УДК 519.6

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ВЭЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ИХ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ

Л. Г. Васильева[1], Я. М. Жилейкин[1], Ю. И. Осипик[1]

Приводится краткий обзор достоинств и недостатков преобразования Фурье и вэйвлет-преобразований. Дается описание свойств вэйвлет-преобразований и вэйвлет-рядов. Указана общедоступная литература по рассматриваемой тематике.

Ключевые слова: численный анализ, численные методы, преобразование Фурье, вэйвлет-преобразование, ряды Фурье, обратное преобразование Фурье, дискретизация, базисные вэйвлеты, сходимость.

Вэйвлет-преобразования и вэйвлет-ряды — актуальная область современной математики, которая находит большое практическое применение во многих областях человеческой деятельности. Здесь уместно привести слова классика этой науки французского математика Стефана Малла: “Вэйвлеты не базируются на “блестящей” новой идее, но на концепциях, существовавших ранее в различном виде во многих областях знаний. Формализация и развитие теории вэйвлетов — результат междисциплинарных усилий, которые объединили вместе математиков и инженеров, осознавших, что они независимо развивают близкие идеи” [1].

Основным моментом в создании аппарата вэйвлет-разложений является дальнейшее развитие представления функций в виде преобразований и рядов Фурье. Если $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$, то ее можно представить в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, \quad C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

В прикладных задачах равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

обычно интерпретируется как закон сохранения энергии. Математическое описание свойств рядов Фурье облегчается тем, что $L^2[0, 2\pi]$ — пространство Гильберта со скалярным произведением

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot g^* dx,$$

где $*$ — знак комплексного сопряжения.

При определении функций на всей числовой оси R обычно рассматривают пространство функций $L^2(R)$ со скалярным произведением

$$< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot g^* dx.$$

В этом случае преобразование Фурье функции $f \in L^2(R)$ определяется как замыкание в норме $L^2(R)$ интеграла по конечному отрезку:

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.su

Аналогично можно определить и обратное преобразование Фурье, которое обычно записывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega.$$

В этом случае также имеет место аналог равенства Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\, \|\hat{f}\|_2^2.$$

Это равенство, так же как и методику перехода от пространств $L^1(R)$ к $L^2(R)$, часто связывают с именем Планшереля.

Остановимся на ряде характерных свойств рядов и преобразований Фурье.

1. Эти преобразования используют для разложения функций из L^2 базис, который состоит из растяжения (и сжатия) единственной функции e^{ix}. При больших коэффициентах сжатия мы имеем высокочастотные колебания, а при малых — низкочастотные.

2. Разложение в ряд Фурье функции $f \in L^2[0,1]$ допускает идеальную дискретизацию, которая состоит в переходе к ортогональному базису $F_m \{e^{2\pi imk/N},\ k = 0, 1, \dots, N-1\}$, $m = 0, 1, \dots, N-1$, в пространстве $\ell^2(Z_N)$ N-мерных векторов. Эта дискретизация может быть обобщена на случай $f(n) \in \ell^2(Z)$ для функций $f(x) \in L^2(R)$.

3. Оператор L, отображающий $L^2(R)$ на себя, называется инвариантно-временным, если он инвариантен относительно сдвига. Пусть

$$f_\tau(t) = f(t-\tau), \quad g(t) = L\, f(t) \Longrightarrow g(t-\tau) = L\, f_\tau(t), \quad L\, f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(u)\, f(t-u)\, du.$$

Здесь и в далее в качестве независимой переменной мы будем рассматривать время t.

Функция $h(u)$ называется импульсным откликом системы, а оператор L есть оператор свертки $g(t) = f * h(t)$. Важным свойством базиса Фурье является тот факт, что оператор рассматриваемого типа в этом базисе имеет диагональный вид, в частности

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega).$$

Указанные выше достоинства метода Фурье с учетом его адекватности многим физическим процессам делают разложение в ряд Фурье и интегральное преобразование Фурье математическим аппаратом, эффективным при решении прикладных задач.

Основным недостатком базиса Фурье является его плохая локализованность во временной области. Модуль e^{it} для всех $t \in R$ равен единице. Если $f(t) = \delta(t-t_0)$, то $\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega t_0}$ также по модулю равняется единице при всех ω. Для вычисления $\hat{f}(\omega)$ необходимо знать значения сигнала на всем интервале $(-\infty, \infty)$. Плохая локализованность базиса не дает возможность определить частотную характеристику (спектр) сигнала в конкретный момент времени.

Поставим вопрос о построении базиса, который обладал бы положительными свойствами базиса Фурье и при этом был хорошо локализован во времени. Начнем с разложения функций в ряд. Пусть $\psi(t)$ — быстро убывающая функция, определенная на R. Чтобы покрыть все R, рассмотрим семейство $\{\psi(t-k)\}_{k \in Z}$. Для локализации семейства функций введем еще один параметр j:

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j \in Z.$$

Таким образом, мы получили двупараметрическое семейство функций $\psi_{j,k}$, в котором 2^{-j} — масштабирующий параметр (параметр локализации), $k\, 2^{-j}$ — параметр сдвига и $2^{j/2}$ — нормировочный коэффициент. Особое удобство при разложении в вэйвлет-ряд представляет случай, когда семейство $\{\psi_{j,k}\}$ ортонормировано:

$$< \psi_{j,k}, \psi_{\ell,m} > = \delta_{j,\ell}\, \delta_{k,m}, \quad j, \ell, k, m \in Z$$

и

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p = q, \\ 0 & \text{при} \quad p \neq q \end{cases} \text{— символ Кронекера.}$$

Любая функция $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}\ \psi_{j,k},$$

где $C_{j,k} = < f, \psi_{j,k} >$. В этом случае $\psi(t)$ называется ортогональным базисным вэйвлетом. Простейший пример ортогонального базисного вэйвлета — функция Хаара

$$\psi_H(x) = \begin{cases} \ \ 1, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leqslant x < 1, \\ \ \ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Параллельно с разложением функций в вэйвлет-ряды развивалась теория интегральных вэйвлет-разложений. В этом случае базисным вэйвлетом называется функция $\psi \in L^2(R)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = 0. \tag{1}$$

Именно поэтому объект нашего рассмотрения назвали “малой волной” — вэйвлетом, онделетом, или всплеском.

