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right)_{|S} - A_2\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^2, \dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right)_{|S} \geqslant 0.$$

После преобразований получим

$$-2A_1\left\|\dot{u}^2 - \dot{u}^1\right\|_S^2 + a\left(\dot{u}^2 - \dot{u}^1, \dot{u}^2 - \dot{u}^1\right) - a\left(\dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1, \dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right) + A_2\left\|\dot{\tilde{u}}^2 - \dot{\tilde{u}}^1\right\|_S^2 \geqslant 0,$$

или $a(\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u}) + A_2\left\|\Delta\dot{\tilde{u}}\right\|_S^2 \geqslant 2A_1\left\|\Delta\dot{u}\right\|_S^2 + a\left(\Delta\dot{\tilde{u}}, \Delta\dot{\tilde{u}}\right)$. Учитывая достаточный критерий единственности, можно прийти к неравенству $\dfrac{A_2}{A_1}\left\|\Delta\dot{\tilde{u}}\right\|_S^2 \geqslant 2\left\|\Delta\dot{u}\right\|_S^2 - \dfrac{a(\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u})}{A_1}$. Увеличивая коэффициенты A_1, A_2 так, чтобы $\dfrac{a(\Delta\dot{u}, \Delta\dot{u})}{A_1} \to 0$ и $\dfrac{A_2}{A_1} \leqslant 2$, получим неравенство, гарантирующее непрерывную зависимость остаточных скоростей перемещений от текущих.

Теорема 1. *Пусть* $\dot{u}^k$ *и* $\dot{\tilde{u}}^k$ *— решение задачи деформирования с заданными на поверхности* S *граничными условиями и решение задачи разгрузки. Тогда итеративный процесс* (17) *решения обратной задачи формообразования на* S *представляется в виде*

$$\dot{u}^{k+1} = \dot{u}^k + \alpha^k\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right), \quad \alpha^k = \frac{A_2^k}{A_1^k}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть в (17) $\dot{v}_i = \dot{w}_i + \dot{u}_i^{k+1} + \dot{u}_i^k - \dot{\tilde{u}}_i^k$ и $\dot{\tilde{v}}_i = \dot{\tilde{u}}^* - \dot{w}_i - \dot{u}_i^k + \dot{\tilde{u}}_i^k$ для всех $\dot{w}_i$; тогда

$$A_1^k\left(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e\right)_{|S} + a\left(\dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^e - \dot{w}\right) + A_2^k\left(\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^e - \dot{w}\right)_{|S} \geqslant 0, \tag{19}$$

где $\dot{u}_i^e = \dot{\tilde{u}}_i^k - \dot{u}_i^k$. Рассмотрим отдельно сумму второго и третьего слагаемых в (19):

$$a\left(\dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{u}^e - \dot{w}\right) = a\left(\dot{u}^k, \dot{w} - \dot{u}^e\right) - a\left(\dot{\tilde{u}}^k, \dot{w} - \dot{u}^e\right).$$

Переходя к потенциальным формам определяющих соотношений, последнее выражение можно записать в виде

$$\int\limits_V c_{ijpl}\big(\dot\epsilon^k_{pl}-\eta^k_{pl}\big)\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV-\int\limits_V c_{ijpl}\big(\dot{\tilde\epsilon}^k_{pl}-\eta^k_{pl}\big)\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV=$$
$$=\int\limits_V c_{ijpl}\big(\dot\epsilon^k_{pl}-\dot{\tilde\epsilon}^k_{pl}\big)\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV=-\int\limits_V c_{ijpl}\big(\dot{\tilde\epsilon}^k_{pl}-\dot\epsilon^k_{pl}\big)\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV=$$
$$=-\int\limits_V c_{ijpl}\big(\dot{\tilde u}^k_p-\dot u^k_p\big)_{,l}\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV=-\int\limits_V c_{ijpl}\dot u^e_{p,l}\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV.$$

Если $\dot u^k$ и $\dot{\tilde u}^k$ являются решениями указанных задач, т.е.

$$\dot u^k=\operatorname{argmin}\left\{\int\limits_V W(\dot\varepsilon_{ij})\,dV\right\},\quad \dot{\tilde u}^k=\operatorname{argmin}\left\{\int\limits_V W\big(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\big)\,dV\right\},$$

то $\dot u^e$ — решение задачи упругого деформирования, поэтому выполняется неравенство

$$\int\limits_V c_{ijpl}\dot u^e_{p,l}\big(\dot w_i-\dot u^e_i\big)_{,j}\,dV=-a\big(\dot u^k,\dot w-\dot u^e\big)-a\big(\dot{\tilde u}^k,\dot u^e-\dot w\big)\geqslant 0\quad\forall\dot w.$$

