УДК 519.62

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев[1]

Рассмотрена задача об исследовании устойчивости конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана, предназначенных для расчета плоских течений вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости. Исследуется устойчивость в случае двух стационарных режимов течения в неограниченной области. Анализ устойчивости по начальным условиям производится с помощью метода Неймана на основе линейного приближения. Построены и исследованы области устойчивости в пространстве входных параметров. Показано, что все рассмотренные схемы являются условно устойчивыми. Установлено, что в широком диапазоне изменения входных параметров наибольшие площади имеют области устойчивости, соответствующие схеме с направленными разностями, аппроксимирующей с первым порядком. При условии равенства значений шагов по времени и пространственным переменным установлено, что площади областей устойчивости для решеточного уравнения Больцмана больше, чем для случаев конечно-разностных схем.

Ключевые слова: кинетические схемы, решеточное уравнение Больцмана, конечно-разностные решеточные схемы Больцмана, устойчивость по начальным условиям, метод Неймана, область устойчивости.

1. Введение. В последние годы в вычислительной гидродинамике разработаны различные варианты кинетических схем для расчета однофазных и многофазных течений жидкости и газа [1–5]. Ключевой особенностью этого типа вычислительных схем является то, что они основаны на использовании кинетических уравнений (в том числе и дискретных), которым удовлетворяют одночастичные функции распределения. Располагая последними, можно вычислять такие макрохарактеристики, как скорость, плотность, температуру, компоненты вектора потока тепла и компоненты тензора напряжений [6]. Благодаря достаточно простым вычислительным алгоритмам и широким возможностям для распараллеливания кинетические схемы используются в большом числе работ.

Настоящая статья посвящена анализу устойчивости явных конечно-разностных решеточных кинетических схем Больцмана (finite difference-based lattice Boltzmann schemes), представленных в работах [7–10]. Рассматриваются только случаи плоских течений при использовании модели $D2Q9$. Исследование устойчивости проводится посредством анализа границ областей устойчивости в пространстве параметров.

2. Явные конечно-разностные решеточные схемы Больцмана. В модели $D2Q9$, применяемой при расчетах плоских течений, используется набор допустимых скоростей $\boldsymbol{V}_i = v\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, 9$, где v — характерная скорость, а векторы $\boldsymbol{v}_i$ задаются следующим образом: $\boldsymbol{v}_1 = (0, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0, 1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (-1, 0)$, $\boldsymbol{v}_5 = (0, -1)$, $\boldsymbol{v}_6 = (1, 1)$, $\boldsymbol{v}_7 = (-1, 1)$, $\boldsymbol{v}_8 = (-1, -1)$, $\boldsymbol{v}_9 = (1, -1)$. Наиболее часто встречающаяся в литературе разностная схема (решеточное уравнение Больцмана, lattice Boltzmann equation), основанная на модели $D2Q9$, имеет следующий вид [2]:

$$f_i(t_j + \Delta t, \boldsymbol{r}_{kl} + \boldsymbol{V}_i \Delta t) = f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) - \frac{1}{\tau}\Big(f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) - f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})\big)\Big). \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла пространственной равномерной сетки, построенной с шагом h по x и по y; t_j — узел временно́й равномерной сетки; Δt — шаг разбиения сетки по времени; f_i, $i = 1, \ldots, 9$, — одночастичные функции распределения, соответствующие псевдочастицам со скоростями $\boldsymbol{V}_i = (V_{ix}, V_{iy})$; $f_i^{(\mathrm{eq})}$ — функции, аппроксимирующие равновесные функции распределения Максвелла; τ — безразмерное время релаксации: $\tau = \dfrac{\lambda}{\Delta t}$, где λ — время релаксации; $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_9)$. В случае модели $D2Q9$ имеем $v = \dfrac{h}{\Delta t}$, а связь между Δt, $\boldsymbol{V}_i$ и векторами $\boldsymbol{e}_i$, задающими расстояния между соседними узлами сетки, выражается следующим образом: $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{V}_i \Delta t$, где $|\boldsymbol{e}_i| = 0, h, \sqrt{2}\,h$ [11].

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

Схема вида (1) может быть построена разными способами — например, как обобщение вычислительной модели решеточного газа [2] или посредством дискретизации кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [12–14].

Параметр τ связан с кинематическим коэффициентом вязкости ν, фигурирующим в системе уравнений Навье–Стокса, соотношением $\nu = \dfrac{1}{3}\left(\tau - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{h^2}{\Delta t}$, которое было найдено при выводе системы уравнений Навье–Стокса методом Чепмена–Энскога [15].

В модели $D2Q9$ безразмерная плотность $\rho(t, \boldsymbol{r})$ и безразмерная скорость среды $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r})$ ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}/v$, где $\boldsymbol{V}$ — скорость среды) вычисляются через f_i по следующим формулам:

$$\rho(t, \boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{9} f_i(t, \boldsymbol{r}), \quad \rho(t, \boldsymbol{r})\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{9} \boldsymbol{v}_i f_i(t, \boldsymbol{r}).$$

Конечно-разностные решеточные схемы строятся посредством использования конечных разностей для замены производных, входящих в следующую систему уравнений, получаемую методом дискретных скоростей из кинетического уравнения, выписанного в безразмерном виде:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f_i - f_i^{(\mathrm{eq})}\right). \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{r} = (x, y)$ — вектор безразмерных пространственных переменных, $\dfrac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{r}} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x}, \dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right)$, t — безразмерное время. Основными достоинствами такого типа схем являются возможность использования разных значений шагов по времени и по пространственным переменным (в отличие от (1), где на значения Δt и h наложена указанная выше связь), а также возможность использования неравномерных и адаптивных сеток.

