

УДК 512.531; 515.124; 004.2

БИЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ В КОНСТРУКТИВНОМ МИРЕ \mathbb{R}_c^n

Г. Г. Рябов¹, В. А. Серов¹

Развиваются методы представления структур в стандартной кубической решетке \mathbb{R}_c^n в виде биективного кодирования на конечном алфавите. Они направлены на эффективные компьютерные реализации при хранении и вычислении топологических, метрических и комбинаторных характеристик таких структур для больших n . Расширяется метрика Хаусдорфа–Хемминга, введенная для k -граней на n -кубе, до метрики Громова–Хаусдорфа между “кубическими” метрическими пространствами. Рассматриваются симплициальные разбиения в n -кубе, их биективное кодирование и эргодические свойства. Комбинаторное наполнение при разбиениях на \mathbb{R}_c^n и связанные с ним численные характеристики рассматриваются по отношению к возможностям суперкомпьютеров.

Ключевые слова: n -куб, решетка \mathbb{R}_c^n , биективное кодирование, метрика Громова–Хаусдорфа, симплициальные разбиения, комбинаторное наполнение.

Исходные положения. Рассматривается биективное кодирование для конструктивного мира [3, 4] кубических структур в стандартной кубической решетке \mathbb{R}_c^n [1, 2] на репере $B = \{0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$, заданном в \mathbb{R}^n с вершинами в целых точках \mathbb{Z}^n , состоящей из n -кубов, примыкающих друг к другу $(n - 1)$ -мерными гипергранями [2]. Такое кодирование каждой k -мерной грани (k -грани в n -кубе) ставит во взаимно-однозначное соответствие n -разрядное троичное слово $D = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$, где d_i из алфавита $A = \{0, 1, 2\}$.

Поскольку k -грань можно представить как декартово произведение (Π) единичных отрезков, каждый отрезок $\mathbf{I}(e_i)$ из которых привязан к $e_i \in B_1 \subset B$, и трансляции (Γ) вдоль остальных векторов $e_j \in B_2 \subset B (B_2 = B \setminus B_1)$, то свойство биективности для грани $f_{nk}(B_1, B_2)$ можно записать в форме

$$f_{nk}(B_1, B_2) = \prod_k \mathbf{I}(e_i) + \prod_{n-k} \mathbf{T}(e_j) \xleftrightarrow{[1:1]} \langle d_1, \dots, d_n \rangle,$$

где $d_i = 2$ для $e_i \in B_1$, $d_j = 0, 1$ для $e_j \in B_2$, $d_j = 0$, когда нет трансляции по e_j , и $d_j = 1$ в противоположном случае.

При таком представлении множество всех n -разрядных троичных слов $A_n^* = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \}$, $d_i \in A = \{0, 1, 2\}$, можно считать множеством всех *генетических кодов* для всех k -граней n -куба над действиями декартова произведения (Π) и трансляции (Γ) . Для краткости такие слова названы *кубантами* [6]. На множестве кубантов вместе с пополнением алфавита символом \emptyset пустого множества до $A' = \{\emptyset, 0, 1, 2\}$, т.е. на $A_n'^*$ (для всех n -разрядных четверичных кодов), введена поразрядная операция умножения (\times) , которая задается следующими правилами:

$$\begin{aligned} 0 \times 0 = 0; \quad 0 \times 1 = 1 \times 0 = \emptyset; \quad 0 \times 2 = 2 \times 0 = 0; \\ 1 \times 1 = 1; \quad 1 \times 2 = 2 \times 1 = 1; \quad 2 \times 2 = 2; \\ \emptyset \times 0 = \emptyset; \quad \emptyset \times 1 = \emptyset; \quad \emptyset \times 2 = \emptyset. \end{aligned} \tag{1}$$

По существу, это — теоретико-множественное пересечение для трех множеств: $0; 1$ — точки-концы единичного отрезка и 2 — множество всех точек \mathbf{I} . С введением этой операции множество $A_n'^*$ становится моноидом с единицей — кубантом $\langle 22 \dots 2 \rangle$ (n -грань в n -кубе, т.е. сам n -куб).