Подставляя выписанные преобразования в (19), получим неравенство

$$\big(\dot u^{k+1}-\dot u^k,\dot w-\dot u^e\big)_{|S}-\frac{A^k_2}{A^k_1}\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot w-\dot u^e\big)_{|S}\geqslant 0\quad\forall\dot w.$$

Данное неравенство определяет операцию проектирования [10], поэтому приходим к следующему итеративному процессу в области S: $\dot u^{k+1}_i=\dot u^k_i+\alpha^k\big(\dot{\tilde u}^*_i-\dot{\tilde u}^k_i\big)$, $\alpha^k=\dfrac{A^k_2}{A^k_1}$, $i=1,2,3$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\dot u^k$ и $\dot{\tilde u}^k$ — решение задачи деформирования с заданными на поверхности S граничными условиями и решение разгрузки. Тогда последовательность $\{\dot u^k\}$, полученная по методу* (18), *сходится в $L_2(S)$ при $\alpha^k=\alpha<2$, $k=1,2,\ldots$*

Доказательство. Пусть $\dot u^*$, $\dot{\tilde u}^*$ — решение обратной задачи формообразования, тогда должно выполняться неравенство

$$a\big(\dot u^*,\dot v-\dot u^*\big)+a\big(\dot{\tilde u}^*,\dot{\tilde v}-\dot{\tilde u}^*\big)\geqslant 0\quad\forall\dot v,\quad\dot{\tilde v}.\tag{20}$$

Рассмотрим неравенство (17):

$$A^k_1\big(\dot u^{k+1}-\dot u^k,\dot v-\dot u^{k+1}\big)_{|S}+a\big(\dot u^k,\dot v-\dot u^{k+1}\big)+a\big(\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde v}-\dot{\tilde u}^*\big)+A^k_2\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde v}-\dot{\tilde u}^*\big)_{|S}\geqslant 0\quad\forall\dot v,\quad\forall\dot{\tilde v}.$$

Примем $\dot v_i=\dot u^{k+1}_i-\dot u^k_i+\dot u^*_i$, $\dot{\tilde v}_i=\dot{\tilde u}^k_i$, а в неравенстве (20) — $\dot v_i=\dot u^k_i$, $\dot{\tilde v}_i=2\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k_i$ $(i=1,2,3)$, и сложим их:

$$A^k_1\big(\dot u^{k+1}-\dot u^k,\dot u^*-\dot u^k\big)_{|S}+a\big(\dot u^k,\dot u^*-\dot u^k\big)+a\big(\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde u}^k-\dot{\tilde u}^*\big)+$$
$$+A^k_2\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde u}^k-\dot{\tilde u}^*\big)_{|S}+a\big(\dot u^*,\dot u^k-\dot u^*\big)+a\big(\dot{\tilde u}^*,\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k\big)\geqslant 0.$$

После преобразований найдем

$$A^k_1\big(\dot u^{k+1}-\dot u^k,\dot u^*-\dot u^k\big)_{|S}+A^k_2\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde u}^k-\dot{\tilde u}^*\big)_{|S}\geqslant a\big(\dot u^*-\dot u^k,\dot u^*-\dot u^k\big)-a\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k\big).$$

Переходя к исходным обозначениям, можно оценить последнее выражение:

$$a\big(\dot u^*-\dot u^k,\dot u^*-\dot u^k\big)-a\big(\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k,\dot{\tilde u}^*-\dot{\tilde u}^k\big)=\int\limits_V\triangle\dot\sigma_{ij}\triangle\dot u_{ij}\,dV-\int\limits_V\triangle\dot\rho_{ij}\triangle\dot{\tilde u}_{ij}\,dV=$$
$$=\int\limits_V\triangle\dot\sigma_{ij}\triangle\dot u_{ij}\,dV+\int\limits_V\triangle\dot\rho_{ij,j}\triangle\dot{\tilde u}_i\,dV-\int\limits_V\triangle\dot\rho_{ij}n_j\triangle\dot{\tilde u}_i\,dV=\int\limits_V\triangle\dot\sigma_{ij}\triangle\dot u_{ij}\,dV\geqslant 0.$$

Здесь через $\triangle\dot{u}_i = \dot{u}_i^* - \dot{u}_i^k$ и $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}_i^* - \dot{\tilde{u}}_i^k$ обозначена разность решений задач деформирования и разгрузки, использованы уравнения (7) для задачи разгрузки и учтен достаточный критерий единственности. В результате можно записать: $\left(\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k, \dot{u}^* - \dot{u}^k\right)_{|S} \geqslant \alpha^k \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2$.

