УДК 519.634

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОКЕАНА

А. В. Друца[1]

Предложен алгоритм решения разностной схемы, аппроксимирующей уравнения крупномасштабной динамики океана со вторым порядком по пространственным переменным. Приведены результаты численных экспериментов по практической оценке порядка сходимости данной схемы. Показано, что полученная численная оценка не только согласуется с известным ранее теоретическим результатом, но и показывает его неулучшаемость по порядку. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11–01–00767-а).

Ключевые слова: примитивные уравнения, уравнения динамики океана, нелинейные уравнения в частных производных, конечно-разностные схемы, сходимость.

1. Введение. В работах [1, 2] доказана сходимость решений разностной схемы, аппроксимирующей уравнения крупномасштабной динамики океана [3, 4] в единичном кубе со вторым порядком по пространственным переменным, к решению дифференциальной задачи. А именно показано, что для решений линеаризованной разностной схемы, которая аппроксимирует систему уравнений в единичном кубе с порядком $O\big(\tau+h^2\big)$ на сетках, аналогичных сеткам Лебедева [5], имеет место сходимость к точному решению дифференциальной задачи с порядком $O\big(\tau + h^{3/2}\big)$ в сеточной норме $\left(\max\limits_{0\leqslant m\leqslant M}\big\|u^m\big\|^2 + \tau\sum\limits_{m=0}^{M}\big\|u_x^m\big\|^2\right)^{1/2}$; здесь $u^m = u(\tau m) = (u_1, u_2)$ — горизонтальная компонента вектора скорости на сетке на временно́м слое $t = \tau m$, $\|v_x\|$ — сеточная норма L_2 сеточного градиента v, τ — шаг сетки по времени и h — шаг сетки по пространственным переменным (см. ниже теорему о сходимости).

Следует отметить, что указанный выше результат является первым полным теоретическим обоснованием корректности одной из разностных схем, аппроксимирующих уравнения динамики океана, за все время применения численных методов в практике решения данных уравнений. Доказать сходимость удалось на основе работ последних лет [6–11], в которых были получены априорные оценки для примитивных уравнений, а также доказано существование решения “в целом”. При доказательстве сходимости использовалась техника, заложенная в работах Г. М. Кобелькова [6–8], а также примененная в работах А. В. Друцы [10, 11].

В настоящей статье приводится подробное описание проведенных автором численных экспериментов, результаты которых полностью согласуются с доказанным утверждением о сходимости. Более того, ряд численных экспериментов показал, что, по-видимому, порядок сходимости нельзя улучшить несмотря на то, что разность в приведенных порядках аппроксимации и сходимости по пространственным переменным равна 1/2.

2. Дифференциальная задача и ее аппроксимация.

2.1. Система уравнений крупномасштабной динамики океана. Будем рассматривать область $\Omega = [0,1]^3$ — единичный куб, а также двумерную область $\Omega' = [0,1]^2$. Пронумеруем направления осей координат x, y, z через 1, 2, 3. Пусть Σ_k, $k = 1,2,3,$ — объединение двух граней куба Ω, перпендикулярных направлению k. Таким образом, $\partial\Omega = \Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$. Иначе говоря, Σ_k — это три пары параллельных граней куба Ω. Кроме того, введем дополнительные обозначения: $S = \Sigma_1\cup\Sigma_2$ — боковая поверхность и $S_1 \equiv \Sigma_3$ — объединение верхнего и нижнего оснований куба Ω. Через $Q_T \equiv \Omega\times[0,T]$ будем обозначать цилиндр по времени.

Для обозначения трех независимых пространственных переменных будем использовать как обозначение $x = (x_1, x_2, x_3)$, так и обозначение (x, y, z). Через $x' = (x_1, x_2)$ будем обозначать первые две (горизонтальные) переменные.

Пусть $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2, U_3)$ — вектор скорости, а $U = (U_1, U_2)$ — его горизонтальные компоненты, P и R — давление и плотность соответственно. Тогда система крупномасштабной динамики океана (*примитивных*

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; мл. науч. сотр., e-mail: adrutsa@yandex.ru

уравнений [3, 4, 9, 6]), рассматриваемая в области Q_T, состоит из одного векторного уравнения и трех скалярных уравнений:

$$\mathfrak{U}(U, \boldsymbol{U}, P) \equiv \partial_t U - \nu\Delta U + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)U + \ell U + \nabla' P = f^U, \tag{2.1}$$
$$\partial_z P = -gR, \tag{2.2}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \tag{2.3}$$
$$\mathfrak{R}(R, \boldsymbol{U}) \equiv \partial_t R - \nu_1\Delta R + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)R = f^R. \tag{2.4}$$

Здесь $f^U = \big(f_1^U, f_2^U\big)(x,t)$ и $f^R = f^R(x,t)$ — гладкие функции, $\nabla' = (\partial_1, \partial_2)$ — двумерный градиент, ν, ν_1, $g > 0$ — вещественные константы, ℓ — ограниченный линейный кососимметричный оператор вида $\ell U = \omega(U_2, -U_1)$, где $\omega = \mathrm{const}$.

Уравнения (2.1)–(2.4) дополняются следующими граничными условиями:

$$U\cdot n = 0, \quad \nabla_n U\times n = 0, \quad \nabla_n R = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{2.5}$$
$$U_3 = 0, \quad \partial_z U = 0, \quad \partial_z R = 0 \quad \text{на} \quad S_1. \tag{2.6}$$

Здесь n — вектор нормали к поверхности S, $\nabla_n = n\cdot\nabla'$ — производная вдоль нормали, $a\times b = a_1b_2 - a_2b_1$. Кроме того, примем следующие начальные условия:

$$U(x,0) = U_0(x), \quad R(x,0) = R_0(x), \quad \int\limits_0^1 \operatorname{div}' U_0\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.7}$$

Здесь $\operatorname{div}' = \nabla'\cdot$ — двумерная дивергенция. Для обобщенного решения рассматриваемой системы уравнений доказана теорема существования и единственности [6–8, 9–11].

2.2. Сетка, сеточные функции и операторы. Прежде чем перейти к построению разностной схемы для системы уравнений крупномасштабной динамики океана, введем сетку на области Ω, определим сеточные функции и операторы, а также рассмотрим основные используемые обозначения.