Метрики Хаусдорфа–Хемминга и Громова–Хаусдорфа. В [7–9] приведен ряд поразрядных операций над кубантами, их свойств и примеров построений комплексов и многообразий с использованием вычислений на кубантах. Рассмотрим два свойства кубантов, существенных для дальнейшего изложения:

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; Г. Г. Рябов, зав. лабораторией, e-mail: gen-ryabov@yandex.ru; В. А. Серов, науч. сотр., e-mail: v_serov@mail.ru

1) свойство умножения (1) — число символов \emptyset в произведении двух кубантов D_1 и D_2 равно длине минимального пути по ребрам n -куба между биективными гранями:

$$\#(\emptyset)(D_1 \times D_2) = L_{\min}(D_1; D_2); \tag{2}$$

2) алгоритм вычисления кубанта D_1^*/D_2 для максимально удаленной подграницы в грани с кубантом D_1 от грани, соответствующей кубанту D_2 , состоит в рассмотрении всех пар $d_{1i} \in D_1$ и $d_{2i} \in D_2$ и в замене $d_{1i} = 1$, когда $d_{1i} = 2$; $d_{2i} = 0$, или в замене $d_{1i} = 0$, когда $d_{1i} = 2$; $d_{2i} = 1$ (при остальных комбинациях пар без изменений в разрядах D_1).

С введенными изменениями кубант D_1 обозначается через D_1^*/D_2 . Аналогично выполняется вычисление D_2^*/D_1 . Учитывая (2), можно записать

$$\max_{D_1 \rightarrow D_2} \left\{ L_{\min}(D_1^*/D_2; D_2) \right\} = \#(\emptyset)\left((D_1^*/D_2) \times D_2\right), \tag{3}$$

$$\max_{D_2 \rightarrow D_1} \left\{ L_{\min}(D_2^*/D_1; D_1) \right\} = \#(\emptyset)\left((D_2^*/D_1) \times D_1\right). \tag{4}$$

Исходя из определения метрики Хаусдорфа и учитывая компактность k -граней, на основании (3) и (4) для расстояния между гранями с кубантами D_1 и D_2 можно записать

$$\rho_{\text{НН}}(D_1, D_2) = \max \left\{ \#(\emptyset)\left((D_1^*/D_2) \times D_2\right); \#(\emptyset)\left((D_2^*/D_1) \times D_1\right) \right\}. \tag{5}$$

Таким образом, все k -грани ($k = 0, \dots, n$) n -куба образуют как точки *конечное метрическое пространство Хаусдорфа–Хемминга* (метрика Хемминга представляет собой частный случай, когда кубанты — двоичные слова, биективные вершинам n -куба) [7]. Следовательно, можно рассматривать множество соответствующих конечных метрических пространств $\{M(\mathbf{I}), M(\mathbf{I}^2), \dots, M(\mathbf{I}^n), \dots\}$, для которых в соответствии с теорией Громова [5] методы вычисления расстояний между метрическими пространствами ($\rho_{\text{ГН}}$ -метрика Громова–Хаусдорфа) естественно переносятся на этот случай. Поскольку в основе лежат методы изометрического вложения сопоставляемых метрических пространств M_1 и M_2 в пространство M_3 , в котором и вычисляется расстояние, для нашего случая в качестве M_3 для $M(\mathbf{I}^k)$ и $M(\mathbf{I}^n)$ всегда может выступать $M(\mathbf{I}^n)$ при $n \geq k$. В этом случае изометрическое вложение для $M(\mathbf{I}^k)$ в $M(\mathbf{I}^n)$ — это k -грань в n -кубе, для которой кубант равен $D_1 = \langle 22 \dots 200 \dots 0 \rangle$ и $\#(2)D_1 = k$; $\#(0)D_1 = n - k$. Для $M(\mathbf{I}^n)$ кубант D_2 равен $\langle 22 \dots 2 \rangle$. Формально вычисляя $\rho_{\text{НН}}(D_1, D_2)$ согласно (5), получим

$$\rho_{\text{НН}}(D_1, D_2) = \rho_{\text{ГН}}\left(M(\mathbf{I}^k), M(\mathbf{I}^n)\right) = |n - k|.$$

Следовательно, для этого случая можно говорить о сквозной *метрике Громова–Хаусдорфа–Хемминга* (ГНН-метрика), вычисляемой на кубантах.