Используя тождество $\left\|x_1 - x_3\right\|^2 = \left\|x_1 - x_2\right\|^2 + 2(x_1 - x_2, x_2 - x_3) + \left\|x_2 - x_3\right\|^2$, разложим левую часть полученного неравенства на сумму квадратов:

$$\left\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k\right\|_S^2 + \left\|\dot{u}^k - \dot{u}^*\right\|_S^2 - \left\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\right\|_S^2 \geqslant 2\alpha^k \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2.$$

С учетом (18) найдем

$$\begin{gathered}\left(\alpha^k\right)^2 \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2 + \left\|\dot{u}^k - \dot{u}^*\right\|_S^2 - \left\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\right\|_S^2 \geqslant 2\alpha^k \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2, \\ \left\|\dot{u}^k - \dot{u}^*\right\|_S^2 \geqslant \left\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^*\right\|_S^2 + \left(2\alpha^k - \left(\alpha^k\right)^2\right) \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2. \end{gathered} \tag{21}$$

Просуммируем (21) по k от 0 до N: $\left\|\dot{u}^0 - \dot{u}^*\right\|_S^2 \geqslant \left\|\dot{u}^{N+1} - \dot{u}^*\right\|_S^2 + \sum\limits_{k=0}^{N+1} \left(2\alpha^k - \left(\alpha^k\right)^2\right) \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2$.

Из полученного неравенства при $\left(2\alpha^k - \left(\alpha^k\right)^2\right) > 0$ или $\alpha^k < 2$ следует ограниченность последовательности $\left\{\dot{u}^k - \dot{u}^*\right\}$ в $L_2(S)$: $\left\|\dot{u}^0 - \dot{u}^*\right\|_S^2 \geqslant \left\|\dot{u}^{N+1} - \dot{u}^*\right\|_S^2$ и сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(2\alpha^k - \left(\alpha^k\right)^2\right) \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2 < \infty$.

При $\alpha^k = \alpha = \mathrm{const} < 2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2 < \infty$; следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\dot{\tilde{u}}^* - \dot{\tilde{u}}^k\right\|_S^2 = 0$.

После подстановки (18) находим $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k\right\|_S^2 = 0$. Так как последовательность $\left\{\dot{u}^k\right\}$ в $L_2(S)$ ограничена, то существует элемент $\dot{u}'$, такой, что $\dot{u}^{n_i} \to \dot{u}'$ при $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, получим $a\left(\dot{u}', \dot{v} - \dot{u}'\right) + a\left(\dot{\tilde{u}}^*, \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{u}}^*\right) \geqslant 0$ для всех $\dot{v}$, $\dot{\tilde{v}}$.

Это неравенство обеспечивает решение задачи

$$\dot{u}' = \operatorname{argmin} \left\{ \int\limits_V W(\dot{\varepsilon}_{ij})\, dV, u \in \left[W_2^1(Q)\right]^3 \right\}, \quad \dot{\tilde{u}} = \operatorname{argmin} \left\{ \int\limits_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})\, dV, \tilde{u} \in \left[W_2^1(Q)\right]^3 \right\}.$$

Достаточные условия единственности решения краевых задач обеспечивают единственность решения (20). Теорема доказана.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известны перемещения $u_i(0) = 0$, $\tilde{u}_i(0) = 0$, $\tilde{u}_i^*(0) = 0$, а в момент $t = T$ имеем $\tilde{u}_i^*(T) = \tilde{u}_i^*$. Тогда после интегрирования (18) от 0 до T найдем итеративный процесс в перемещениях:

$$u^{k+1} = u^k + \alpha^k \left(\tilde{u}^* - \tilde{u}^k\right), \tag{22}$$

где α^k — постоянная для любого момента времени.

Для решения обратных задач формообразования в ползучести таких элементов конструкций, как тонкие панели, можно ограничиться поиском функции прогиба. Применяя технологию метода конечных элементов (МКЭ) [3, 11] к функционалам вариационных принципов обратных задач, получим два векторных уравнения

$$K\dot{\boldsymbol{w}} = \dot{\boldsymbol{F}}, \quad \widetilde{K}\dot{\tilde{\boldsymbol{w}}} = 0, \tag{23}$$

где $\dot{\boldsymbol{w}}$ и $\dot{\tilde{\boldsymbol{w}}}$ — векторы скоростей узловых параметров, описывающих функции прогиба при неупругом деформировании $w(x_1, x_2)$ и остаточного прогиба $\widetilde{w}(x_1, x_2)$; K, $\widetilde{K}$ — касательные матрицы жесткости; $\dot{\boldsymbol{F}}$ — вектор внешних сил.