Замечание 1. Здесь и далее мы будем обозначать одинаково как саму гладкую функцию, так и ее проекцию на сетку. Кроме того, чтобы не загромождать обозначения, сеточные разностные операторы будут обозначаться так же, как и их дифференциальные аналоги. При этом указанные упрощения не должны вызвать путаницы, поскольку из контекста в каждой формуле будет всегда однозначно понятно, где стоит дифференциальный оператор, а где — разностный, где гладкая функция, а где — ее проекция.

2.2.1. Сетки. Разобъем область Q_T на $M+1$ временно́й слой. Данное разбиение задаст стандартную равномерную сетку по времени с шагом $\tau = T/M$. Всегда далее будем считать, что сеточные функции и сеточные операторы рассматриваются на каком-то фиксированном временно́м слое $t = m\tau$, если не оговорено противное. При этом с помощью значка $\widehat{\cdot}$ ($\widehat{u}$, $\widehat{r}$ и т.д.) будем обозначать срез сеточных функций на следующем временно́м слое (при $t = (m+1)\tau$).

Сетку по времени обозначим через $\mathbb{T} = \big\{m\tau \mid m\in[0, M)\cap\mathbb{Z}\big\}$, $\overline{\mathbb{T}} = \mathbb{T}\cup\{T\}$.

Теперь перейдем к построению сетки по пространственным переменным. Введем параметр шага сетки $h = 1/N$ и равномерно разобъем область Ω на N^3 кубиков со стороной h. Их вершины будут образовывать узлы $\Omega_h = \big\{x = (ih, jh, kh)\,|\, 0\leqslant i, j, k\leqslant N\big\}$. Через $\overline{\Omega}_h^k$, $k = 1,2,3$, будем обозначать сеточную область, полученную сдвигом Ω_h в направлениях $l\neq k$ на $h/2$ и добавлением узлов на границе так, чтобы $\overline{\Omega}_h^k$ была симметрична относительно центра Ω. Иными словами,

$$\overline{\Omega}_h^1 = \big\{x = (ih, jh + h/2, kh + h/2)\,|\, 0\leqslant i\leqslant N,\ -1\leqslant j, k\leqslant N\big\},$$
$$\overline{\Omega}_h^2 = \big\{x = (ih + h/2, jh, kh + h/2)\,|\, 0\leqslant j\leqslant N,\ -1\leqslant i, k\leqslant N\big\},$$
$$\overline{\Omega}_h^3 = \big\{x = (ih + h/2, jh + h/2, kh)\,|\, 0\leqslant k\leqslant N,\ -1\leqslant i, j\leqslant N\big\}.$$

Нетрудно заметить, что в $\overline{\Omega}_h^k$, $k = 1,2,3$, входят центры граней кубиков сетки Ω_h, параллельных границе Σ_k. Введем еще одну сеточную область $\overline{\mho}_h = \big\{x = (ih + h/2, jh + h/2, kh + h/2)\,|\, -1\leqslant i, j, k\leqslant N\big\}$, которая содержит центры кубиков сетки Ω_h. Помимо трехмерных сеток введем двумерную сетку на Ω': $\overline{\mho}'_h = \big\{x' = (ih + h/2, jh + h/2)\,|\, -1\leqslant i,\ j\leqslant N\big\}$.

Обозначим через Ω_h^k, $k = 1,2,3$, $\mho_h$ и $\mho'_h$ внутренние точки сеток $\overline{\Omega}_h^k$, $k = 1,2,3$, $\overline{\mho}_h$ и $\overline{\mho}'_h$ соответственно. Граничные точки сетки Ω_h^k, $k = 1,2,3$, будем обозначать через Σ_{lh}^k для каждого направления

$l = 1, 2, 3$ по аналогии с непрерывным случаем: для каждого $k \in \{1, 2, 3\}$ и каждого $l \in \{1, 2, 3\}$ все точки Σ_{lh}^k лежат в двух плоскостях, перпендикулярных оси направления l. Помимо этого, введем еще один набор сеток на границе Σ_l, $l = 1, 2, 3$. А именно, через Γ_{lh}^k, $l \neq k$, будем обозначать сеточную границу, полученную сжатием множества точек Σ_{lh}^k вдоль оси направления l относительно центра Ω в $1 + h$ раз. Иными словами, каждая из двух плоскостей, в которых лежат узлы Σ_{lh}^k, смещена ближе к центру Ω на $h/2$. Таким образом, множеству Γ_{lh}^k принадлежат середины ребер кубиков сетки Ω_h, перпендикулярные оси x_k и лежащие на границе Σ_l. Всю описанную совокупность сеточных областей и границ, построенных в четырехмерном пространстве, для краткости обозначим через $Q_M^{h,\tau}$.

2.2.2. Сеточные функции и пространства. Теперь перейдем к определению сеточных функций. Скалярные сеточные функции p будут определяться в узлах $\overline{\mho}_h$, их линейное пространство обозначим через $\overline{\mathcal{P}}^h = \{p \,|\, p : \overline{\mho}_h \to \mathbb{R}\}$.

Векторнозначные сеточные функции $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ представляют собой тройку скалярных сеточных функций u_k, $k = 1, 2, 3$, каждая из которых определена на своей сетке Ω_h^k. Линейное пространство таких вектор-функций будем обозначать через $\overline{\mathcal{U}}^h = \Big\{\boldsymbol{u} \big| \boldsymbol{u} : \big(\overline{\Omega}_h^1 \to \mathbb{R}\big) \times \big(\overline{\Omega}_h^2 \to \mathbb{R}\big) \times \big(\overline{\Omega}_h^3 \to \mathbb{R}\big)\Big\}$. Векторнозначные сеточные функции, состоящие из первых двух компонент $\boldsymbol{u}$, будем обозначать через u — той же буквой, но неполужирной, а их линейное пространство — через $\overline{\mathcal{U}}'^h$. Множества скалярных и векторнозначных функций, определенных только во внутренних узлах, будем обозначать через $\mathcal{P}^h, \mathcal{U}'^h$ и $\mathcal{U}^h$ соответственно.

Произведением $p \cdot q$ двух скалярных сеточных функций p и q будем считать скалярную сеточную функцию, которая равна произведению значений p и q в каждом узле сетки. При этом произведением $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ двух векторнозначных сеточных функций $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ будем считать *векторнозначную* сеточную функцию — покомпонентное произведение: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \equiv (u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2, u_3 \cdot v_3)$.