Симплициальные разбиения в кубических структурах. Симплициальные k -комплексы и их вложения в \mathbb{R}^n продолжают оставаться в центре внимания ведущих математиков [3]. В данном разделе рассматриваются представления симплициальных разбиений в кубических структурах \mathbb{R}_c^n . За основу возьмем каноническую триангуляцию n -куба, или разбиение n -куба на n -симплексы [3], где каждый симплекс задается на основании обхода по $(n + 1)$ -й вершине куба, начиная с вершины $(00 \dots 0)$ и затем последовательно переходя в вершину с добавлением “1” в один из оставшихся с “0” разрядов (пусть с номером i), т.е. прохождение по ребру, параллельному e_i . Процесс заканчивается всегда в вершине $(11 \dots 1)$. Общее число таких различных путей между $(00 \dots 0)$ и $(11 \dots 1)$ равно $n!$ (как и всех перестановок множества индексов векторов из B), и каждому из них однозначно соответствует n -симплекс. Множества вершин V и ребер E симплекса при заданном порядке обхода $(e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{in})$ вычисляется следующим образом: $V = \{v_0 = (00 \dots 0); v_i = v_{i-1} + e_{is}; s = 1, \dots, n\}$; $E = \{v_0v_1; v_0v_2; v_0v_3; v_1v_3; v_2v_3; \dots, v_{n-1}v_n\}$, причем V и E образуют одномерный остов (1-остов) симплекса. Для канонического разбиения конкретной k -грани в n -кубе (кубант D) порядок обхода задается на множестве $B_1 = \{e_{is} : d_{is} \in D; d_{is} = 2\} = \{e_{j1}, \dots, e_{jk}\}$ подстановкой $P: P(e_{j1}, \dots, e_{jk}) = (e_{m1}, \dots, e_{mk})$. Далее следуют действия для образования множеств V и E , аналогичные случаю n -куба. Таким образом, обозначая действие P ($P \in S_k$, где S_k — симметрическая группа подстановок) на D по образованию V и E через Θ , а симплекс с построенным 1-остовом — через Δ , можно записать

$$\Theta(D, P) = (V, E) \xrightarrow{[1:1]} \Delta_0(D, P), \quad v_0 = (00 \dots 0) \in \Delta_0(D, P),$$

$$\Delta(D, P) = \Delta_0(D, P) + T(e_{it}), \quad \text{где } e_{it} \in B_2; \quad B_2 = B \setminus B_1, \quad t = 1, \dots, k.$$

Пару (кубант и подстановка), обозначаемую в виде $W = \langle D/P \rangle = \langle d_1, d_2, \dots, d_n/m_1, \dots, m_k \rangle$, по аналогии с кубантом будем называть *симпантом*. Алфавит для симпантов расширен до всех цифр $0, 1, \dots, 9$ (не считая вспомогательных символов).

На рис. 1 показана графическая интерпретация симплексов в \mathbf{I}^9 с симпантами $\langle 002121102/9, 3, 5 \rangle$ и $\langle 222222222/7, 6, 4, 9, 3, 5, 1, 2, 8 \rangle$. Множество всех симплексов при симплицальных разбиениях всех k -граней n -куба (или биективных им симпантов) можно рассматривать как множество точек конечного метрического НН-пространства по аналогии со случаем кубантов. Однако алгоритм вычисления НН-расстояний в этом случае будет иным. Прежде всего отметим, что 1-остов кубических k -граней состоит только из единичных отрезков, которые обуславливают применение метрики l_1 . В случае симплицальных разбиений 1-остов состоит из единичных отрезков и всевозможных диагоналей в k -кубах ($k = 1, \dots, n$) с евклидовыми длинами \sqrt{k} , т.е. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \dots$. Таким образом, для симплексов (соответственно симпантов) можно рассмотреть метрику Хаусдорфа в n -кубе на множестве кратчайших путей по расширенному множеству ребер, евклидовы длины которых приведены выше. Пусть в n -кубе заданы два симплекса Δ_1 и Δ_2 , которым соответствуют симпанты $W_1 = \langle D_1/P_1 \rangle$ и $W_2 = \langle D_2/P_2 \rangle$, где D_1 и D_2 — кубанты разбиваемых на симплексы k_1 и k_2 граней, а P_1 и P_2 — подстановки, задающие порядок обхода по вершинам граней в соответствии с вышеизложенным построением симплексов.