Семейство локализованных функций, или как их еще называют частотно-временных атомов, получается в результате масштабирования ψ параметром s и сдвигом на величину параметра u:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi \left(\frac{t-u}{s} \right).$$

Эти частотно-временные атомы нормированы:

$$\|\psi_{u,s}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1.$$

Вэйвлет-преобразование функции $f \in L^2(R)$ в момент времени u и для параметра масштабирования s дается формулой

$$Wf(u,s) = < f, \psi_{u,s} > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt. \tag{2}$$

Теоретическое обоснование этого интегрального преобразования было дано математиком Кальдероном в 1964 г. Им была доказана

Теорема (Кальдерон, Гроссман, Морле). *Пусть $\psi \in L^2(R)$ — вещественная функция, такая, что*

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega}\, d\omega < +\infty. \tag{3}$$

Тогда для любой функции $f(t) \in L^2(R)$ справедливы равенства

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(u,s)\, \frac{1}{\sqrt{s}}\, \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) du\, \frac{ds}{s^2} \tag{4}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|Wf(u,s)\right|^2 du\, \frac{ds}{s^2}. \tag{5}$$

Легко видеть, что условие (1) вытекает из ограниченности интеграла (3). Дальнейшие направления развития вэйвлет-анализа состоят в

1) переходе к комплексным функциям ψ;

2) дискретизации формул (2), (4) и (5) как по переменной t, так и по параметрам u и s; в результате при $u = k\,2^{-j}$ и $s = 2^{-j}$ мы приходим к рассмотренному выше разложению $f(t)$ в ряд. Заметим также,

что дискретизация вэйвлет-разложений приводит к такому выбору параметров s и k, когда дискретная система частотно-временных атомов дает возможность восстановить $f(t)$ по ее разложению. В этом случае говорят, что такая система функций образует “каркас” пространства $L^2(R)$.

При переходе к конечным пределам изменения параметра s для разложения функций $f(t)$ кроме вэйвлета $\psi(t)$ необходимо также знание еще одной, связанной с ней функции $\varphi(t)$, которая называется масштабирующей функцией. Часто в литературе пользуются следующей терминологией: $\psi(t)$ — “материнский вэйвлет”, $\varphi(t)$ — “отцовский вэйвлет”. Изучение семейств $\{\psi_{j,k}(t)\}$ и $\{\varphi_{j,k}(t)\}$ приводит к теории “кратномасштабного анализа” — разбиения пространства $L^2(R)$ на прямую или ортогональную суммы подпространств, базисами которых являются подмножества этих семейств, соответствующих фиксированным значениям индекса j.

Мы не будем подробно останавливаться на всех тонкостях теории вэйвлет-анализа, а отошлем к списку литературы [1 – 4], в котором монографии [2 – 4] вполне доступны для российского читателя. В этом списке литературы книги расположены в порядке возрастания их сложности.

В завершение нашего краткого обзора укажем достоинства и недостатки методов вэйвлет-разложений.

1) Вэйвлет-разложения обладают почти всеми достоинствами преобразования Фурье. Исключение составляет диагонализация инвариантно-временных операторов. Можно сказать, что вэйвлет-базисы близки к диагональным для таких операторов.

2) В зависимости от выбора функций φ и ψ вэйвлет-базисы могут быть достаточно локализованными как по частоте, так и по времени. Параметр локализации s (или 2^{-j}) играет важную роль как для временной локализации, так и для выделения определенного масштаба, характеризующего протекание процесса. Последнее имеет большое значение в тех случаях, когда в процессе участвуют разномасштабные явления. Чтобы выделить явления с определенным характерным временем протекания, можно рассматривать только те члены разложения, которые соответствуют нужным значениям s (или 2^{-j}).

3) Вэйвлет-базисы, в отличие от базиса Фурье, — не единственные. Известно много вэйвлет-базисов, свойства которых ориентированы на решение различных задач. Это могут быть ортогональные базисы или базисы Рисса. Базисные вэйвлеты ψ и φ могут иметь конечные или бесконечные носители либо быть функциями различной гладкости. Нужными свойствами могут обладать и методы численной реализации вэйвлет-разложений. Здесь уместно отметить, что, как правило, вэйвлет-разложения реализуются с помощью быстрых алгоритмов.

4) Недостатком теории и реализации вэйвлет-разложений является их относительная сложность. Методы вэйвлет-разложений базируются на наиболее современных результатах функционального анализа, теории функций и вычислительной математики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 02–01–00742, 02–01–00744, 01–02–17039).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1999.
2. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М.: МИР, 2001.
3. *Добеши И.* Десять лекций по вэйвлетам. Москва–Ижевск: РХД, 2001.
4. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: АФП, 1999.

Поступила в редакцию
27.09.2002