

УДК 519.622

ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ СЛАБОЛИНЕЙНОГО РЕЖИМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д. А. Грачев¹, А. Г. Жданов¹

Рассматриваются некоторые нелинейные уравнения, в рамках которых на начальной стадии воспроизводятся эффекты перемежаемости. Исследован вопрос о минимальном числе независимых реализаций, которое необходимо для моделирования статистических моментов решений; показано, что с развитием нелинейности оно быстро уменьшается.

Ключевые слова: уравнения со случайными коэффициентами, перемежаемость, статистический момент.

1. Введение. Исследование эволюционных уравнений со случайными коэффициентами нередко сопряжено с рядом проблем, принципиально ограничивающих возможности аналитической теории. Как правило, это обусловлено асимптотическим характером последней, когда результаты формулируются в виде некоторых предельных утверждений, из которых совершенно неясно, начиная с каких значений асимптотического параметра они справедливы. Одним из фундаментальных параметров подобного рода является минимальный объем выборки независимых случайных реализаций решения, требуемый для исследования его среднего и высших статистических моментов.

Хорошо известно, что проблема объема выборки тесно связана с явлением перемежаемости [1–4]. Это явление заключается в появлении чрезвычайно редких, но при этом аномально быстро растущих реализаций, определяющих формирование среднего решения и его моментов высшего порядка. В недавнем цикле работ [5–8] свойства перемежаемости исследовались в рамках следующих двух простых модельных уравнений с коэффициентами в виде случайных процессов с обновлением:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y(x), \quad y(0) = 1, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + K(x)y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (2)$$

Эти уравнения (второе из них носит название уравнения Якоби) возникают в магнитной гидродинамике при изучении лагранжева решения уравнения индукции [5, 8]. Уравнения (1) и (2) соответствуют случаю конечного корреляционного времени среды, когда лагранжево решение формируется в виде произведения статистически независимых операторов, действующих на начальное условие [4, 8]. В зависимости от коммутационных свойств этих операторов поведение лагранжева решения можно рассматривать в контексте противопоставления свойств произведений случайных чисел и случайных матриц. При условии обновления (определение см. ниже) процесса $a(x) = a(x, \omega)$ решение уравнения (1) формируется как произведение независимых случайных чисел (а именно, случайных экспонент [8, 9]), тогда как решение уравнения Якоби при аналогичном условии на $K(x) = K(x, \omega)$ формируется как произведение независимых случайных 2×2 -матриц [5–7].

Центральным результатом численного моделирования, проведенного в работах [5–8], являются полученные оценки минимальных объемов выборки независимых реализаций решений уравнений (1) и (2), необходимых для нахождения их статистических моментов. Эти объемы неожиданно оказались чрезвычайно большими: так, для воспроизведения предсказанного теорией прогрессивного роста моментов решения уравнения (1) требуется усреднить порядка 1000 реализаций, тогда как для уравнения Якоби соответствующий объем выборки составляет еще большее значение — около 5×10^5 . На сегодняшний день такое колоссальное число статистически независимых реализаций явно недостижимо в прямом численном эксперименте при моделировании соответствующих трехмерных аналогов (в частности, это касается уравнения индукции в задаче турбулентного динамо [5]).

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; Д. А. Грачев, науч. сотр., e-mail: dengrac@mail.ru; А. Г. Жданов, науч. сотр., e-mail: alexander.zhdanov@gmail.com

Цель настоящей статьи состоит в исследовании реализаций и статистических моментов лагранжева решения на нелинейном режиме. Чтобы можно было сравнить наши результаты с полученными ранее результатами, мы вводим нелинейность непосредственно в модельные уравнения (1) и (2), при этом нелинейность полагается степенной [1].

Ключевым результатом статьи, позволяющим, по мнению авторов, более обоснованно планировать дальнейшее численное изучение лагранжевых решений, является оценка соотношения минимальных объемов выборки, требуемых в численном эксперименте в линейном и нелинейном случаях. Оказалось, что для исследования моментов решений линейных задач необходимо существенно большее число независимых случайных реализаций, чем для нелинейных. В этом смысле численное моделирование первых оказывается гораздо сложнее, чем численное моделирование вторых.