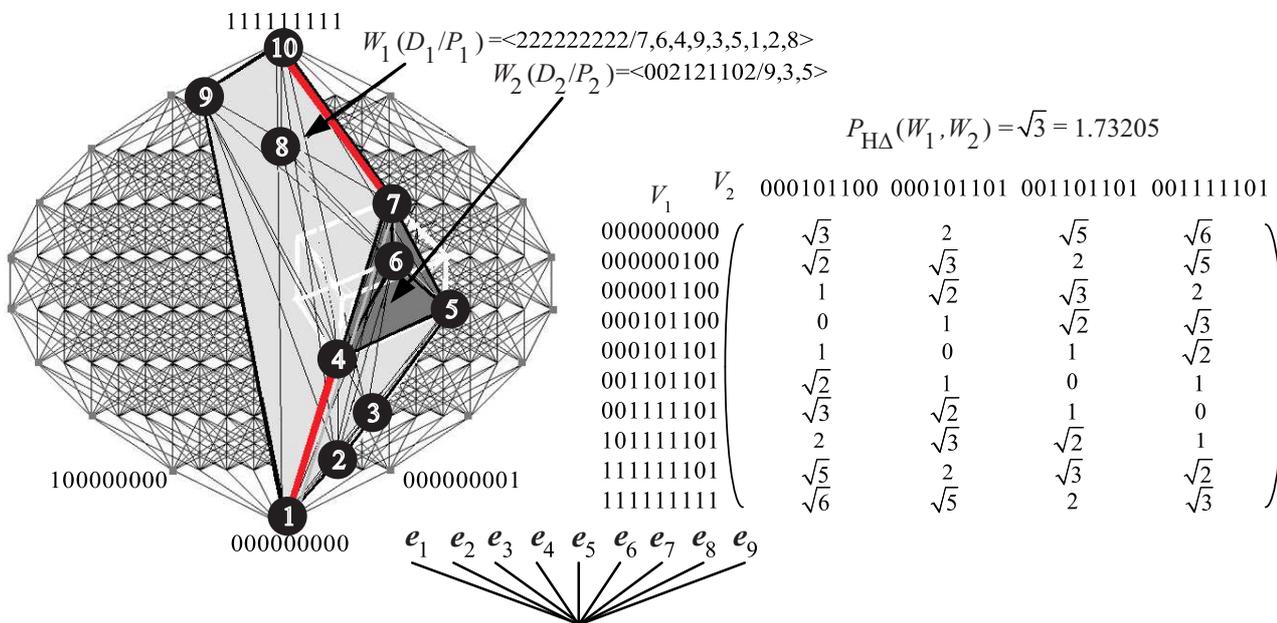


Рис. 1. На плоской проекции одномерного остова (вершины и ребра) \mathbf{I}^9 показаны одномерные остовы 3-симплекса, биективного симпанту $\langle 002121102/9, 3, 5 \rangle$ (темно-серый цвет), и 9-симплекса, биективного симпанту $\langle 222222222 / 7, 6, 4, 9, 3, 5, 1, 2, 8 \rangle$ (светло-серый цвет).
 На ребрах 1–4 и 7–10 реализуется $\rho_{\text{HA}}(W_1, W_2)$

Пусть V_1 и V_2 — соответствующие множества вершин (0-остовы) с числом вершин $k_1 + 1$ и $k_2 + 1$. Построим матрицу размерности $(k_1 + 1) \times (k_2 + 1)$, каждая строка которой соответствует одной из вершин V_1 и каждый столбец — одной из вершин V_2 , так что элемент на их пересечении равен длине одного ребра (т.е. кратчайшего отрезка) между этими вершинами из множества единичных и диагональных ребер во всех k -гранях n -куба. Для каждой строки выбирается минимальный элемент (т.е. для вершины из V_1), и затем берется максимум \max_1 по этим минимальным элементам. Аналогично вычисляется \max_2 для столбцов, причем $\max\{\max_1, \max_2\} = \rho_{\text{HA}}(W_1, W_2)$. Численный пример приведен на рис. 1.