В настоящей статье используются сеточные нормы l_{2h}:

$$\|\zeta\| \equiv \|\zeta\|_{l_{2,h}(\bar{\Omega}_h)} = \Bigg(h^3 \sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \zeta^2(x)\Bigg)^{1/2}, \tag{2.8}$$

где здесь и далее $\overline{\Omega}_h$ — одна из введенных выше трехмерных сеточных областей (например, $\overline{\Omega}_h$, $\overline{\Omega}_h^k$, $\overline{\mho}_h$, ...). Таким образом, в обозначениях норм опускается сеточная область, по которой берется норма, поскольку сетку можно однозначно определить по функции, стоящей под нормой. По той же причине мы будем использовать одно и то же обозначение как для норм скалярных функций, так и для норм векторнозначных функций, последние из которых определяются аналогично (2.8). Кроме того, мы будем использовать сеточное скалярное произведение в пространстве l_{2h}: $(\zeta, \eta) \equiv (\zeta, \eta)_{l_{2h}(\overline{\Omega}_h)} = h^3 \sum\limits_{x \in \overline{\Omega}_h} \zeta(x)\eta(x)$.

Скалярное произведение векторнозначных сеточных функций по определению является суммой скалярных произведений компонент.

Замечание 2. Построенная выше сетка аналогична смещенным сеткам В. И. Лебедева, которые были впервые описаны в работе [5].

2.2.3. Сеточные операторы. Введем оператор усреднения в направлении i. Пусть ζ — некоторая скалярная сеточная функция, определенная на одной из введенных выше трехмерных сеточных областей $\overline{\Omega}_h$ ($\overline{\Omega}_h$, $\overline{\Omega}_h^k$, $\overline{\mho}_h$, ...). Тогда через $[\zeta]_{x_i}$ обозначим усреднение ζ на сетку, смещенную на $h/2$ относительно Ξ_h параллельно оси переменной x_i. А именно, значение $[\zeta]_{x_i}$ в узле новой сетки равно среднему арифметическому значений ζ в двух ближайших узлах вдоль направления i. Определим многомерные усреднения от скалярных и векторнозначных сеточных функций как $[\,\cdot\,] : \overline{\mathcal{P}}^h \to \mathcal{U}^h$, $\quad [p] = \big([p]_{x_1}, [p]_{x_2}, [p]_{x_3}\big)$ и $[\,\cdot\,] : \overline{\mathcal{U}}^h \to \mathcal{P}^h$, $\quad [\boldsymbol{u}] = [u_1]_{x_1} + [u_2]_{x_2} + [u_3]_{x_3}$.

Теперь рассмотрим разностные сеточные операторы градиента, дивергенции и Лапласа, которые здесь и далее будут обозначаться через ∇, div и Δ соответственно (как соответствующие дифференциальные аналоги). Поскольку сетки $\overline{\Omega}_h$, $\overline{\Omega}_h^k$, $\overline{\mho}_h$ изометричны (с точностью до граничных узлов), то операторы разделенных разностей первого ∇_{x_i} и второго Δ_{x_i} порядков могут быть легко и одинаково определены на каждой из сеток, $i = 1, 2, 3$. Используя эти разделенные разности, можно, в частности, определить стандартные операторы

$$\nabla : \overline{\mathcal{P}}^h \to \mathcal{U}^h, \quad \nabla p = (\nabla_{x_1} p, \nabla_{x_2} p, \nabla_{x_3} p), \qquad \operatorname{div} : \overline{\mathcal{U}}^h \to \mathcal{P}^h, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla_{x_1} u_1 + \nabla_{x_2} u_2 + \nabla_{x_3} u_3,$$

$$\Delta : \overline{\mathcal{U}}^h \to \mathcal{U}^h, \quad \Delta \boldsymbol{u} = \Delta_{x_1} \boldsymbol{u} + \Delta_{x_2} \boldsymbol{u} + \Delta_{x_3} \boldsymbol{u}, \qquad \Delta \ : \overline{\mathcal{P}}^h \to \mathcal{P}^h, \quad \Delta p = \Delta_{x_1} p + \Delta_{x_2} p + \Delta_{x_3} p.$$

Аналогичные операторы, действующие только в горизонтальной плоскости переменного x', будем обозначать через ∇', div' и Δ':

$$\nabla' : \overline{\mathcal{P}}^h \to \mathcal{U}'^h, \qquad \operatorname{div}' : \overline{\mathcal{U}}'^h \to \mathcal{P}^h, \qquad \Delta' : \overline{\mathcal{U}}'^h \to \mathcal{U}'^h.$$

Помимо перечисленных аппроксимаций элементарных дифференциальных операторов векторного анализа, нам необходимо ввести разностный аналог ковариантного дифференцирования. Для этого введем следующие нелинейные операторы:

$$\mathcal{M} : \overline{\mathcal{U}}^h \times \overline{\mathcal{P}}^h \to \mathcal{P}^h,\ \mathcal{M}(\boldsymbol{u}, p) = [\boldsymbol{u} \cdot \nabla p] \equiv \sum_{k=1}^{3} [u_k \cdot \nabla_k p]_{x_k},$$

$$\mathcal{N} : \overline{\mathcal{U}}^h \times \overline{\mathcal{U}}'^h \to \mathcal{U}'^h, \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, v) = \Big(\big[[\boldsymbol{U}]_{x_1} \cdot \nabla v_1\big], \big[[\boldsymbol{U}]_{x_2} \cdot \nabla v_2\big] \Big) \equiv \left(\sum_{k=1}^{3} \big[[u_k]_{x_1} \cdot \nabla_k v_1\big]_{x_k}, \sum_{k=1}^{3} \big[[u_k]_{x_2} \cdot \nabla_k v_2\big]_{x_k} \right).$$

2.3. Разностная схема. С учетом введенных обозначений рассмотрим неявную разностную схему для уравнений динамики океана, которая имеет вид

$$u_\tau - \nu \Delta \widehat{u} + \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, \widehat{u}) + \ell \widehat{u} + \nabla' \widehat{p} = f^U \quad \text{на} \quad \Omega_h^1 \times \Omega_h^2 \times \mathbb{T}, \tag{2.9}$$

$$\nabla_z p + g[r]_z = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_h^3 \times \overline{\mathbb{T}}, \tag{2.10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{на} \quad \mho_h \times \overline{\mathbb{T}}, \tag{2.11}$$

$$r_\tau - \nu_1 \Delta \widehat{r} + \mathcal{M}(\boldsymbol{u}, \widehat{r}) = f^R \quad \text{на} \quad \mho_h \times \mathbb{T}, \tag{2.12}$$

