

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ВОЛНОВЕДУЩИХ И РЕЗОНАНСНЫХ СТРУКТУР С ОСОБЕННОСТЯМИ

А. И. Ерохин¹

Исследуются волноведущие и резонансные структуры с особенностями, а именно волновод, имеющий входящие ребра, и резонатор, содержащий диэлектрик аксиально-симметричной формы кусочно-постоянного радиуса. Предлагаются математические модели данных систем. Расчеты проводятся проекционными методами различной модификации. На основе предложенных моделей построены и реализованы эффективные вычислительные алгоритмы.

Ключевые слова: волновод, резонатор, входящие ребра, входящие углы, проекционные методы.

1. Введение. Современные технологии предлагают огромные возможности по созданию различных электромагнитных систем с наперед заданными геометрическими и электродинамическими параметрами. Устройства, которые буквально тридцать лет назад были уникальными, становятся предметами массового использования. Поэтому одним из важнейших вопросов по-прежнему остается вопрос экономической эффективности и целесообразности создания устройств с заданными параметрами. Во многих случаях достаточно совсем немного изменить хотя бы один параметр системы, а на выходе можно получить как существенное улучшение, так и ухудшение ее производительности. Решение данного вопроса невозможно представить себе без предварительного математического моделирования исследуемой структуры.

Особенно важным математическое моделирование становится в случае, когда системы имеют так называемые физические особенности. Среди таких особенностей систем можно выделить две большие группы: геометрические и электродинамические. Геометрические особенности могут являться следствием создания структур сложной геометрической формы или просто имеющих неоднородность поверхности системы. Примером такой геометрической конструкции служит волновод с входящими ребрами. Подобные системы широко используются в микроволновых устройствах и цепях [1]. Входящие углы в волноводе могут быть по многим причинам: как по техническим, например вследствие состыковки нескольких волноводов, так и для получения специального физического эффекта. К примеру, гребенчатый прямоугольный волновод, имеющий в своем поперечном сечении входящие прямые углы, может использоваться в качестве фильтра для пассивного микроволнового устройства или настроенного элемента в нем [2, 3]. С помощью входящих углов в волноводе можно также моделировать наличие дефектов в поверхности системы, например царапины, или щупы, возбуждающие волновод.

Очень часто математические модели, описывающие системы с физическими особенностями, имеют особенности математического характера. Так, в случае волновода с входящим ребром известно, что решение задачи, описывающей данную систему, имеет сингулярность, которая значительно осложняет численный эксперимент [4]. Решить эту проблему можно с помощью выделения этой особенности инструментами математической физики и корректировки численного алгоритма с учетом полученной особенности.

К системам с особенностями электродинамического характера можно отнести конструкции, имеющие наполнение материалами с различными диэлектрическими и магнитными свойствами. Примером системы данного типа служит диэлектрический резонатор, важными характеристиками которого являются спектр его резонансных частот и добротность. С помощью выбора диэлектрической проницаемости диэлектрика, его формы и размера, а также комбинации нескольких диэлектриков можно существенно менять спектр частот, распределение полей, а также значительно увеличить добротность [5]. Резонансные системы находят широкое применение при создании узкополосных фильтров, прецизионной измерительной аппаратуры, для стабилизации СВЧ-генераторов, а также при создании чувствительных элементов для измерения различных физических и химических параметров окружающей среды.

Большой интерес представляют резонаторы аксиально-симметричных форм кусочно-постоянного радиуса. Помимо перечисленных свойств резонаторов, предполагается, что такие элементы могут найти применение при конструировании проводящих систем с малыми потерями. В частности, такие резонаторы экспериментально исследуются на кафедре физики колебаний физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова [6].

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы, 119992, Москва; аспирант, e-mail: forerokhin@gmail.com

В настоящей статье исследуются цилиндрическая волноведущая система, имеющая в конечном ее участке входящие ребра постоянного раствора, и резонансная диэлектрическая структура с диэлектриком кусочно-постоянного радиуса. С помощью такой резонансной системы в случае малых диэлектрических потерь и при размерах поверхности резонатора, много больших геометрических размеров диэлектрика, можно моделировать открытые системы [7].