2. Постановка задач. Модель случайного процесса с обновлением. Мы исследуем интересующий нас круг вопросов в рамках задач

$$y'' + \frac{K(x)}{1 + y^2} y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = \mu, \tag{3}$$

$$y' = \frac{a(x) + k}{1 + y^2} y, \quad y(0) = \mu, \quad k = \text{const}, \tag{4}$$

$$y' = \frac{a(x)}{1 + y^2} y + ky, \quad y(0) = \mu, \quad k = \text{const}, \tag{5}$$

которые получаются из задач Коши (2) и (1) добавлением членов со степенной нелинейностью и стабилизационного члена ky соответственно. Варьируя параметры μ и k , мы рассмотрим поведение типичных реализаций и статистических моментов решений. В частности, мы отдельно исследуем случай $0 < \mu \ll 1$, который интересен тем, что позволяет обнаружить подавление эффектов перемежаемости при переходе начального линейного (неустойчивого) режима в нелинейный.

Численное изучение задач (3)–(5) требует конструктивного описания случайных процессов $a(x)$ и $K(x)$. Мы выбираем это описание, ориентируясь на модель, в равной степени удобную как для аналитических исследований, так и для численного эксперимента (а именно, на модель процесса с обновлением). В этой модели предполагается, что случайный процесс теряет память в дискретных точках x , разделенных интервалом δ . Параметр δ , который используется в качестве масштабной единицы, называется корреляционной длиной, сам же отрезок принято называть интервалом обновления.

Для простоты корреляционную длину δ мы полагаем фиксированной и равной 1. При этом мы считаем, что коэффициенты $a(x)$ и $K(x)$ имеют нулевые средние и принимают между точками обновления $x_n = n$ постоянные значения: $K(x) \equiv K_n$ и $a(x) \equiv a_n$ при $x_{n-1} \leq x < x_n$. Тем самым, процессы $K(x)$ и $a(x)$ сводятся к последовательностям независимых одинаково распределенных случайных величин $\{K_n\}$ и $\{a_n\}$. Следуя работам [5–9], мы ради определенности выбираем для них равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$. Кроме того, в качестве разностной схемы выбирается метод Рунге–Кутты второго порядка, а поведение реализаций и моментов решений мы рассматриваем в точках обновления.

В ходе численного эксперимента в качестве генератора случайных чисел мы используем генератор, встроенный в язык Visual C++ (версия 6.0). Он дает цепочку псевдослучайных чисел с периодом повторения 2^{32} , что существенно превосходит наши потребности для моделирования задач (3)–(5).

3. Результаты численного моделирования. Прежде всего, рассмотрим поведение типичных реализаций решений.

Начнем с начальной задачи (3) для нелинейного уравнения со второй производной. Ранее для решения соответствующего линейного уравнения (2) аналитически удалось установить экспоненциальный рост типичной реализации [10], который затем был подтвержден численным экспериментом [7]. Чтобы проверить, что решение задачи (3) на начальном этапе воспроизводит данное свойство решения уравне-

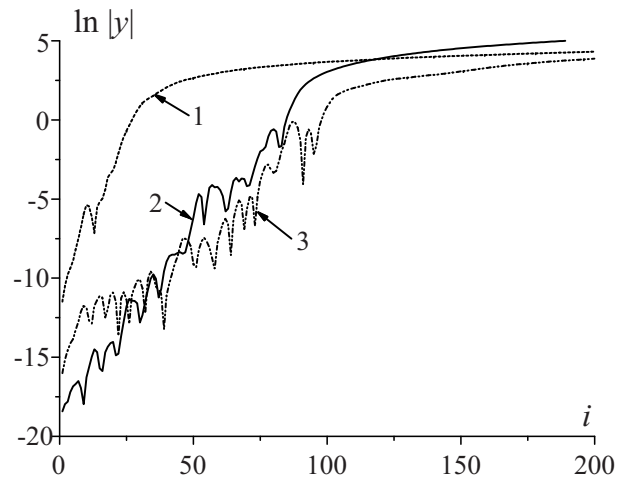


Рис. 1. Типичные реализации решения начальной задачи (3) при 1) $\mu = e^{-13}$, 2) $\mu = e^{-17}$, 3) $\mu = e^{-19}$

ния Якоби, мы выбрали малые значения параметра μ (e^{-13} , e^{-17} и e^{-19}) и построили для каждого из этих значений соответствующую реализацию (рис. 1). Видно, что при $y \ll 1$ величина $\ln |y|$ растет практически линейно. При этом, как и следовало ожидать, длина участка экспоненциального роста увеличивается с уменьшением μ . Начиная с масштабов порядка единицы, в (3) начинает доминировать нелинейность знаменателя $1 + y^2$, экспоненциальный рост решения прекращается и начальный линейный режим переходит в нелинейный.