где f^U и f^R — проекции на сетку $Q_M^{h,\tau}$ правых частей дифференциальных уравнений (2.1) и (2.4) соответственно. Эти уравнения дополняются следующими граничными условиями:

$$u_k = 0, \quad \nabla_k r = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{k,h}^k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.13}$$

$$\nabla_i u_{3-i} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{ih}^{3-i}, \quad \nabla_3 u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{3h}^i, \quad i = 1, 2. \tag{2.14}$$

Начальные условия примем в виде

$$u(x, 0) = u_0(x) = U_0(x) + \delta U_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{\Omega}_h^1 \times \overline{\Omega}_h^2, \quad r(x, 0) = R_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{\mho}_h, \tag{2.15}$$

где $\delta U_0(x) = O\big(h^2\big)$, так что

$$\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{div}' u\big(x', nh + h/2, 0\big) = 0. \tag{2.16}$$

Здесь и далее оператор ℓ обозначает сеточный оператор вида $\ell \widehat{u} \equiv \omega\Big(\big[[\widehat{u}_2]_{x_1}\big]_{x_2}, -\big[[\widehat{u}_1]_{x_2}\big]_{x_1} \Big)$, который является кососимметричным [2]. Напомним еще раз, что здесь использовались следующие обозначения: $u \equiv u^m \equiv u(x, m\tau)$, $\widehat{u} \equiv u^{m+1}$, $u_\tau \equiv (\widehat{u} - u)/\tau$.

Рассмотренная разностная схема аппроксимирует задачу (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) с порядком $O\big(\tau + h^2\big)$. Кроме того, для нее имеет место следующая теорема о сходимости [1, 2].

Теорема. *Пусть решение исходной задачи* (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) *имеет четвертые ограниченные производные. Тогда решения разностных схем* (2.9)–(2.12), (2.13)–(2.15) *сходятся к решению примитивных уравнений* (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7) *с порядком* $O\big(\tau + h^{3/2}\big)$ *в норме* $\|\cdot\|_*$*, которая определяется равенством*

$$\big\|(u, \rho)\big\|_* = \left(\max_{0 \leqslant m \leqslant M} \Big(\big\|u^m\big\|^2 + \big\|\rho^m\big\|^2 \Big) + \tau \sum_{m=0}^{M} \big\|\nabla u^m\big\|^2 \right)^{1/2}.$$

Замечание 3. Отметим, что в работах [1, 2] сформулированная выше теорема о сходимости доказана для случая $f^U \equiv 0$ и $f^R \equiv 0$, однако данный результат не меняется для неравных нулю правых частей f^U и f^R. Эта теорема верна и в этом случае, а ее доказательство дословно повторяет доказательство, приведенное в [1, 2].

Замечание 4. Отметим также, что порядок скорости сходимости $h^{3/2}$ принципиально обусловлен (см. [2]) наличием погрешности порядка $O\big(h^2\big)$ при аппроксимации краевых условий (2.5) и (2.6).

3. Алгоритм решения сеточной задачи. Алгоритм решения задачи (2.9)—(2.14) состоит в последовательном нахождении $\big(\boldsymbol{U}^m, p^m, r^m\big)$ на каждом сеточном временно́м слое $m\tau$, $m = 1, \ldots, M$. Рассмотрим подробнее этот процесс при фиксированном $m = 0, \ldots, M-1$, тогда задача сводится к нахождению $\big(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{p}, \widehat{r}\big)$ в следующей линейной алгебраической системе уравнений:

$$\frac{\widehat{u}-u}{\tau} - \nu\Delta\widehat{u} + \mathcal{N}(\boldsymbol{u}, \widehat{u}) + \ell\widehat{u} + \nabla'\widehat{p} = f^U \quad \text{на} \quad \Omega_h^1 \times \Omega_h^2, \tag{3.1}$$

$$\nabla_z\widehat{p} + g[\widehat{r}]_z = 0 \quad \text{на} \quad \Omega_h^3, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}} = 0 \quad \text{на} \quad \mho_h, \tag{3.3}$$

$$\frac{\widehat{r}-r}{\tau} - \nu_1\Delta\widehat{r} + \mathcal{M}(\boldsymbol{u}, \widehat{r}) = f^R \quad \text{на} \quad \mho_h, \tag{3.4}$$

$$\widehat{u}_k = 0, \quad \nabla_k\widehat{r} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{kh}^k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3.5}$$

$$\nabla_i\widehat{u}_{3-i} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{ih}^{3-i}, \quad \nabla_3\widehat{u}_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{3h}^i, \quad i = 1, 2. \tag{3.6}$$

Для начала мы исключим из системы уравнений (3.1)–(3.6) значения сеточных функций $\widehat{r}$, $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$ на границе соответствующих сеточных областей, а также значения сеточной функции $\widehat{u}_3$ на горизонтальных гранях границы $\Sigma_{3,h}^3$. Это не представляет трудностей, поскольку указанные величины в силу уравнений (3.5) и (3.6) либо равны нулю, либо равны значениям соответствующих сеточных функций в приграничных узлах. Таким образом, уравнения (3.5) и (3.6) исключатся из системы, а в оставшихся уравнениях (3.1)–(3.4) некоторые операторы немного изменят свой вид в приграничных узлах сеточных областей.

Теперь заметим, что уравнение (3.4) может быть отделено от всей системы; это сеточное уравнение представляет собой линейную систему алгебраических уравнений относительно $\widehat{r}$, матрица которой положительно определена. Данный факт очевидно следует из неположительной определенности оператора Δ, а также косой симметрии оператора $\mathcal{M}$.