В настоящей статье рассматриваются только явные и одношаговые (двухслойные) схемы на равномерной по времени сетке, при этом производные по t в (2) аппроксимируются с помощью правой разностной производной: $\dfrac{\partial f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\partial t} \approx \dfrac{f_i(t_j + \Delta t, \boldsymbol{r}_{kl}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\Delta t}$. Пространственная сетка также предполагается равномерной.

В работах [7–10] предложена схема, в которой производные по пространственным переменным аппроксимируются с помощью центральных разностных производных:

$$\frac{\partial f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\partial x} \approx \frac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k-1l})}{2h}, \quad \frac{\partial f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\partial y} \approx \frac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl-1})}{2h}.$$

В результате получается разностная схема, аппроксимирующая (2) с первым порядком по времени и со вторым — по пространственным переменным:

$$\begin{aligned} f_i(t_j + \Delta t, \boldsymbol{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})\big) - v_{ix}\frac{\Delta t}{2h}\big(f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k-1l})\big) - \\ - v_{iy}\frac{\Delta t}{2h}\big(f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl-1})\big). \end{aligned} \tag{3}$$

В работах [7, 9, 10] предложено аппроксимировать производные по пространственным переменным с первым порядком с помощью направленных конечных разностей

$$\frac{\partial f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\partial x} \approx R^1_{ix} = \begin{cases} \dfrac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k-1l})}{h}, & v_{ix} \geqslant 0, \\ \dfrac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{k+1l}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{\partial y} \approx R^1_{iy} = \begin{cases} \dfrac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl-1})}{h}, & v_{iy} \geqslant 0, \\ \dfrac{f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl+1}) - f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})}{h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Получившаяся при такой аппроксимации производных разностная схема имеет вид

$$f_i(t_j + \Delta t, \boldsymbol{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j, \boldsymbol{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_j, \boldsymbol{r}_{kl})\big) - v_{ix}\Delta t R^1_{ix} - v_{iy}\Delta t R^1_{iy}. \tag{4}$$

В [8, 9] производные предложено аппроксимировать со вторым порядком также посредством направленных конечных разностей:

$$\frac{\partial f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl})}{\partial x} \approx R^2_{ix} = \begin{cases} \dfrac{3f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl}) - 4f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{k-1l}) + f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{k-2l})}{2h}, & v_{ix} \geqslant 0, \\ -\dfrac{3f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl}) - 4f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{k+1l}) + f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{k+2l})}{2h}, & v_{ix} < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl})}{\partial y} \approx R^2_{iy} = \begin{cases} \dfrac{3f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl}) - 4f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl-1}) + f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl-2})}{2h}, & v_{iy} \geqslant 0, \\ -\dfrac{3f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl}) - 4f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl+1}) + f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl+2})}{2h}, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Получающаяся при этом разностная схема имеет вид

$$f_i(t_j+\Delta t,\boldsymbol{r}_{kl}) = \left(1-\frac{\Delta t}{\tau}\right) f_i(t_j,\boldsymbol{r}_{kl}) + \frac{\Delta t}{\tau} f_i^{(\mathrm{eq})}\big(\boldsymbol{f}(t_j,\boldsymbol{r}_{kl})\big) - v_{ix}\Delta t R^2_{ix} - v_{iy}\Delta t R^2_{iy}. \tag{5}$$

Для краткости и удобства дальнейшего изложения материала схему, задаваемую посредством (1), будем называть схемой 1, а схемы, построенные с помощью метода конечных разностей и задаваемые посредством (3)–(5), будем называть схемами 2, 3 и 4 соответственно.

3. Постановка задачи об исследовании устойчивости. По аналогии с работами [7, 16], будем производить исследование устойчивости только по начальным условиям. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых безразмерные макровеличины ρ, u_x, u_y являются постоянными. Значения равновесных функций распределения в этом случае тоже постоянны: $f_i^{(\mathrm{eq})} = \overline{f}_i^{(\mathrm{eq})} = C_i = \mathrm{const}$, а их совокупность является невозмущенным решением каждой из разностных систем (3)–(5). Исследуются два режима течения: $u_x = U = \mathrm{const}$, $u_y = 0$ (режим 1) и $u_x = u_y = U = \mathrm{const}$ (режим 2) при предположении, что $\rho = 1$.

Как и в работах [7, 16, 17], будет исследоваться устойчивость по линейному приближению с помощью метода Неймана. При его применении задачи об исследовании устойчивости невозмущенных решений систем (3)–(5) сведутся к задачам исследования устойчивости нулевых решений систем разностных уравнений следующего вида:

$$F_i(t_j+\Delta t) = \sum_{m=1}^{9} G_{im} F_m(t_j), \tag{6}$$

где сеточные функции F_i используются в соотношениях $\delta f_i(\boldsymbol{r}_{kl},t_j) = F_i(t_j)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{r}_{kl})$ [16], в которых $\delta f_i(\boldsymbol{r}_{kl},t_j)$ являются отклонениями от невозмущенных решений систем (3)–(5), $\mathrm{i}^2 = -1$, $\boldsymbol{\Theta} = (\theta_x,\theta_y)$, $\theta_x \in\ [-\pi,\pi]$, $\theta_y = [-\pi,\pi]$.