Комбинаторное наполнение. Итак, каждой кубической k -грань в n -кубе соответствует $k!$ симпантов, биективных $k!$ симплексам, а общее их число в n -кубе имеет вид

$$F_{\Delta}(\mathbf{I}^n) = \sum_{k=2}^n k! C_n^k 2^{n-k}. \tag{6}$$

Поскольку $k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, из (6) получим $F_{\Delta}(\mathbf{I}^n) = n! \sum_{k=2}^n \frac{2^{n-k}}{(n-k)!} \approx n!e^2$. Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{\Delta}(\mathbf{I}^n)}{n!} = e^2. \tag{7}$$

Это эргодическое свойство можно сформулировать следующим образом: предел числа всех симплексов при канонических симплицальных разбиениях всех k -граней n -куба, деленного на $n!$, при $n \rightarrow \infty$ конечен и равен e^2 .

Здесь трудно удержаться от такой метафоры. Представим себе n -куб при больших n как большой арбуз, который по заданному способу разрезается на большие доли (сродни n -симплексам). Все семечки внутри арбуза будем рассматривать как симплексы всех граней, так что после разрезания на большие доли и высыпания всех внутренних семечек у нас получатся две кучки, состоящие из больших долей и всех семечек. Каким бы большим арбуз ни был ($n \rightarrow \infty$) число семечек будет всегда только в e^2 (т.е. примерно в семь с небольшим) раз больше, чем число больших долей. Отметим, что для кубических граней всех размерностей в n -кубе имеем

$$F_{\square}(\mathbf{I}^n) = 3^n, \quad \frac{F_{\square}(\mathbf{I}^n)}{3^n} \equiv 1. \tag{8}$$

В этой связи эргодическое свойство (7) при $n \rightarrow \infty$ можно трактовать как конечность нормированного комбинаторного наполнения (деленного на $n!$, т.е. на число n -симплексов в n -кубе) для симплицальных разбиений (канонической триангуляции всех k -граней) и равного e^2 . Прологарифмировав (7) и (8) и учитывая $\sum \ln x \approx \int \ln x dx = x \ln x - x$ для больших n , получим

$$\ln F_{\square}(\mathbf{I}^n) = 3 \ln n, \quad \ln F_{\Delta}(\mathbf{I}^n) \approx n \ln n - n + 3.$$

Можно назвать эту величину степенью комбинаторного наполнения для заданного способа разбиения. Далее распространим рассмотренный подход на случай введенных на \mathbb{R}_c^n кубических окрестностей Q_r^n радиуса r ($r \in N$) относительно $(0, 0, \dots, 0)$, состоящих из всех n -кубов с координатами вершин, не превосходящих по модулю r . Например, для Q_r^n в [9] показано, что число k -граней $F_{nk}(Q_r^n)$ в таком комплексе равно $C_k^n (2r)^k (2r+1)^{n-k}$.

Поясним мнемонику этого соотношения: $2r$ букв алфавита используется для отображения отрезков-сомножителей декартовых произведений и $2r+1$ буква — для трансляций (точки-концы отрезков) при формировании слов (кубантов), биективных k -граням в Q_r^n . Отсюда для больших n имеем $F_{\square}(Q_r^n) = (4r+1)^n$ и $F_{\Delta}(Q_r^n) \approx n!(2r)^n e^{2r+1}$.

Обозначив степень комбинаторного наполнения кубическими k -гранями для Q_r^n через $\Phi_1(n, r) = \ln F_{\square}(Q_r^n)$ и k -симплексами через $\Phi_2(n, r) = \ln F_{\Delta}(Q_r^n)$, получим $\Phi_1(n, r) = n \ln(4r+1)$, $\Phi_2(n, r) \approx n \ln n - n + n \ln(2r) + 3$ для больших n .

Графически поверхности Φ_1 и Φ_2 представлены на рис. 2.