Таким образом, переменная $\widehat{r}$ может быть вычислена независимо от остальных неизвестных компонент решения каким-либо численным методом решения систем линейных уравнений. В рассматриваемом алгоритме применяется итерационный метод вида

$$\widehat{r}^{(k+1)} - \tau\nu_1\Delta\widehat{r}^{(k+1)} + \tau\mathcal{M}\big(\boldsymbol{u}, \widehat{r}^{(k)}\big) = \tau f^R + r, \quad \widehat{r}^{(0)} = r. \tag{3.7}$$

Предобусловливатель $I - \tau\nu_1\Delta$ на каждой итерации обращается с помощью дискретного преобразования Фурье [12]. Если процесс (3.7) сходится, то $\widehat{r}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widehat{r}$. Далее представим $\widehat{p}$ в виде $\widehat{p} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_0$, где $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_1\big(x'\big) = \widehat{p}\big(x', -h/2\big)$ зависит лишь от двух горизонтальных переменных, а $\widehat{p}_0\big(x', -h/2\big) = 0$ для всех $x' \in \mho_h'$. В этом случае уравнение (3.2) позволяет найти $\widehat{p}_0$, используя $\widehat{r}$:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_0\left(x', kh + \frac{h}{2}\right) &= \widehat{p}_0\left(x', kh - \frac{h}{2}\right) - \frac{1}{2}hg\left(\widehat{r}\left(x', kh + \frac{h}{2}\right) + \widehat{r}\left(x', kh - \frac{h}{2}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}hg\sum_{l=0}^{k}\left(\widehat{r}\left(x', lh + \frac{h}{2}\right) + \widehat{r}\left(x', lh - \frac{h}{2}\right)\right) \quad \forall x' \in \mho_h', \quad k = 0, \ldots, N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Заметим теперь, что неизвестные значения $\widehat{u}_3$ участвуют только в сеточном уравнении (3.3) и могут быть последовательно вычислены по следующим формулам (после нахождения $\widehat{u}$): для всех $x' \in \mho_h'$

$$\widehat{u}_3(x', kh) = \widehat{u}_3\big(x', (k-1)h\big) - h\operatorname{div}'\widehat{u}\left(x', kh - \frac{h}{2}\right) = -h\sum_{l=1}^{k}\operatorname{div}'\widehat{u}\left(x', lh - \frac{h}{2}\right), \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{3.9}$$

Отметим, что уравнения (3.3) на горизонтальном слое $z = 1$, т.е. уравнения (3.9) при $k = N$, пока остаются в решаемой системе уравнений и являются дополнительным к (3.1) условием на $\widehat{u}$. Используя равенство $\widehat{u}_3 = 0$ при $z = 1$, эти условия можно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{N}\operatorname{div}'\widehat{u}\left(x', kh - \frac{h}{2}\right) = 0 \quad \forall x' \in \mho_h', \tag{3.10}$$

что эквивалентно

$$\operatorname{div}'\widehat{w} = 0 \quad \forall x' \in \mho_h', \tag{3.11}$$

где через $\widehat{w}$ обозначена двумерная сеточная функция — сумма горизонтальных компонент скорости $\widehat{u}$ вдоль оси z:

$$\widehat{w}_i(x') = \sum_{k=1}^{N} \widehat{u}_i(x', kh - h/2) \quad \forall x' \in \Omega_h^i, \quad i = 1, 2.$$

В итоге, после выполнения перечисленных действий по исключению неизвестных, в рассматриваемой системе алгебраических уравнений остались уравнения (3.1) и (3.10), а также неизвестные компоненты $\widehat{u}$ и $\widehat{p}_1$. Количество неизвестных в $\widehat{u}$ равно количеству уравнений в (3.1), а количество неизвестных в $\widehat{p}_1$ — количеству уравнений (3.10).

Для решения системы (3.1), (3.10) просуммируем уравнение (3.1) по z:

$$\widehat{w} - \tau\nu\Delta'\widehat{w} + \tau\ell\widehat{w} + \tau N\nabla'\widehat{p}_1 + \tau \sum_{z=1}^{N} \mathcal{N}\big(\boldsymbol{u}, \widehat{u}\big) = \sum_{z=1}^{N} \big(\tau f^U + u - \tau\nabla'\widehat{p}_0\big). \tag{3.12}$$

Замечание 5. Заметим, что в уравнении (3.12) присутствует слагаемое

$$\tau \sum_{z=1}^{N} \mathcal{N}\big(\boldsymbol{u}, \widehat{u}\big), \tag{3.13}$$

отсутствие которого позволило бы точным методом решить довольно стандартную систему уравнений (3.11) и (3.12) в двумерной сеточной области относительно сеточных функций $\widehat{w}$ и $\widehat{p}_1$, после чего, использовав известные значения $\widehat{p}_1$, можно каким-либо образом решить уравнение (3.1). Однако в имеющейся ситуации, когда слагаемое (3.13) присутствует, для решения системы (3.1), (3.10) будет применен двухэтапный итерационный процесс.

Рассмотрим итерационный процесс, каждая итерация которого будет состоять из двух этапов. Первый этап заключается в решении точным (прямым) методом следующей системы уравнений относительно $\widehat{w}^{(k+1)}$ и $\widehat{p}_1^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} &\widehat{w}^{(k+1)} - \tau\nu\Delta'\widehat{w}^{(k+1)} + \tau\ell\widehat{w}^{(k+1)} + \tau N\nabla'\widehat{p}_1^{(k+1)} + \tau \sum_{z=1}^{N} \mathcal{N}\big(\boldsymbol{u}, \widehat{u}^{(k)}\big) = \sum_{z=1}^{N} \big(\tau f^U + u - \tau\nabla'\widehat{p}_0\big), \\ &\operatorname{div}'\widehat{w}^{(k+1)} = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $\widehat{u}^{(0)} = u$.

В настоящем исследовании система уравнений (3.14) решается методом вращений [13, 14]. Далее начинается второй этап итерации, где по найденным значениям $\widehat{p}_1^{(k+1)}$ вычисляются значения $\widehat{u}^{(k+1)}$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$\widehat{u}^{(k+1)} - \tau\nu\Delta\widehat{u}^{(k+1)} + \tau\ell\widehat{u}^{(k)} + \tau\mathcal{N}\big(\boldsymbol{u}, \widehat{u}^{(k)}\big) = \tau f^U + u - \tau\nabla'\widehat{p}_0 - \tau\nabla'\widehat{p}_1^{(k+1)}. \tag{3.15}$$

Предобусловливатель $I - \tau\nu\Delta$ на каждой итерации обращается с помощью дискретного преобразования Фурье. Если процесс (3.14)–(3.15) сходится, то $\widehat{u}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widehat{u}$.

Замечание 6. Для решения системы уравнений (3.14) вместо точного метода можно построить какой-нибудь внутренний итерационный процесс, который будет давать приемлемое приближение за меньшее число арифметических операций. В случае же использования точного метода можно заметить, что матрица данной системы не зависит от номера шага по времени m, а это означает, что обратную матрицу системы можно вычислить заранее, до запуска итераций по нахождению решения (2.9)–(2.14) на каждом временно́м слое. В этом случае первый этап итерационного процесса (3.14) сводится к умножению правой части системы на предварительно полученную обратную матрицу системы.