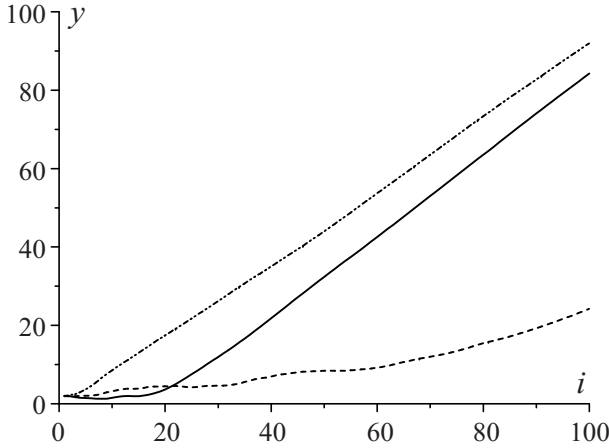


Рис. 2. Типичные реализации решения начальной задачи (3) при $\mu = 2$

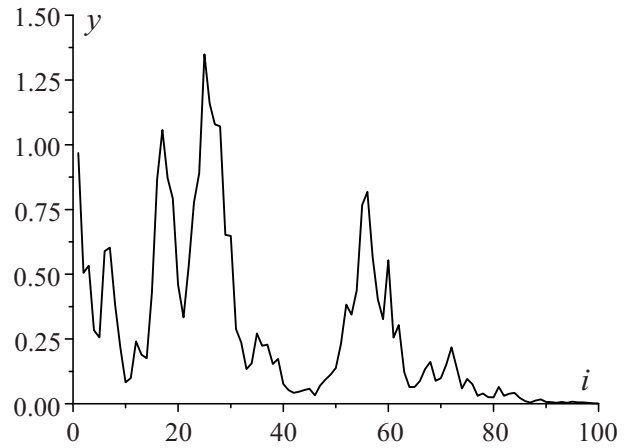


Рис. 3. Типичная реализация решения задачи (4) (первый тип реализаций) при $k = 0$ и $\mu = 1$

На рис. 2 продемонстрировано поведение y на “больших” масштабах (мы положили $\mu = 2$). Как мы видим, реализации решения напоминают прямые (точнее говоря, отрезки прямых разного наклона). Интерпретировать такой вид реализаций можно следующим образом: если решение растет до “больших” значений $|y| \gg 1$, то его вторая производная стремится к нулю (как следует из (3), $y'' \sim -K/y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$). Как известно, решением уравнения $y'' = 0$ является семейство прямых, причем в нашем случае в силу $y'' \sim -K/y$ эти прямые имеют случайный угловой коэффициент. Отметим, что отрезки, отвечающие некоторым прямым случайного наклона, могут быть весьма протяженными (на рис. 2 показаны две подобные реализации).

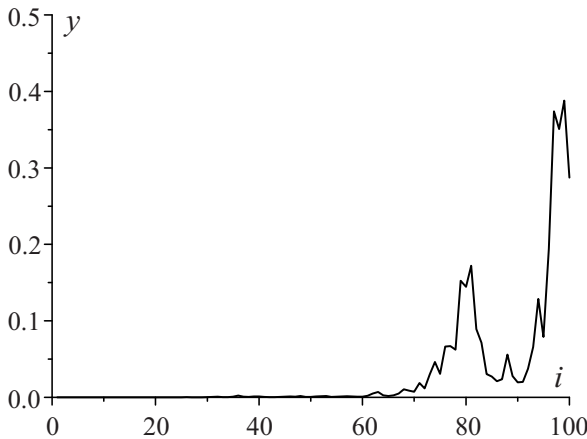


Рис. 4. Типичная реализация решения задачи (4) (второй тип реализаций) при $k = 0$ и $\mu = 0.001$