Выражения для фигурирующих в (6) коэффициентов G_{im} в случае схемы 2 имеют следующий вид:

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Delta t}{\tau} - \dfrac{\Delta t}{2h}\Big(v_{ix}\big(\exp(\mathrm{i}h\theta_x) - \exp(-\mathrm{i}h\theta_x)\big) + v_{iy}\big(\exp(\mathrm{i}h\theta_y) - \exp(-\mathrm{i}h\theta_y)\big)\Big) + \\ \quad + \dfrac{\Delta t}{\tau}\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{(\mathrm{eq})}\Big), & m = i, \\ \dfrac{\Delta t}{\tau}\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{(\mathrm{eq})}\Big), & m \neq i. \end{cases}$$

В случае схемы 3 они имеют вид

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Delta t}{\tau} - \dfrac{\Delta t}{h}\big(v_{ix}\widetilde{R}^1_{ix} + v_{iy}\widetilde{R}^1_{iy}\big) + \dfrac{\Delta t}{\tau}\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{(\mathrm{eq})}\Big), & m = i, \\ \dfrac{\Delta t}{\tau}\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{(\mathrm{eq})}\Big), & m \neq i, \end{cases}$$

$$\widetilde{R}^1_{ix} = \begin{cases} 1 - \exp(-\mathrm{i}h\theta_x), & v_{ix} \geqslant 0, \\ \exp(\mathrm{i}h\theta_x) - 1, & v_{ix} < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{R}^1_{iy} = \begin{cases} 1 - \exp(-\mathrm{i}h\theta_y), & v_{iy} \geqslant 0, \\ \exp(\mathrm{i}h\theta_y) - 1, & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

В случае схемы 4 коэффициенты G_{im} представляются в виде

$$G_{im} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Delta t}{\tau} - \dfrac{\Delta t}{2h}\Big(v_{ix}\widetilde{R}_{ix}^2 + v_{iy}\widetilde{R}_{iy}^2\Big) + \dfrac{\Delta t}{\tau}\,\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{\,(\mathrm{eq})}\Big), & m = i, \\ \dfrac{\Delta t}{\tau}\,\dfrac{\partial f_i^{(\mathrm{eq})}}{\partial f_m}\Big(\overline{\boldsymbol{f}}^{\,(\mathrm{eq})}\Big), & m \neq i, \end{cases}$$

$$\widetilde{R}_{ix}^2 = \begin{cases} 3 - 4\exp(-\mathrm{i}h\theta_x) + \exp(-\mathrm{i}2h\theta_x), & v_{ix} \geqslant 0, \\ -3 + 4\exp(\mathrm{i}h\theta_x) - \exp(\mathrm{i}2h\theta_x), & v_{ix} < 0, \end{cases} \qquad \widetilde{R}_{iy}^2 = \begin{cases} 3 - 4\exp(-\mathrm{i}h\theta_y) + \exp(-\mathrm{i}2h\theta_y), & v_{iy} \geqslant 0, \\ -3 + 4\exp(\mathrm{i}h\theta_y) - \exp(\mathrm{i}2h\theta_y), & v_{iy} < 0. \end{cases}$$

Нулевое решение системы (6) будет устойчиво, если все собственные значения комплексной матрицы $G = \{G_{im}\}_{i,m=1,9}$ по модулю не будут превосходить единицы [18].

Устойчивость схем 2 и 3 исследовалась в работе [7], но для случая решетки $D2Q7$. При этом рассматривался случай, когда векторы $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ и $\boldsymbol{\Theta}$ сонаправлены. В настоящей работе подобного ограничения не ставится.

При всех принятых выше допущениях собственные значения матрицы G являются функциями следующих переменных: θ_x, θ_y, U, Δt, h, τ, причем U, Δt, h, τ — входные параметры. Для упрощения проведения расчетов вместо Δt и h рассматривался параметр $\gamma = v\,\dfrac{\Delta t}{h}$, где v — модуль скорости псевдочастиц по основным направлениям решетки (по x и по y). В случае модели $D2Q9$ имеем $v = \dfrac{h}{\Delta t}$; с учетом связи значений Δt и h для схемы 1 получим, что $\gamma = 1$.

Задачи на поиск собственных значений для матрицы G численно решались с помощью QR-алгоритма, реализованного на языке FORTRAN 90 в пакете EISPACK [19].

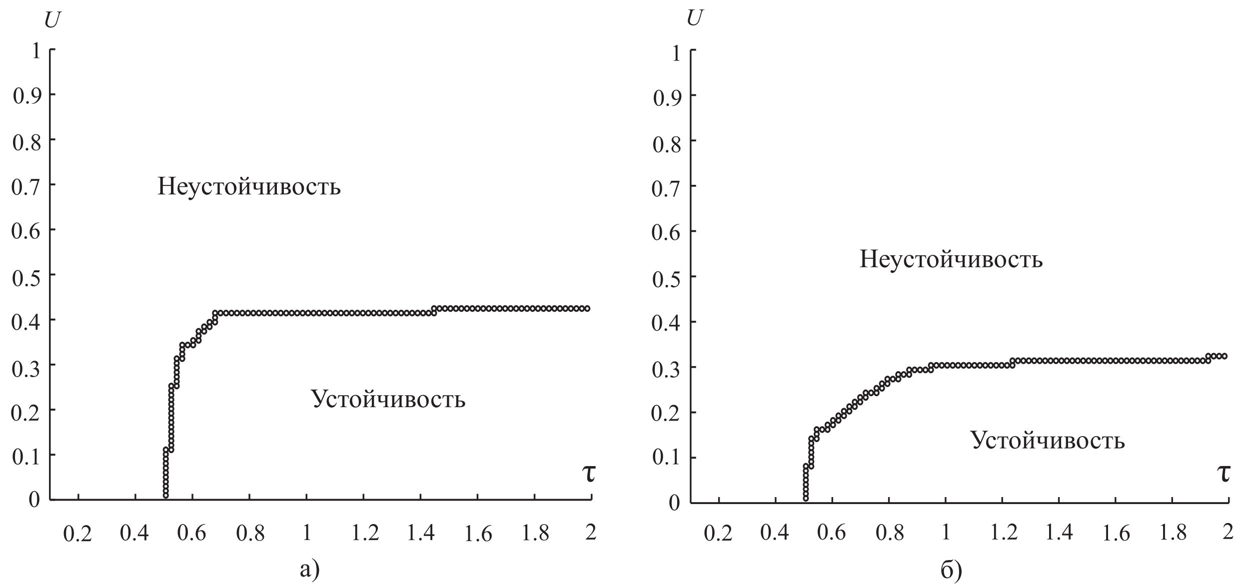

Рис. 1. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) для случая схемы 1: а) режим 1; б) режим 2