Замечание 7. Обратим внимание на то, что значения $\widehat{w}^{(k+1)}$ вычислять нет необходимости, поскольку данная величина не используется далее в вычислениях. В частности, это означает, что в случае применения точного метода обращения матрицы системы (3.14) (как это указано в предыдущем замечании) необходимо вычислять и хранить только тот блок обратной матрицы, который соответствует $\widehat{p}_1^{(k+1)}$. Кроме того, нет необходимости хранить и блок матрицы, который умножается на нули правой части второго уравнения (3.14).

Итак, кратко перечислим последовательность действий предложенного алгоритма решения задачи.

1. В соответствии с замечаниями 6 и 7 осуществляется обращение матрицы системы уравнений (3.14), причем для сокращения вычислительных затрат проводится поиск только той части матрицы, которая соответствует $\widehat{p}_1^{(k+1)}$ и правой части первого уравнения системы.

2. Последовательно рассматриваются временны́е слои $m\tau$, $m = 1, \ldots, M$, на которых ведется поиск решения системы (3.1)–(3.6). В начале $\big(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{p}, \widehat{r}\big) \equiv \big(\boldsymbol{u}^1, p^1, r^1\big)$ и $\big(\boldsymbol{u}, p, r\big) \equiv \big(\boldsymbol{u}^0, p^0, r^0\big)$.

3. С помощью итерационного процесса (3.7) осуществляется поиск приближения к $\widehat{r}$.

4. Далее вычисляется $\widehat{p}_0$ при помощи формул (3.8).

5. С помощью двухэтапного итерационного процесса (3.14)–(3.15) находится приближение к $\widehat{u}$ и $\widehat{p}_1$, причем решение (3.14) вычисляется умножением на обратную матрицу, найденную на шаге 1 алгоритма.

6. Вычисляется $\widehat{p} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_0$.

7. Вычисляется $\widehat{u}_3$ при помощи формул (3.9).

8. Пока $m < M$, происходит переход к следующему временно́му слою $m \to m+1$, начинающийся с исполнения шага 3 алгоритма с $\big(\widehat{\boldsymbol{u}}, \widehat{p}, \widehat{r}\big) \equiv \big(\boldsymbol{u}^m, p^m, r^m\big)$, $\big(\boldsymbol{u}, p, r\big) \equiv \big(\boldsymbol{u}^{m-1}, p^{m-1}, r^{m-1}\big)$.

4. Оценка числа арифметических операций и объема требуемой памяти. Сначала подсчитаем количество неизвестных в исследуемой задаче, при этом мы не будем учитывать граничные значения сеточных функций r, u_1, u_2 на границе соответствующих сеточных областей, а также значения сеточной функции u_3 на горизонтальных гранях границы Σ_{3h}^3 по тем же причинам, по которым они были исключены при описании алгоритма решения. Итак, на каждом временно́м слое сеточная функция r содержит N^3 неизвестных значений, u_1, u_2 и u_3 — по $N^2(N-1)$, а p — по $N^2(N+2)$ значений. Таким образом, на каждом временно́м слое общее количество неизвестных равно $5N^3 - N^2$. В то же время количество уравнений в системе (3.1)–(3.4) равно

$$2N^2(N-1) + N^2(N+1) + N^3 + N^3 = 5N^3 - N^2,$$

что совпадает с количеством неизвестных. Общее количество неизвестных на всех временны́х слоях равно $MN^2(5N-1)$.

Рассмотрим каждый шаг алгоритма отдельно. Из замечаний 6 и 7, а также оценки числа операций для выполнения метода вращений [13] следует, что обращение матрицы системы (3.14) требует $\big(108 + o(1)\big)N^6$ аддитивных и мультипликативных операций, при этом потребуется $\big(15 + o(1)\big)N^4$ ячеек памяти.

Каждый шаг итерационного процесса (3.7) с применением дискретного преобразования Фурье требует $O\big(N^4\big)$ арифметических операций и $O\big(N^3\big)$ ячеек памяти. Вычисление $\widehat{p}_0$ требует $O\big(N^3\big)$ арифметических операций и $O\big(N^3\big)$ ячеек памяти. Двухэтапный итерационный процесс (3.14)–(3.15) на каждом шаге требует $O\big(N^4\big)$ арифметических операций и $O\big(N^3\big)$ ячеек памяти. Вычисление $\widehat{p}$ и $\widehat{u}_3$ требует $O\big(N^3\big)$ арифметических операций и $O\big(N^3\big)$ ячеек памяти.

Таким образом, самым затратным по количеству арифметических операций и требуемому объему памяти является первый шаг алгоритма — обращение матрицы системы (3.14). Данный этап можно улучшить, принимая во внимание замечание 6, однако это не меняет порядок оценок числа требуемых операций и памяти. Итак, общее число арифметических операций равно $108N^6 + O\big(MN^4\big)$ в предположении, что количество итераций процессов (3.7) и (3.14)–(3.15) не имеет значимого роста с ростом N. Общее количество ячеек требуемой памяти равно $15N^4 + O\big(N^3\big)$.

5. Результаты численного эксперимента. Скорость сходимости решений разностных схем к решению дифференциальной задачи изучалась на следующих аналитических функциях:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_1(x,y,z,t) &= \sin(k_1\pi x)\cos(k_2\pi y)\cos(k_3\pi z)\cos(Kt),\\
\overline{U}_2(x,y,z,t) &= \cos(k_1\pi x)\sin(k_2\pi y)\cos(k_3\pi z)\cos(Kt),\\
\overline{U}_3(x,y,z,t) &= \cos(k_1\pi x)\cos(k_2\pi y)\sin(k_3\pi z)\cos(Kt),\\
\overline{R}(x,y,z,t) &= \cos(l_1\pi x)\cos(l_2\pi y)\cos(l_3\pi z)\cos(Lt),\\
\overline{P}(x,y,z,t) &= -\frac{g}{l_3\pi}\cos(l_1\pi x)\cos(l_2\pi y)\sin(l_3\pi z)\cos(Lt).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Заметим, что при выполнении условия $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ поле $\big(\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3\big)$ является соленоидальным (удовлетворяет уравнению (2.3)), а функции (5.1) являются решением системы (2.1)–(2.4), (2.5)–(2.7), в которой правые части f^U и f^R имеют вид $f^U = \mathfrak{U}\big(\overline{U}, \overline{\boldsymbol{U}}, \overline{P}\big)$ и $f^R = \mathfrak{R}\big(\overline{R}, \overline{\boldsymbol{U}}\big)$.