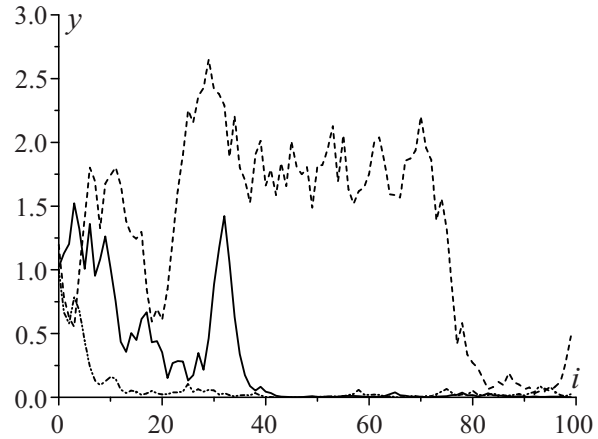


Рис. 5. Типичные реализации решения задачи (5) при $k = -0.02$ и $\mu = 1$

Обратимся к типичным реализациям решений задач (4) и (5) (на рис. 3 и 4 построены соответствующие графики для случая $k = 0$). Видно, что реализации решения могут как стабилизироваться (т.е. $y(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$), так и демонстрировать неограниченный рост. Оказалось, что в случае $k < 0$ в основном преобладают реализации первого типа, тогда как в случае $k > 0$ — второго. Получившиеся при этом графики аналогичны рис. 3 и 4 и потому отдельно не приводятся. Некоторый интерес представляет лишь случай $k < 0$ для (5) — как оказалось, время выхода типичной реализации решения на асимптотику стабилизации $y_{st} = 0$ лежит в весьма широких пределах — от 10 до 100 интервалов обновления (рис. 5), тогда как соответствующее время при $k < 0$ для (4) составляет около 100 интервалов обновления.

Перейдем к рассмотрению статистических моментов. Чтобы обнаружить на линейном режиме эффекты перемежаемости, мы воспроизвели 5×10^5 независимых реализаций решений и, усреднив эти реализации, построили среднее и последующие моменты, вплоть до момента шестого порядка (рис. 6–8). Параметры μ и k при этом выбирались следующим образом: для начальной задачи (3) мы положили $\mu = e^{-12}$, а для задачи (4) — $\mu = e^{-5}$ и $k = 0$. Такой выбор параметров позволяет, с одной стороны, рассмотреть переход линейного режима в нелинейный (это обеспечивается “малостью” начального условия $y(0) = \mu$), а с другой — позволяет сравнивать поведение моментов решений линейного и нелинейного уравнений (поскольку моделирование (1) в [8] проводилось при $\bar{a} = 0$, то корректное сравнение численных результатов для нелинейной задачи (4) с результатами для соответствующей линейной возможно лишь при $k = 0$). Кроме явления перемежаемости, характерного для линейного режима, нас также интересует асимптотическое влияние стабилизации на поведение моментов. Подобный режим рассмотрен для (5) при $k = -0.02$ и $\mu = 1$.

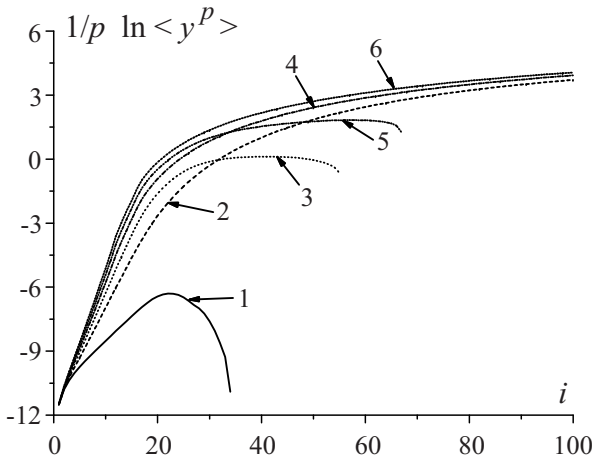


Рис. 6. Статистические моменты $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$ решения (3), построенные для 5×10^5 реализаций:
 1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$;
 5) $p = 5$; 6) $p = 6$