Представляя остаточный прогиб через прогиб разгрузки w^e ($\boldsymbol{w}^e$) в виде $\widetilde{w} = w + w^e$ или в скоростях узловых параметров $\dot{\tilde{\boldsymbol{w}}} = \dot{\boldsymbol{w}} + \dot{\boldsymbol{w}}^e$, векторные уравнения (23) можно записать в виде

$$K\dot{\boldsymbol{w}} = \dot{\boldsymbol{F}}, \quad \widetilde{K}\dot{\boldsymbol{w}}^e = \dot{\boldsymbol{F}}(\dot{\sigma}_0), \tag{24}$$

где второе уравнение представляет собой задачу разгрузки с начальными напряжениями и деформациями, полученными из решения задачи неупругого деформирования.

При решении уравнений (24) используются процедуры пошагового интегрирования нелинейных уравнений МДТТ и уточнения решений [3]. При пошаговом интегрировании уравнений (24) сначала выполняется факторизация матрицы $K = LDL^{\mathrm{T}}$ (L — нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, D — диагональная матрица), затем методом Гаусса решается система линейных уравнений. Собственные состояния тела, соответствующие критическим значениям параметра деформирования или бифуркационным нагрузкам (приводящие к неединственности решений уравнений (23)), характеризуются нетривиальными решениями однородных систем, что возможно при $\det K = 0$ и $\det \widetilde{K} = 0$. При этом появляются нулевые элементы на главной диагонали матриц D и $\widetilde{D}$ в разложениях. Выполнение достаточного критерия единственности означает положительную определенность квадратичных форм $\dot{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}} K \dot{\boldsymbol{w}} > 0$ и $\dot{\boldsymbol{w}}^{e^{\mathrm{T}}} \widetilde{K} \dot{\boldsymbol{w}}^{e} > 0$ для всех кинематически возможных векторов скоростей узловых параметров $\dot{\boldsymbol{w}}$, $\dot{\boldsymbol{w}}^{e}$, отличных от нулевых, что соответствует положительности всех элементов главных диагоналей матриц D и $\widetilde{D}$. Таким образом, для обеспечения устойчивого решения нелинейных квазистатических задач необходимо на каждом шаге по времени проверять элементы матриц D и $\widetilde{D}$ [3].

В программах конечно-элементного анализа, в частности MSC.Marc, используется данный алгоритм получения устойчивого решения нелинейных квазистатических краевых задач. Вследствие этого можно применить итеративный метод (22) в MSC.Marc для решения обратной задачи в условиях ползучести.

Таким образом, для нахождения решения обратной задачи строится следующий метод:

$$\boldsymbol{w}^{i+1} = \boldsymbol{w}^{i} + \alpha\big(\widetilde{\boldsymbol{w}}^{0} - \widetilde{\boldsymbol{w}}^{i}\big), \tag{25}$$

где $i = 1, 2, \ldots$, $\boldsymbol{w}^{1} = \widetilde{\boldsymbol{w}}^{0}$, $0 < \alpha < 2$. Итерации продолжаются, пока $\big\|\widetilde{\boldsymbol{w}}^{0} - \widetilde{\boldsymbol{w}}^{i}\big\| < r$, где r — заданная точность, $\widetilde{\boldsymbol{w}}^{0}$ — глобальный вектор заданных остаточных перемещений узлов.

4. Результаты численных решений. Рассмотрим квадратную пластинку толщиной h и длиной стороны a. Пусть известен прогиб пластинки, моделирующий кручение [12] в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки. Для более полного анализа рассматривается объемная постановка задачи.

В расчетах используются характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластинки. Материал изотропен, а его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга $E = 7000$ кг/мм^2, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента B для каждого из этих видов деформирования:

— сжатие: $B_1 = 0.25 \times 10^{-14}$ (кг/мм$^2)^{-n_1}$(час)$^{-1}$, $n_1 = 8$;

— растяжение: $B_2 = 0.525 \times 10^{-14}$ (кг/мм$^2)^{-n_2}$(час)$^{-1}$, $n_2 = 8$.