4. Области устойчивости на плоскости (τ, U)**.** При исследовании устойчивости в этом случае рассматривались следующие значения γ: 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1. Параметр τ изменялся от 0 до 2, а параметр U — от 0 до 1. Область изменения этих параметров разбивалась равномерной сеткой из 100×100 узлов. Точка считалась входящей в область устойчивости, если при фиксированных τ и U для всех значений (θ_x, θ_y) все собственные значения матрицы G по модулю не превосходили единицы. Область изменения параметров (θ_x, θ_y) разбивалась сеткой из 200×200 узлов.

Области устойчивости для конечно-разностных схем при $\gamma = 0.75$ и $\gamma = 1$ оказались пустыми. Для случая же схемы 1 (для которого справедливо лишь значение $\gamma = 1$) области устойчивости в случае обоих режимов не являются пустыми. Это говорит о существенном преимуществе схемы 1 при $\gamma = 1$. Отметим, что в случае режима 1 площадь области устойчивости является большей, чем в случае режима 2. Формы границ области устойчивости для случая схемы 1 представлены на рис. 1. Максимально возможное значение параметра U, при котором имеет место устойчивость, обозначим через $\overline{U}$; оно равно 0.43 (соответствует $\tau \in [1.44, 2]$) в случае режима 1 и 0.33 (соответствует $\tau \in [1.93, 2]$) в случае режима 2.

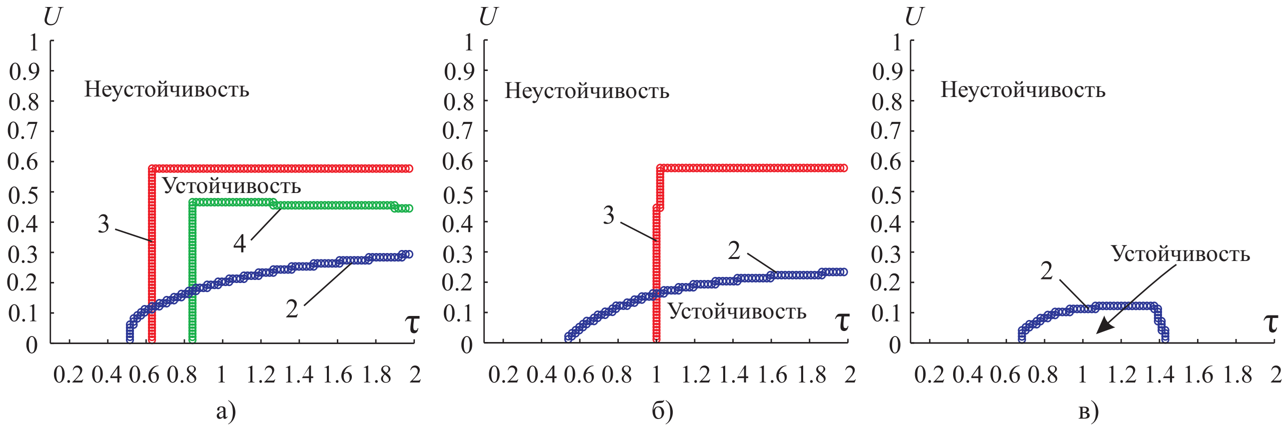

Рис. 2. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) для схем 2–4 в случае режима 1: а) $\gamma = 0.1$; б) $\gamma = 0.25$; в) $\gamma = 0.5$. Кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3, кривая 4 — схема 4

На рис. 2 представлены формы областей устойчивости для схем 2–4 в случае режима 1 при различных значениях γ, а в табл. 1 приведены значения $\overline{U}$ и соответствующие им интервалы изменения τ. Прочерки в ячейках таблицы означают, что при таком значении γ область устойчивости является пустой.

Таблица 1

Связь значений параметров γ, $\overline{U}$ и τ для случая режима 1

γ	Схема 2	Схема 3	Схема 4
0.1	$\overline{U} = 0.29$, $\tau \in [1.95, 2]$	$\overline{U} = 0.59$, $\tau \in [0.62, 2]$	$\overline{U} = 0.47$, $\tau \in [0.84, 1.27]$
0.25	$\overline{U} = 0.21$, $\tau \in [1.85, 2]$	$\overline{U} = 0.57$, $\tau \in [1.01, 2]$	—
0.5	$\overline{U} = 0.12$, $\tau \in [1.05, 1.36]$	—	—