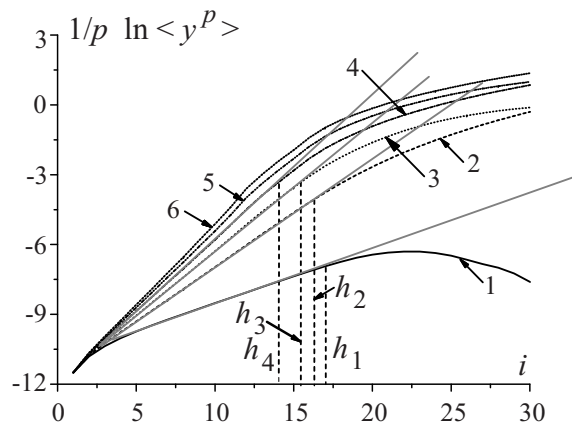


Рис. 7. Статистические моменты $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$ решения (3) с выделенными участками экспоненциального роста: 1) $p = 1$;
 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$;
 5) $p = 5$; 6) $p = 6$

На рис. 6 и 7 видно, что на начальном этапе моменты решения (3), как и моменты решения уравнения Якоби [7], экспоненциально растут, причем скорость экспоненциального роста увеличивается с номером момента. Как и в линейном случае, с увеличением x этот рост замедляется, причем точка начала замедления h_p , где p — порядковый номер статистического момента, удаляется от начала координат с уменьшением номера момента (рис. 7). Нелинейный режим обнаруживает себя тем, что прогрессивный рост статистических моментов на нем прекращается, а у моментов нечетных порядков появляются характерные “завалы” (рис. 6).

Начальный прогрессивный рост моментов решения (4) при $\mu \ll 1$ также удается обнаружить в рамках численного эксперимента, см. рис. 8. Заметим, что нечетные моменты решения (4), в отличие от (3), на нелинейном режиме продолжают расти, причем этот рост обнаруживается даже тогда, когда усредняется порядка 100 независимых реализаций решения (4). Однако такого объема выборки недостаточно, чтобы обнаружить перемежаемость на линейном режиме: как и для уравнения (1), для (4) требуется усреднить порядка 10^3 реализаций, чтобы зафиксировать начальный прогрессивный рост статистических моментов.

Рисунок 9, полученный усреднением 500 реализаций, иллюстрирует влияние стабилизации на поведение статистических моментов решения задачи (5). Видно, что рост, характерный для начального этапа, затем сопровождается убыванием, причем длина участка возрастания и точка максимума кривой увеличиваются с увеличением порядкового номера момента. Подобное поведение объясняется спецификой времени выхода типичной реализации решения задачи (5) на асимптотику стабилизации $y_{st} = 0$. Как мы видели из рис. 5, указанное время лежит в весьма широком диапазоне, верхняя и нижняя границы которого отличаются на порядок. Таким образом, можно сказать, что чем выше номер момента, тем большее влияние на его поведение оказывают реализации с увеличенным временем выхода на асимптотику. В связи с этим отметим также, что у среднего решения (5) участок возрастания практически отсутствует и оно почти сразу начинает убывать.

Подытоживая результаты численного моделирования статистических моментов, еще раз обратим вни-

мание на то, что с развитием нелинейности они продолжают расти, хотя этот рост и не такой интенсивный, как на начальном этапе (рис. 6 и 8). Таким образом, выход нелинейного режима на стационарное финальное распределение обнаружить не удастся.

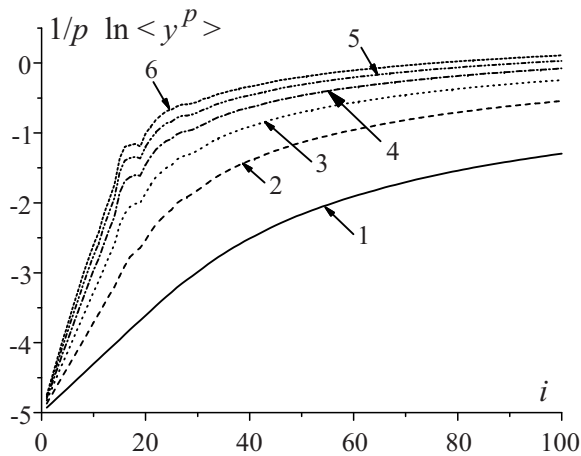


Рис. 8. Статистические моменты $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$ решения (4), построенные для 5×10^5 реализаций:
1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$;
5) $p = 5$; 6) $p = 6$