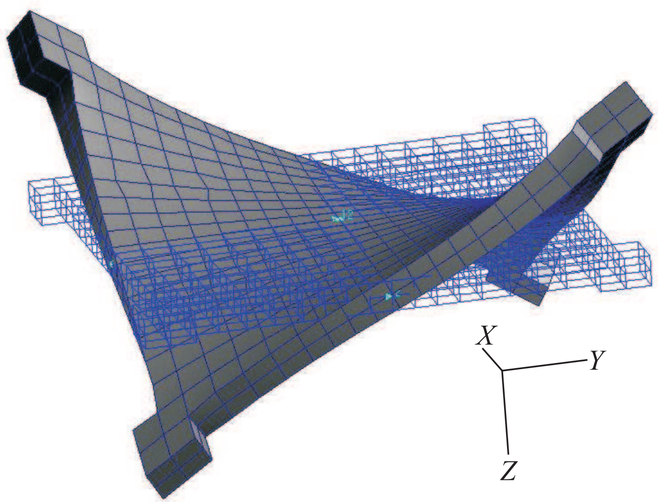

Рис. 1

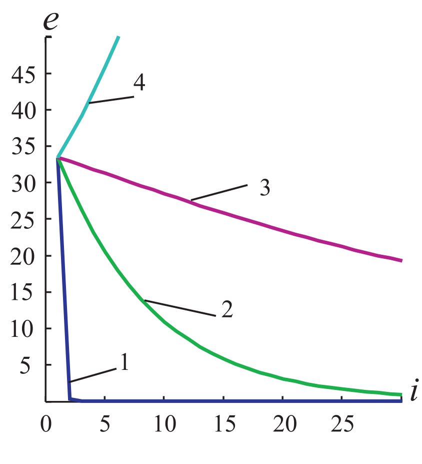

Рис. 2

Проведены расчеты определения упреждающей формы пластинки для обеспечения заданной кривизны после упругой разгрузки по итеративному методу (25) с разными постоянными коэффициентами α. На рис. 1 представлена заданная остаточная форма пластинки, для которой необходимо найти упреждающую форму, и ее плоская модель.

На рис. 2 представлены графики сходимости итеративного метода (25) с разными постоянными коэффициентами по среднеквадратичной норме $e = \left(\sum_S \left(\widetilde{\boldsymbol{w}}^0 - \widetilde{\boldsymbol{w}}^i\right)^2\right)^{1/2}$, S — нижняя поверхность панели, i — номер итерации: кривая 1 — $\alpha = 1$, кривая 2 — $\alpha = 1.9$, кривая 3 — $\alpha = 2$, кривая 4 — $\alpha = 2.1$. Из рис. 2 можно обнаружить согласование условий сходимости с теоремой 2. Незначительные отклонения вызваны применением численных методов в решении задач МДТТ.

5. Заключение. Построен итеративный метод решения обратных задач формообразования в режиме ползучести и определены условия сходимости. Выполнена программная реализация процесса определения последовательных приближений методом конечных элементов. Разработаны программы, реализующие итеративный метод в комплексе программ инженерного анализа MSC.Marc. Применение разработанных алгоритмов проводится при моделировании процессов формообразования панелей крыла самолета [13]. Разработанным методом могут быть получены оптимальные решения формообразования деталей в условиях ползучести [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Банщикова И.А., Горев Б.В., Сухоруков И.В.* Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2002. **43**, № 3. 129–139.
2. *Цвелодуб И.Ю.* Обратные задачи неупругого деформирования // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. № 2. 81–92.
3. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. *Hill R.* On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain // J. Mech. Phys. Solids. 1957. **5**, N 4. 229–241. Русский перевод: *Хилл Р.* О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций // Механика. Сб. переводов. 1958. **6**. 53–65.
5. *Бормотин К.С.* Вариационные методы решения обратной задачи оптимального деформирования в ползучести // Информатика и системы управления. 2011. **2**. 106–116.
6. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
7. *Антипин А.С.* Методы решения вариационных неравенств со связными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. **40**, № 9. 1291–1307.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
9. *Антипин А.С.* Седловые градиентные процессы, управляемые с помощью обратных связей // Автоматика и телемеханика. 1994. № 3. 12–23.
10. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
11. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
12. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**. 346–365.
13. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикладная механика и техническая физика. 2010. **51**, № 4. 155–165.
14. *Бормотин К.С.* Обратные задачи оптимального управления в теории ползучести // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. **15**, № 2. 33–42.
15. *Бормотин К.С., Олейников А.И.* Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2012. **53**, № 5. 136–146.

Поступила в редакцию
22.01.2013