Дискуссия. В случае попытки конструктивного решения задач на многомерных разбиениях (сетках) даже с применением самых мощных суперкомпьютерных систем возникает естественный вопрос о мере комбинаторного наполнения при выборе r и n для $Q_r^n \subset \mathbb{R}_c^n$ и выборе кубического или симплицального разбиения. Грубо говоря, возникает вопрос, как развивать конструктивную решетку (с генетическим-биективным кодированием всех кубических или симплицальных

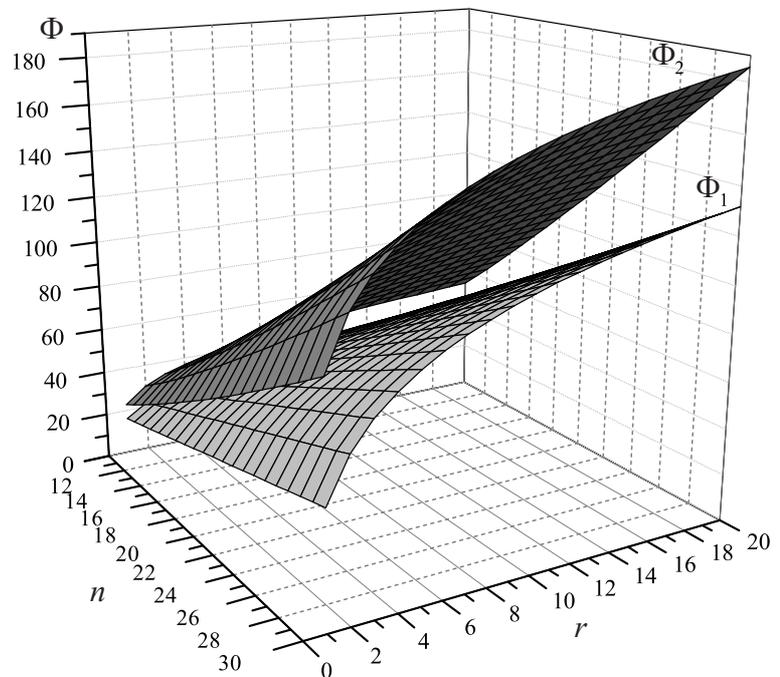


Рис. 2. Поведение Φ_1 и Φ_2

k -граней), увеличивая радиус r окрестности или увеличивая размерность n решетки? Конечно, ответ на этот вопрос прежде всего зависит от существа решаемой задачи (например, для методов “частицы в ячейке”), но в случае возможности вариации n и r и на основании вышеизложенного на первый взгляд напрашивается несколько *парадоксальный вывод*. При конструктивном подходе “легче” (т.е. без больших скачков в степени комбинаторного наполнения) продвигаться в сторону увеличения размерности n , чем увеличения радиуса r . Формально можно принять логарифм числа узлов или симплексов для сеточных методов больших задач ($10^9 \div 10^{12}$) размерности $n = 3$ как некоторую оценку возможностей современных суперкомпьютеров. Она будет численно близка степени комбинаторного наполнения для разбиений со значениями (n, r) для чисел из таблиц, выделенных серым цветом (рис. 3). Отсюда видно, что размеры достижимых по комбинаторному наполнению (n, r) -областей для современных суперкомпьютеров еще достаточно скромны. С другой стороны, *поразрядный характер операции умножения* над генетическими кодовыми словами, которая лежит в основе всех метрических вычислений и вычислений по связности, при строковой организации памяти компьютера обеспечивает максимальное распараллеливание вычислений для структур в решетке \mathbb{R}_c^n при $n \gg 3$.