Напомним, что для применения рассматриваемого численного метода необходимо задать сеточное поле скоростей в начальный момент времени $u_0(x) = U_0(x) + O\big(h^2\big)$ таким образом, чтобы оно удовлетворяло условию (2.16). Для этого положим в соответствующих узлах сетки:

$$\overline{u}_{0i}(x) = \frac{k_i \pi h}{2\sin(k_i \pi h/2)}\, \overline{U}_{0i}(x), \quad x \in \overline{\Omega}^{h_i}, \quad i = 1, 2. \tag{5.2}$$

Условие $\overline{u}_0(x) = \overline{U}_0(x) + O\big(h^2\big)$ верно, поскольку $\dfrac{k_i \pi h}{2\sin(k_i \pi h/2)} = 1 + O\big(h^2\big)$, $i = 1, 2$. Справедливость условия (2.16) нетрудно вывести из соотношения для разделенной разности функции синуса:

$$\frac{\sin\big(k_i\pi(x + h/2)\big) - \sin\big(k_i\pi(x - h/2)\big)}{h} = \frac{2}{h} \sin \frac{k_i \pi h}{2} \cos(k_i \pi x) = k_i \pi \,\frac{2\sin(k_i \pi h/2)}{k_i \pi h} \cos(k_i \pi x).$$

Итак, ниже приведен список результатов для некоторого набора начальных данных. В качестве результатов представлено исследование нормы разности численного решения $\big(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{p}, \overline{r}\big)$ и решения дифференциальной задачи $\big(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{P}, \overline{R}\big)$:

$$E = \max\Big\{\max_{1\leqslant m\leqslant M}\big\|\overline{U}^{\,m} - \overline{u}^{\,m}\big\|,\ \max_{1\leqslant m\leqslant M}\big\|\overline{R}^{\,m} - \overline{r}^{\,m}\big\|\Big\}.$$

Согласно теореме о сходимости, имеем

$$E = O\big(\tau + h^{3/2}\big). \tag{5.3}$$

Для проверки данного равенства на практике были проведены серии численных экспериментов, при этом каждая серия начиналась с вычислений на сетке с некоторыми параметрами N_0, M_0. Последующие численные эксперименты в серии проводились на сетке, параметр N которых умножался по отношению к предыдущему эксперименту на число $\varkappa$, фиксированное в данной серии. При этом параметр M увеличивался не менее, чем в $\varkappa^{3/2}$ раз. В этом случае для каждого эксперимента в серии (кроме первого) можно измерить, во сколько раз норма погрешности E уменьшилась по отношению к тому же показателю в предыдущем эксперименте серии, данную величину мы будем обозначать через δ. Кроме того, нам будет интересна величина $\log_\varkappa \delta$, которая должна быть больше, чем 3/2, в силу (5.3).

Ниже при различных наборах начальных данных приводятся (табл. 1–7) результаты численных экспериментов для следующих параметров решения $\big(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{P}, \overline{R}\big)$:

$$k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = -2, \quad K = \pi, \quad l_1 = l_2 = l_3 = 1, \quad L = \pi. \tag{5.4}$$

Таблица 1

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
$g = 10$, $\omega = 10$, $\nu = 1/2$, $\nu_1 = 1/2$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.455287	–	–
	6	17	0.148186	3.0724	1.619
	12	49	0.051365	2.8850	1.529
	24	139	0.018072	2.8423	1.507
	48	394	0.006381	2.8319	1.502
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.455261	–	–
	12	64	0.051365	8.8632	1.574
	48	512	0.006381	8.0497	1.504
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033267	–	–
	36	216	0.009828	3.3849	1.504

Таблица 2

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
$g = 10$, $\omega = 10$, $\nu = 1/5$, $\nu_1 = 1/5$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.444909	–	–
	6	17	0.146308	3.0409	1.605
	12	49	0.051128	2.8616	1.517
	24	139	0.018048	2.8328	1.502
	48	394	0.006379	2.8292	1.500
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.444176	–	–
	12	64	0.051128	8.6875	1.559
	48	512	0.006379	8.0150	1.501
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033175	–	–
	36	216	0.009822	3.3775	1.501

В табл. 8–10 приводятся результаты вычислений для других параметров решения $\big(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{P}, \overline{R}\big)$, при этом везде берется следующий набор начальных данных:

$$g = 10, \quad \omega = 10, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \nu_1 = \frac{1}{2}, \quad T = 1. \tag{5.5}$$

Таблица 3

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_{\varkappa}\delta$
$g = 10$, $\omega = 10$, $\nu = 5$, $\nu_1 = 5$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.456866	–	–
	6	17	0.148222	3.0823	1.624
	12	49	0.051366	2.8856	1.529
	24	139	0.018072	2.8424	1.507
	48	394	0.006381	2.8319	1.502
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.456866	–	–
	12	64	0.051366	8.8943	1.576
	48	512	0.006381	8.0498	1.504
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033268	–	–
	36	216	0.009828	3.3850	1.504

Таблица 4

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_{\varkappa}\delta$
$g = 10$, $\omega = 10$, $\nu = 1/5$, $\nu_1 = 5$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.472390	–	–
	6	17	0.149060	3.1691	1.664
	12	49	0.051420	2.8988	1.535
	24	139	0.018076	2.8447	1.508
	48	394	0.006382	2.8324	1.502
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.472345	–	–
	12	64	0.051420	9.1860	1.599
	48	512	0.006382	8.0570	1.505
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033286	–	–
	36	216	0.009829	3.3865	1.504

Таблица 5

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_{\varkappa}\delta$
$g = 10$, $\omega = 10$, $\nu = 5$, $\nu_1 = 1/5$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.456043	–	–
	6	17	0.148185	3.0775	1.622
	12	49	0.051362	2.8851	1.529
	24	139	0.018071	2.8422	1.507
	48	394	0.006381	2.8318	1.502
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.456034	–	–
	12	64	0.051362	8.8788	1.575
	48	512	0.006381	8.0492	1.504
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033266	–	–
	36	216	0.009828	3.3849	1.504

Таблица 6

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_{\varkappa}\delta$
$g = 1/10$, $\omega = 10$, $\nu = 1/2$, $\nu_1 = 1/2$, $T = 1$	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.457464	–	–
	6	17	0.148298	3.0848	1.625
	12	49	0.051373	2.8867	1.529
	24	139	0.018072	2.8426	1.507
	48	394	0.006382	2.8320	1.502
	Серия B ($\varkappa = 4$)				
	3	8	0.457463	–	–
	12	64	0.051373	8.9047	1.577
	48	512	0.006382	8.0496	1.504
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033270	–	–
	36	216	0.009828	3.3852	1.504