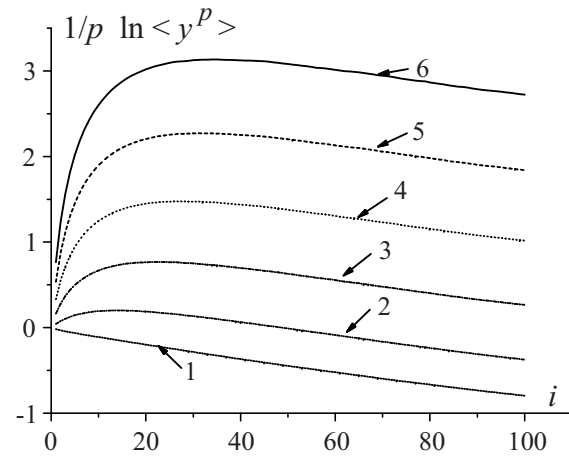


Рис. 9. Статистические моменты $\ln \langle y^p \rangle^{1/p}$ решения (5), построенные для 500 реализаций:
1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$;
5) $p = 5$; 6) $p = 6$

4. Обсуждение. Концепция лагранжева решения, состоящая в переходе от уравнений в частных производных к уравнениям с обычными производными, хорошо зарекомендовала себя и потому широко используется в приложениях, в частности в задачах магнитной гидродинамики. Однако проведенное численное моделирование моментов решений начальных задач (3) и (4) показало, что в рамках лагранжева подхода не удастся обнаружить выход нелинейного режима на стационарное финальное распределение (моменты продолжают расти, хотя и не так быстро, как на линейном этапе). Данное обстоятельство указывает на то, что адекватность лагранжева приближения реальным физическим задачам все же не беспредельна, поскольку обычно именно нелинейность является стабилизирующим фактором, предотвращающим неограниченный рост соответствующей величины и ее статистических средних [1, 2].

В ходе численного эксперимента установлено также, что с развитием нелинейности быстро уменьшается объем выборки независимых случайных реализаций, необходимый для построения статистических моментов решения. Тот факт, что численное моделирование моментов решений линейных уравнений (1) и (2) требует гораздо большего числа реализаций, чем моделирование моментов решений более сложных нелинейных задач (3)–(5), представляется нам весьма нетривиальным обстоятельством. Конечно, рискованно предполагать, что рассмотренные в настоящей работе простейшие лагранжевы модели отражают все особенности численного исследования более сложных (в частности, трехмерных) аналогов. Однако вполне естественно считать, что изучение последних с точки зрения численного эксперимента никак не проще, чем изучение уравнений (1)–(5). По-видимому, вопрос о соотношении минимальных объемов выборки, необходимых для численного моделирования моментов решений линейных и нелинейных стохастических уравнений, еще не раз возникнет в дальнейшем и потребует более глубокого и пристального анализа.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Д. Д. Соколову за прочтение рукописи и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. The almighty chance. Singapore: World Scientific, 1991.
2. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // Успехи физич. наук. 1987. **152**, № 1. 3–32.
3. Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1988. **7**. 1–110.
4. Молчанов С.А., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Кинематическое динамо в случайном потоке // Успехи физич. наук. 1985. **145**, № 4. 593–628.
5. Artyushkova M.E., Sokoloff D.D. Modelling small-scale dynamo by the Jacobi equation // Magnetohydrodynamics. 2006. **42**, № 1. 3–19.

6. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование распределения сопряженных точек на геодезической со случайной кривизной // Вычислительные методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 172–177.
7. *Артюшкова М.Е., Соколов Д.Д.* Численное моделирование решений уравнения Якоби на геодезической со случайной кривизной // Астрон. ж. 2005. **82**, № 7. 584–589.
8. *Грачев Д.А., Соколов Д.Д.* Численное моделирование роста мультипликативных случайных величин // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 5–9.
9. *Грачев Д.А.* О соотношении между аналитическим и численным подходами к исследованию стохастических дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 2. 85–89.
10. *Ламбурт В.Г., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Матем. заметки. 2003. **74**, № 3. 416–424.

Поступила в редакцию
06.06.2012