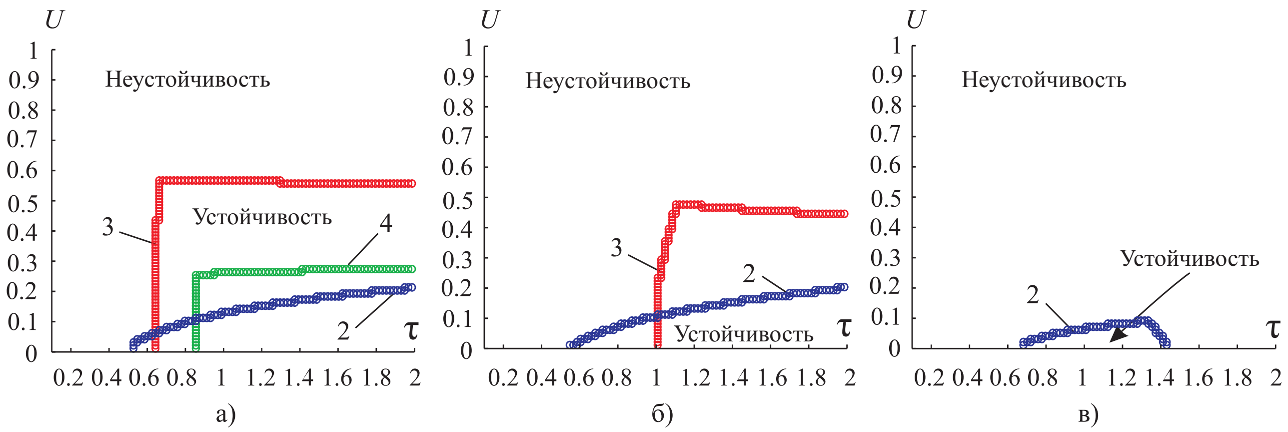

Рис. 3. Границы областей устойчивости на плоскости (τ, U) для схем 2–4 в случае режима 2: а) $\gamma = 0.1$; б) $\gamma = 0.25$; в) $\gamma = 0.5$. Кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3, кривая 4 — схема 4

Границы областей устойчивости для схем 2–4 в случае режима 2 при различных значениях γ представлены на рис. 3, в табл. 2 приведены значения $\overline{U}$ и соответствующие им интервалы изменения τ.

Интересно отметить, что в случаях обоих рассмотренных режимов при увеличении значения γ области устойчивости сужаются, причем в случае режима 1 их площади всегда были больше, чем в случае режима 2. Значение $\overline{U}$ в случае режима 2 всегда было меньше соответствующего значения для случая режима 1. В случаях $\gamma = 0.1$ и $\gamma = 0.25$ наибольшие площади имели области устойчивости, соответствующие схеме 3.

Таблица 2

Связь значений параметров γ, $\overline{U}$ и τ для случая режима 2

γ	Схема 2	Схема 3	Схема 4
0.1	$\overline{U} = 0.2, \quad \tau \in [1.95, 2]$	$\overline{U} = 0.58, \quad \tau \in [0.65, 1.25]$	$\overline{U} = 0.28, \quad \tau \in [1.4, 2]$
0.25	$\overline{U} = 0.19, \quad \tau \in [1.96, 2]$	$\overline{U} = 0.48, \quad \tau \in [1.04, 1.2]$	—
0.5	$\overline{U} = 0.1, \quad \tau \in [1.28, 1.34]$	—	—

5. Области устойчивости на плоскости (γ, U)**.** При проведении расчетов область изменения параметра U выбиралась такой же, как в предыдущем случае, параметр γ предполагался меняющимся от 0 до 1. Рассматривалась сетка из 100×100 узлов. Расчеты производились при различных значениях параметра τ, который изменялся в диапазоне от 0 до 100. Следует отметить, что при $\tau \leqslant 0.5$ области устойчивости для всех схем оказались пустыми.