кубическое разбиение																
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	5.493	6.592	7.690	8.789	9.888	10.986	12.085	13.183	14.282	15.381	16.479	17.578	18.676	19.775	20.874	21.972
1	8.047	9.657	11.266	12.876	14.485	16.094	17.704	19.313	20.923	22.532	24.142	25.751	27.360	28.970	30.579	32.189
2	10.986	13.183	15.381	17.578	19.775	21.972	24.169	26.367	28.564	30.761	32.958	35.156	37.353	39.550	41.747	43.944
3	12.825	15.390	17.955	20.520	23.085	25.649	28.214	30.779	33.344	35.909	38.474	41.039	43.604	46.169	48.734	51.299
4	14.166	16.999	19.832	22.666	25.499	28.332	31.165	33.999	36.832	39.665	42.498	45.331	48.165	50.998	53.831	56.664
5	15.223	18.267	21.312	24.356	27.401	30.445	33.490	36.534	39.579	42.623	45.668	48.712	51.757	54.801	57.846	60.890
6	16.094	19.313	22.532	25.751	28.970	32.189	35.408	38.627	41.845	45.064	48.283	51.502	54.721	57.940	61.159	64.378
7	16.836	20.204	23.571	26.938	30.306	33.673	37.040	40.408	43.775	47.142	50.509	53.877	57.244	60.611	63.979	67.346
8	17.483	20.979	24.476	27.972	31.469	34.965	38.462	41.958	45.455	48.951	52.448	55.944	59.441	62.937	66.434	69.930
9	18.055	21.666	25.276	28.887	32.498	36.109	39.720	43.331	46.942	50.553	54.164	57.775	61.386	64.997	68.607	72.218
10	18.568	22.281	25.995	29.709	33.422	37.136	40.849	44.563	48.276	51.990	55.704	59.417	63.131	66.844	70.558	74.271
11	19.033	22.840	26.647	30.453	34.260	38.067	41.873	45.680	49.487	53.293	57.100	60.907	64.713	68.520	72.327	76.133
12	19.459	23.351	27.243	31.135	35.026	38.918	42.810	46.702	50.594	54.485	58.377	62.269	66.161	70.053	73.945	77.836
13	19.851	23.822	27.792	31.762	35.733	39.703	43.673	47.644	51.614	55.584	59.554	63.525	67.495	71.465	75.436	79.406
14	20.215	24.258	28.301	32.344	36.387	40.431	44.474	48.517	52.560	56.603	60.646	64.689	68.732	72.775	76.818	80.861
15	20.554	24.665	28.776	32.887	36.998	41.109	45.220	49.330	53.441	57.552	61.663	65.774	69.885	73.996	78.107	82.217

симплициальное разбиение																
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.5	6.047	7.751	9.621	11.636	13.775	16.026	18.377	20.819	23.344	25.947	28.621	31.361	34.165	37.027	39.944	42.915
1	9.513	11.909	14.473	17.181	20.013	22.957	26.001	29.137	32.355	35.651	39.018	42.452	45.948	49.503	53.114	56.778
2	12.979	16.068	19.325	22.726	26.252	29.889	33.626	37.454	41.366	45.355	49.415	53.542	57.732	61.980	66.284	70.641
3	15.006	18.501	22.164	25.970	29.901	33.943	38.086	42.320	46.637	51.031	55.497	60.030	64.625	69.278	73.988	78.750
4	16.444	20.227	24.177	28.271	32.490	36.820	41.251	45.772	50.377	55.059	59.812	64.632	69.515	74.457	79.454	84.503
5	17.560	21.566	25.739	30.056	34.498	39.052	43.705	48.450	53.278	58.183	63.160	68.203	73.309	78.473	83.693	88.966
6	18.472	22.660	27.016	31.515	36.139	40.875	45.711	50.638	55.648	60.735	65.894	71.120	76.408	81.755	87.158	92.613
7	19.242	23.585	28.095	32.748	37.527	42.416	47.406	52.488	57.652	62.894	68.207	73.586	79.029	84.530	90.086	95.696
8	19.910	24.386	29.029	33.816	38.728	43.752	48.875	54.090	59.388	64.763	70.210	75.723	81.299	86.933	92.624	98.366
9	20.499	25.093	29.854	34.759	39.788	44.930	50.171	55.503	60.919	66.412	71.976	77.607	83.301	89.053	94.861	100.722
10	21.026	25.725	30.591	35.601	40.737	45.983	51.330	56.768	62.289	67.887	73.557	79.293	85.092	90.950	96.863	102.829
11	21.502	26.297	31.259	36.364	41.594	46.936	52.378	57.911	63.528	69.221	74.986	80.818	86.712	92.665	98.674	104.735
12	21.937	26.819	31.868	37.060	42.378	47.806	53.335	58.956	64.659	70.440	76.292	82.210	88.192	94.232	100.327	106.476
13	22.338	27.299	32.428	37.700	43.098	48.607	54.216	59.916	65.700	71.560	77.492	83.491	89.552	95.672	101.848	108.077
14	22.708	27.744	32.947	38.293	43.765	49.348	55.031	60.805	66.663	72.598	78.604	84.677	90.812	97.006	103.256	109.559
15	23.053	28.158	33.430	38.845	44.386	50.038	55.790	61.633	67.560	73.564	79.639	85.781	91.985	98.248	104.567	110.939