Теперь рассмотрим еще одну серию экспериментов, чтобы проверить практически достижимый порядок сходимости. Поскольку разностная схема аппроксимирует примитивные уравнения со вторым порядком по пространственным переменным, то максимально ожидаемый порядок сходимости может быть не выше двух. Рассматриваемая серия (табл. 11) экспериментов будет отличаться от предыдущих только лишь тем, что уменьшение в два раза шага сетки по пространству ($\varkappa = 2$) будет сопровождаться четырехкратным умень-

Таблица 11

Набор начальных данных	Другие параметры решения	N	M	E	δ	$\log_{\varkappa}\delta$
		Серия X ($\varkappa = 2$)				
$g = 10$	$k_1 = k_2 = 1$	3	6	0.455287	–	–
$\omega = 10$	$k_3 = -2$	6	24	0.148185	3.0724	1.619
$\nu = 1/2$	$K = \pi$	12	96	0.051365	2.8850	1.529
$\nu_1 = 1/2$	$l_1 = l_2 = l_3 = 1$	24	384	0.018072	2.8423	1.507
$T = 1$	$L = \pi$	48	1536	0.006381	2.8319	1.502

Таблица 7

Набор начальных данных	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.656109	–	–
	6	17	0.189548	3.4614	1.791
	12	49	0.058469	3.2419	1.697
$g = 100$	24	139	0.019239	3.0390	1.604
$\omega = 10$	48	394	0.006572	2.9274	1.550
$\nu = 1/2$	Серия B ($\varkappa = 4$)				
$\nu_1 = 1/2$	3	8	0.655964	–	–
$T = 1$	12	64	0.058469	11.2190	1.743
	48	512	0.006572	8.8966	1.576
	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.036635	–	–
	36	216	0.010233	3.5802	1.573

Таблица 8

Параметры правой части	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.469833	–	–
	6	17	0.149674	3.1390	1.650
$k_1 = -1$	12	49	0.051501	2.9063	1.539
$k_2 = 2$	24	139	0.018084	2.8479	1.510
$k_3 = -1$	48	394	0.006383	2.8333	1.502
$K = \pi$	Серия B ($\varkappa = 4$)				
$l_1 = 1$	3	8	0.469835	–	–
$l_2 = 1$	12	64	0.051501	9.1228	1.594
$l_3 = 1$	48	512	0.006383	8.0684	1.506
$L = \pi$	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033317	–	–
	36	216	0.009831	3.3890	1.505

Таблица 9

Параметры правой части	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.341978	–	–
	6	17	0.152048	2.2491	1.169
$k_1 = 1$	12	49	0.051703	2.9408	1.556
$k_2 = 1$	24	139	0.018110	2.8550	1.514
$k_3 = -2$	48	394	0.006388	2.8350	1.503
$K - \pi$	Серия B ($\varkappa = 4$)				
$l_1 = 2$	3	8	0.342024	–	–
$l_2 = -1$	12	64	0.051703	6.6151	1.362
$l_3 = 3$	48	512	0.006388	8.0937	1.508
$L = \pi$	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033399	–	–
	36	216	0.009841	3.3940	1.507

Таблица 10

Параметры правой части	N	M	E	δ	$\log_\varkappa \delta$
	Серия A ($\varkappa = 2$)				
	3	6	0.233012	–	–
	6	17	0.154366	1.5095	0.594
$k_1 = -1$	12	49	0.051879	2.9755	1.573
$k_2 = 3$	24	139	0.018116	2.8636	1.518
$k_3 = -2$	48	394	0.006385	2.8371	1.504
$K = \pi$	Серия B ($\varkappa = 4$)				
$l_1 = 1$	3	8	0.233037	–	–
$l_2 = 1$	12	64	0.051879	4.4919	1.083
$l_3 = 1$	48	512	0.006385	8.1251	1.511
$L = \pi$	Серия C ($\varkappa = 9/4$)				
	16	24	0.033453	–	–
	36	216	0.009839	3.4001	1.509

шением шага сетки по времени ($\varkappa^2 = 4$). Данная серия проведена для параметров (5.4) решения $\left(\overline{\boldsymbol{U}}, \overline{P}, \overline{R}\right)$ при начальных данных задачи (5.5).

По приведенным результатам вычислений серии X можно сделать вывод, что полученная в теореме о сходимости оценка (5.3) с $3/2$ порядком сходимости по пространственным переменным не может быть улучшена по порядку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Друца А.В., Кобельков Г.М.* О сходимости разностных схем для уравнений крупномасштабной динамики океана // Докл. РАН. 2011. **440**, № 6. 727–730.
2. *Друца А.В., Кобельков Г.М.* О сходимости разностных схем для уравнений динамики океана // Матем. сборник. 2012. **203**, вып. 8. 17–38.
3. *Lions J.L., Temam R., Wang S.* On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. 1992. **5**. 1007–1053.
4. *Temam R., Ziane M.* Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics / S. Frielander and D. Serr, Eds. Vol. 3. Amsterdam: Elsevier, 2004. 535–658.

5. *Лебедев В.И.* Метод конечных сеток для уравнений типа С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1957. **114**, № 6. 1166–1169.
6. *Кобельков Г.М.* Существование решения "в целом" для уравнений динамики океана // Докл. РАН. 2006. **407**, № 4. 457–459.
7. *Kobelkov G.M.* Existence of a solution "in the large" for ocean dynamics equations // J. Math. Fluid Mech. 2007. **9**. 588–610.
8. *Kobelkov G.M.* Existence of a solution in the large for the 3D large-scale ocean dynamics equations // C.R. Acad. Sci. Paris. 2006. Ser. I. **343**. 283–286.
9. *Cao C., Titi E.S.* Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics // Annals of Mathematics. 2007. **166**, N 1. 245–267.
10. *Drutsa A.V.* Existence "in large" of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. **24**, N 6. 515–542.
11. *Друца А.В.* Существование "в целом" решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии // Матем. сборник. 2011. **202**, вып. 10. 55–86.
12. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2003.
13. *Богачев К.Ю.* Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. Практикум на ЭВМ. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 1999.
14. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматлит, 1960.

Поступила в редакцию
06.08.2012