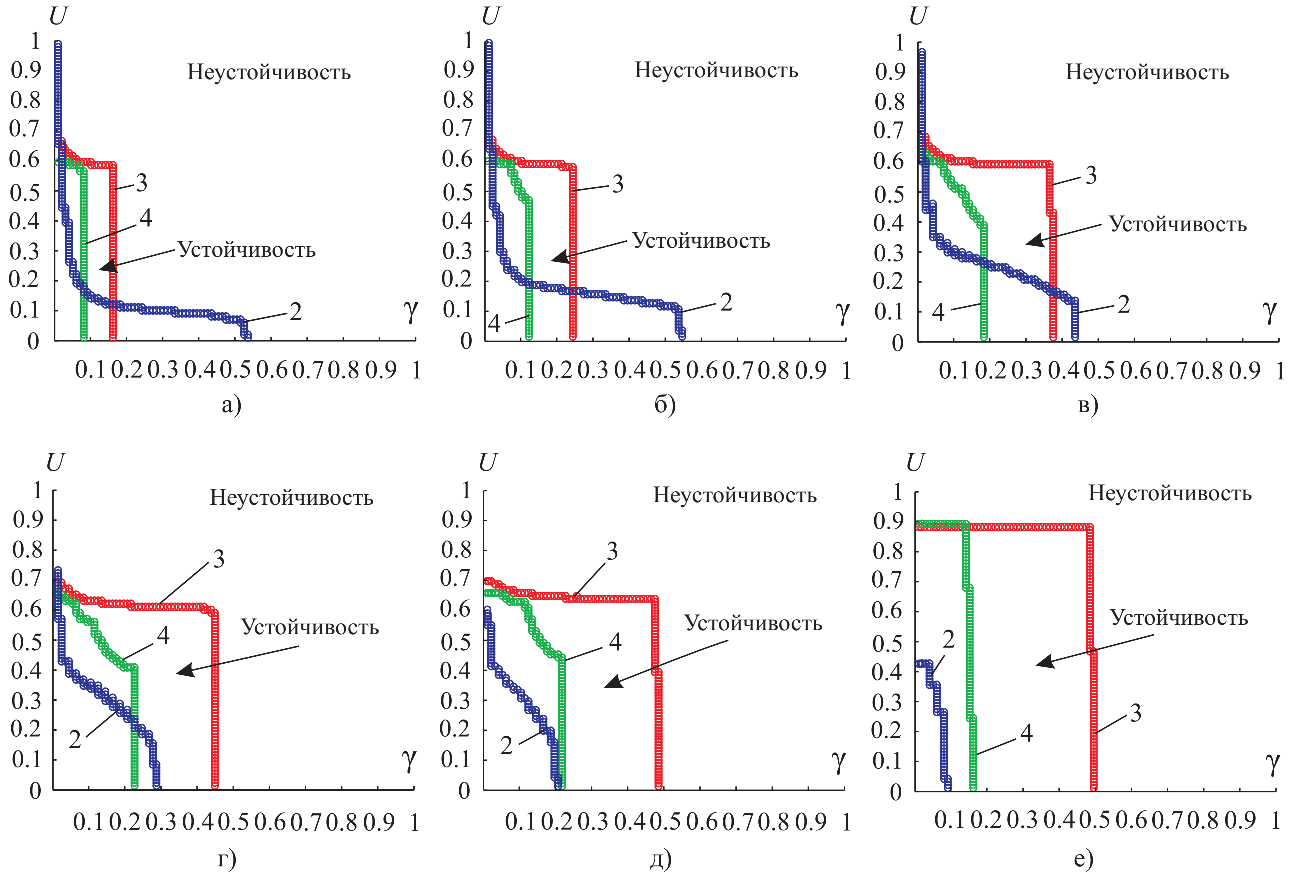

Рис. 4. Границы областей устойчивости на плоскости (γ, U) для схем 2–4 в случае режима 1: а) $\tau = 0.75$; б) $\tau = 1$; в) $\tau = 2$; г) $\tau = 5$; д) $\tau = 10$; е) $\tau = 50$. Кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3, кривая 4 — схема 4

В ходе расчетов были установлены максимально возможные значения γ и U для точек, входящих в области устойчивости, во всем диапазоне изменения τ. Ниже для этих значений будут использоваться обозначения M_γ и M_U соответственно. Для максимально возможных для обеспечения устойчивости значений γ и U при конкретных значениях τ будут использоваться обозначения $\overline{\gamma}$ и $\overline{U}$ соответственно.

5.1. Случай режима 1. На рис. 4 представлены границы областей устойчивости для случая режима 1.

Для схемы 2 область устойчивости при увеличении τ от 0.5 расширяется и имеет наибольшую площадь при $\tau = 1.6$, а при бóльших τ область сужается. Значение $M_\gamma = 0.55$ достигается при $\tau = 0.9$, значение $\overline{\gamma} = M_\gamma$ сохраняется до $\tau = 1$. Значение $M_U = 1$ достигается при $\tau = 0.55$. Такое значение $\overline{U}$ сохраняется до случая $\tau = 1.8$. При увеличении τ от 1.8 до 25 значения $\overline{U}$ уменьшаются, а при $\tau \geqslant 25$ значение $\overline{U}$ не меняется и равно 0.42.

В случае схемы 3 область устойчивости расширяется при увеличении значения τ. Максимально возможная площадь имеет место при наибольшем значении τ, равном 100. При увеличении τ от 0.55 значения $\overline{\gamma}$ увеличиваются от 0.04 до $M_\gamma = 0.495$ при $\tau = 25$, потом не меняясь. При $\tau \in [0.55, 1.75]$ значение $\overline{U}$ не меняется и равно 0.67, при $\tau \in [2, 7]$ значение $\overline{U}$ не меняется и равно 0.68. При бóльших значениях τ значения $\overline{U}$ начинают увеличиваться — достигая 0.7 при $\tau = 7.5$, 0.71 при $\tau = 10$, 0.8 при $\tau = 25$ и достигая $M_U = 0.92$ при $\tau = 100$.

При исследовании схемы 4 было установлено, что область устойчивости при возрастании τ расширяется и имеет наибольшую площадь при $\tau = 25$, а затем она сужается. Значения $\overline{\gamma}$ при увеличении τ также увеличиваются, например при $\tau = 0.8$ $\overline{\gamma} = 0.09$, при $\tau = 1.25$ $\overline{\gamma} = 0.14$, при $\tau = 4$ $\overline{\gamma} = 0.22$, при $\tau = 5$ $\overline{\gamma} = 0.225$. Значение $M_\gamma = 0.23$ достигается при $\tau = 6$, затем значения $\overline{\gamma}$ уменьшаются, например при $\tau = 10$ $\overline{\gamma} = 0.21$, при $\tau = 100$ $\overline{\gamma} = 0.12$. Интересно, что в случае данной схемы, как и в рассмотренном выше случае схемы 3, при $\tau \in [0.55, 1.75]$ значение $\overline{U}$ не меняется и равно 0.59, но затем оно возрастает и при $\tau \in [2, 3]$ оно равно 0.61, равно 0.64 при $\tau = 4$, 0.68 при $\tau = 7.5$, 0.8 при $\tau = 25$. Значение $M_U = 0.93$ достигается при $\tau = 100$.

Если сравнивать значения $\overline{U}$ и $\overline{\gamma}$ для всех рассмотренных схем, то их максимально возможные значения при малых $\tau \in [0.55, 2]$ достигаются в случае схемы 2. Для данной схемы их значения превосходят соответствующие значения для схем 3 и 4 до $\tau = 7.5$ — при таком значении $\overline{U}$ для схемы 2 равно 0.67, а для схем 3 и 4 равно 0.7 и 0.68 соответственно. При $\tau \geqslant 10$ значения $\overline{\gamma}$ для схемы 2 меньше, чем для схем 3 и 4.

Следует отметить, что в случае схемы 3 площадь области устойчивости больше, чем в случае схем 2 и 4. Схемы 2 и 4 в этом смысле соотносятся следующим образом: до $\tau = 3.5$ площади областей устойчивости для схемы 2 больше, чем для схемы 4, после этого значения τ ситуация прямо противоположна.