Рис. 3. Таблицы со значениями степени комбинаторного наполнения для кубического и симплициального разбиений; помечены примерные границы возможностей обработки объектов (размерности n и радиуса r) для современных суперкомпьютеров

Об алфавите для Q_r^n при больших n и r . При больших r может возникнуть вопрос о буквенном (символьном) наполнении алфавита для биективного кодирования, поскольку букв в таком алфавите должно быть $br + 1$, а именно $2r$ букв для отрезков, $2r + 1$ для точек (концов отрезков) и $2r$ для расстояний между точками и отрезками. Поскольку вышеизложенное в основном касалось одного n -куба, естественным было бы под троичным кодированием подразумевать алфавит $\{0, 1, 2\}$, а под четверичным $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$. Однако с тем же успехом могли быть использованы другие буквы, для которых таблица поразрядного умножения была бы перекодирована простой заменой букв одного алфавита на буквы другого алфавита,

вероятно потеряв наглядность при объяснении самого метода кодирования (что для компьютера безразлично).

Для случая Q_r^n необходим более универсальный способ кодирования. В качестве советчика по кодированию призовем здесь методы кодирования ДНК (биологической природы), когда аминокислоты кодируются 3-связками (кодонами) из четырех букв, однозначно соответствующих нуклеотидам [6]. Пусть наш алфавит состоит из составных букв следующего вида: $(i + \text{целое со знаком})$ — для отрезков, $(p + \text{целое со знаком})$ — для точек, $(d + \text{целое, всегда положительное})$ — для расстояний и просто целое — для номеров базисных векторов. Пусть все целые представлены в десятичной системе счисления с числом q десятичных разрядов, таким, что $q = \max\{[n]; [r]\}$. Дополнительными символами-разделителями являются: $\langle \rangle$ — начало и конец одного кубанта или симпанта; $/$ — разделитель в записи симпанта между буквами кубанта и числами, определяющими порядок симплициального обхода, “,” — для разделения букв в слове. Приведем для примера вид одного из симпантов для 4-симплекса в Q_7^6 :

$$W = \langle i - 7, i + 5, p + 6, p - 3, i - 4, i + 4 / 5, 1, 2, 6 \rangle.$$

В частности, для симплексов рис. 1 симпанты в предложенной кодировке будут иметь следующий вид:

$$W_1 = \langle 002121102 / 9, 3, 5 \rangle \rightarrow \langle p + 0, p + 0, i + 1, p + 1, i + 1, p + 1, p + 1, p + 0, i + 1 / 9, 3, 5 \rangle,$$

$$W_2 = \langle 222222222 / 7, 6, 4, 9, 3, 5, 1, 2, 8 \rangle \rightarrow \langle i + 1, i + 1, \dots, i + 1 / 7, 6, 4, 9, 3, 5, 1, 2, 8 \rangle.$$

Такая кодировка остается инвариантной для этих симплексов при сколь угодно большом r в Q_r^n .

Заключение. Вышеизложенное есть краткое описание части математического обеспечения инструментального комплекса под общим названием “Топологический процессор”, программное обеспечение которого развивается на суперкомпьютере МГУ “Чебышев” с 2008 г. Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Садовничему, В. П. Маслову, Л. Н. Королеву, А. В. Тихонравову и А. Н. Томилину за поддержку работ по тематике супервычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков С. П. Топология. Москва; Ижевск: РХД, 2002.
2. Долбильин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Кубические многообразия в решетках // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. **58**, вып. 2. 93–107.
3. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
4. Manin Yu. I. Classical computing, quantum computing and Shor's factoring algorithm. 1999 (available at arXiv:quant-ph/9903008v1).
5. Gromov M., Guth L. Generalizations of the Kolmogorov–Barzdin embedding estimates. 2011 (available at arXiv:1103.3423v1 [math.GT]).
6. Crick F. H., Barnett L., Brenner S., Watts-Tobin R. J. General nature of the genetic code for proteins // Nature. 1961. **192**. 1227–1232.
7. Рябов Г. Г. О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 2. 154–161.
8. Рябов Г. Г. Хаусдорфова метрика на гранях n -мерного куба // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. **16**, № 1. 151–155.
9. Рябов Г. Г., Серов В. А. О метрико-топологических вычислениях в конструктивном мире кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 2. 146–155.

Поступила в редакцию
12.06.2012