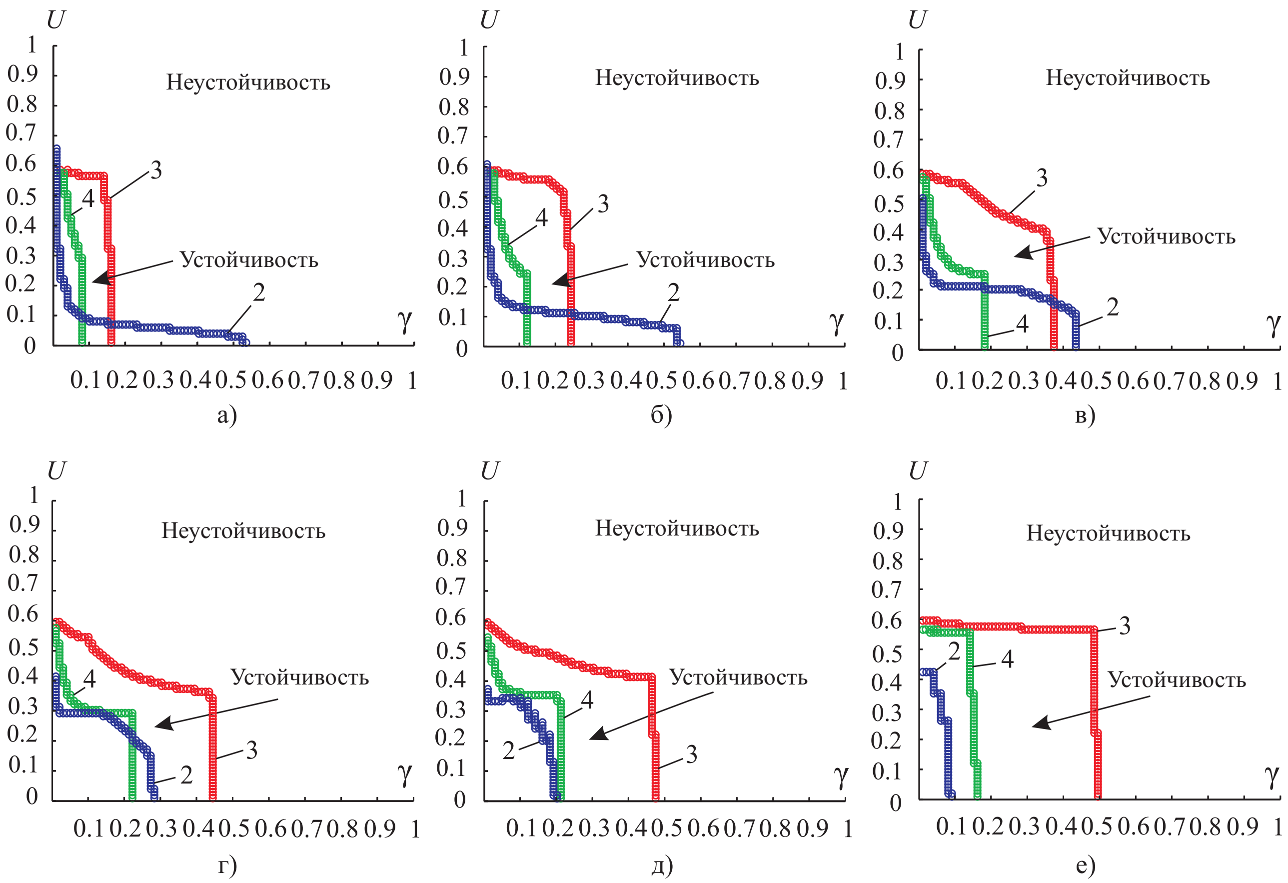

Рис. 5. Границы областей устойчивости на плоскости (γ, U) для схем 2–4 в случае режима 2: а) $\tau = 0.75$; б) $\tau = 1$; в) $\tau = 2$; г) $\tau = 5$; д) $\tau = 10$; е) $\tau = 50$. Кривая 2 — схема 2, кривая 3 — схема 3, кривая 4 — схема 4

5.2. Случай режима 2. Границы областей устойчивости для случая режима 2 представлены на рис. 5. Следует отметить, что при всех значениях параметра τ площади областей устойчивости в случае этого режима меньше, чем в случае режима 1. Для схемы 2 при увеличении τ от 0.55 область устойчивости расширяется и имеет наибольшую площадь при $\tau = 2.25$, а затем она сужается. Для схемы 3 область устойчивости расширяется при увеличении τ и имеет наибольшую площадь при $\tau = 100$. Для случая схемы 4 она расширяется до значения $\tau = 25$, затем происходит ее сужение. Для схемы 3 области устойчивости шире, чем для схем 2 и 4 при всех значениях τ. До значения $\tau = 4.5$ наименьшую площадь имеет область устойчивости для схемы 4, при $\tau > 4.5$ площади областей устойчивости для схем 3 и 4 больше, чем площадь область устойчивости для схемы 2.

Для случая схемы 2 значения $\overline{\gamma}$ при увеличении τ от 0.55 возрастают от 0.53 до 0.55 (значение M_γ) при $\tau = 1$, затем монотонно уменьшаются. Значения параметра $\overline{U}$ меняются следующим образом: монотонно убывают от 0.72 (значение M_U, соответствует $\tau = 0.55$), а при $\tau \geqslant 25$ имеем $\overline{U} = 0.42$.

При исследовании схемы 3 было выявлено, что значения $\overline{\gamma}$ при увеличении τ начинают возрастать, $M_\gamma = 0.495$ достигается при $\tau = 50$ и затем не меняетя. Интересно заметить, что аналогичное значение M_γ имеет место и в случае режима 1 (см. выше). Значение $\overline{U} = 0.59$ сохраняется во всем диапазоне τ вплоть до $\tau = 50$, после этого значения $\overline{U}$ начинает увеличиваться, достигая $M_U = 0.61$ при $\tau = 100$.

Для случая схемы 4 значения $\overline{\gamma}$ при увеличении τ последовательно увеличиваются, $M_\gamma = 0.225$ имеет место при $\tau = 4$ (интересно отметить, что в случае режима 1 значение M_γ является таким же), затем значения $\overline{\gamma}$ уменьшаются, достигая 0.12 при $\tau = 100$. Значения $\overline{U}$ не меняются и равны 0.58 (значение M_U) при $\tau \in [0.55, 7.5]$, а затем значения $\overline{U}$ меняются следующим образом: $\overline{U} = 0.55$ при $\tau = 10$, 0.52 при $\tau = 25$, 0.57 при $\tau = 50$, а при $\tau > 50$ возрастают до $\overline{U} = 0.58$ при $\tau = 100$.

Если сравнивать значения $\overline{\gamma}$ для всех рассмотренных схем в случае режима 2, то их максимально возможные значения при $\tau \in [0.55, 2.5]$ достигаются в случае схемы 2. Для данной схемы их значения превосходят соответствующие значения для схем 3 и 4. При $\tau = 2.5$ значения $\overline{\gamma}$ для схем 2 и 3 равны. При $\tau > 2.5$ значение $\overline{\gamma}$ для схемы 3 превышает значение для схем 2 и 4, при $\tau = 7.5$ значения $\overline{\gamma}$ для схем 2 и 4 совпадают, затем значения для схемы 4 уже превышают значения для схемы 2. Значения $\overline{U}$ для схемы 2 при $\tau \leqslant 1$ всегда превосходят соответствующие значения для схем 3 и 4.

6. Заключение. Представленные результаты позволяют судить о том, что даже в случаях простых однородных стационарных течений явные конечно-разностные решеточные схемы Больцмана в случае модели $D2Q9$ являются условно устойчивыми, причем устойчивость схем существенно зависит от входных параметров задачи. Из рассмотренных схем определенным преимуществом обладает схема с направленными разностями, аппроксимирующая систему (2) с первым порядком, поскольку ее области устойчивости в широком диапазоне изменения параметра τ имеют наибольшие площади для обоих режимов. Интересно отметить, что при $\gamma = 1$ решеточное уравнение Больцмана (1) обладает несомненными преимуществами по сравнению с конечно-разностными схемами (естественно, речь идет только о случаях рассмотренных в статье стационарных режимов).

Полученные в работе результаты можно рассматривать как решения тестовых задач, которые могут оказаться полезными при проведении исследований и сравнении друг с другом различных решеточных кинетических схем Больцмана, в том числе и схем для расчета многофазных течений. Определенную важность они будут представлять в задачах исследования неявных схем [20–22]. Большýю значимость имеют также исследования устойчивости по граничным условиям, поскольку, как показано в [23, 24], различные способы реализации граничных условий по-разному влияют на свойство устойчивости решеточных кинетических схем Больцмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
2. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
3. *Мачин Д.А., Четверушкин Б.Н.* Кинетические и lattice Boltzmann схемы // Математическое моделирование. 2004. **16**, № 3. 87–94.
4. *Куперштох А.Л.* Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 130–138.
5. *Куперштох А.Л.* Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ. Сер. “Математика, механика, информатика”. 2005. **5**, вып. 3. 29–42.
6. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
7. *Seta T., Takahashi R.* Numerical stability analysis of FDLBM // J. of Statistical Physics. 2002. **7**, N 1/2. 557–572.
8. *Mei R., Shyy W.* On the finite difference-based lattice Boltzmann method in curvilinear coordinates // J. of Computational Physics. 1998. **143**. 426–448.
9. *Sofonea V., Sekerka R.F.* Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // J. of Computational Physics. 2003. **184**. 422–434.

10. *Sofonea V., Lamura A., Gonnella G., Cristea A.* Finite-difference lattice Boltzmann model with flux limiters for liquid-vapor systems // Phys. Rev. E. 2004. **70**. 046702-1–046702-9.
11. *McNamara G.R., Zanetti G.* Use of the Boltzmann equation to simulate lattice gas automata // Phys. Rev. Letters. 1988. **61**, N 20. 2332–2335.
12. *He X., Luo L.-S.* A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // Phys. Rev. E. 1997. **55**, N 6. R6333–R6336.
13. *Abe T.* Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // J. of Computational Physics. 1997. **131**, N 1. 241–246.
14. *Luo L.-S.* Theory of the lattice Boltzmann method: lattice Boltzmann models for nonideal gases // Phys. Rev. E. 2000. **62**, N 4. 4982–4996.
15. *He X., Luo L.-S.* Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation // J. of Statistical Physics. 1997. **88**, N 3/4. 927–944.
16. *Sterling J.D., Chen S.* Stability analysis of lattice Boltzmann methods // J. of Computational Physics. 1996. **123**. 196–206.
17. *Kupershtokh A.L.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Computers and Mathematics with Applications. 2010. **59**. 2236–2245.
18. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
19. *Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C.* Matrix eigensystem routines. EISPACK Guide. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
20. *Кривовичев Г.В.* О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. 2012. **13**. 19–27.
21. *Rector D.R., Stewart M.L.* A semi-implicit lattice method for simulating flow // J. of Computational Physics. 2010. **229**. 6732–6743.
22. *Cao N., Chen S., Jin S., Martinez D.* Physical symmetry and the lattice symmetry in the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. 1997. **55**, N 1. R21–R24.
23. *Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A.* Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method // Phys. Rev. E. 2008. **77**. 056703-1–056703-16.
24. *Verschaeve J.C.G.* Analysis of the lattice Boltzmann Bhatnagar–Gross–Krook no-slip boundary condition: ways to improve accuracy and stability // Phys. Rev. E. 2009. **80**. 036703-1–056703-23.

Поступила в редакцию
23.01.2012