Несмотря на качественно различные физические особенности этих систем, оказывается, что для их исследования удобно использовать проекционные методы в их различной модификации. Так, для численного исследования резонансной структуры удобно использовать проекционно-сеточный метод или метод конечных элементов (МКЭ) [8, 9]. Трехмерная задача расчета спектра, вследствие аксиальной симметрии резонатора, может быть сведена к двумерной, а наличие прямых углов в сечении определяет выбор конечных элементов. Для исследования волновода используется проекционный метод в виде неполного метода Галеркина, в котором в качестве базиса применяются собственные функции поперечного сечения. Так как такое сечение имеет входящий угол, в общем случае не доходящий до центра круга, то спектральная задача для этой области не имеет аналитического решения, вследствие чего для ее решения необходимо применять численный метод. Наличие входящего угла определяет особенность решения спектральной задачи в виде сингулярности в окрестности входящего угла, поведение которой качественно можно описать с необходимой наперед заданной точностью. Поэтому для решения такой задачи удобно использовать проекционный метод снова в форме МКЭ, поскольку, выбирая в нем в качестве пробной функции полученную теоретически сингулярную функцию, можно точно аппроксимировать особенность.

С помощью предложенных моделей проведено численное исследование указанных выше структур. Рассмотрено влияние входящих ребер на модовую структуру поля волновода с входящими ребрами. Для резонансной структуры исследован спектр и распределение электромагнитного поля в зависимости от ее диэлектрического заполнения.

2. Задача о резонансной структуре. Рассмотрим цилиндрический резонатор, имеющий внутри аксиально-симметричный диэлектрик с кусочно-постоянным радиусом (рис. 1). Будем считать, что диэлектрические потери пренебрежимо малы, т.е. диэлектрическая проницаемость ε — вещественная величина, принимающая положительные значения. Ограничимся колебаниями электрического типа.

Используя цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z) , начало координат которой совпадает с центром левого торца диэлектрика, а ось Oz направлена вдоль оси симметрии резонатора, с помощью потенциала Боргниса

$$U = u(\rho, z)e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

запишем скалярную краевую задачу для расчета спектра [7]:

$$\begin{cases} Lu - \frac{m^2}{\rho} u + \rho k^2 \varepsilon u = 0, \\ u|_{\partial Q/Oz} = 0, \\ \varepsilon_1 u_1|_{S_{\perp}} = \varepsilon_2 u_2|_{S_{\perp}}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{S_{\perp}} = \frac{\partial u_2}{\partial n}|_{S_{\perp}}, \\ u_1|_{S_{\parallel}} = u_2|_{S_{\parallel}}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}|_{S_{\parallel}} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}|_{S_{\parallel}}, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{Oz \cap \partial Q} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $Lu \equiv \text{div}(\rho \text{grad } u)$ (дивергенция понимается как операция в двумерной прямоугольной системе координат (ρ, z)). Здесь Q — прямоугольник, вращением которого вокруг оси Oz получается объемная структура резонатора; ∂Q — его граница; Ω — область (рис. 2), вращением которой получается объемная структура диэлектрика; $\partial\Omega$ — ее граница; S_{\parallel} — часть границы $\partial\Omega$, параллельная оси Oz ; S_{\perp} — перпендикулярная

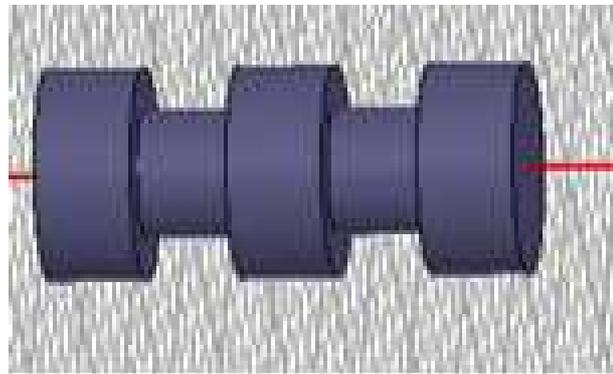


Рис. 1. Аксиально-симметричный диэлектрик кусочно-постоянного радиуса, принимающего два значения, для 5 секций

часть; индексы 1 и 2 обозначают величины, относящиеся к диэлектрику и вакууму соответственно; n — внешняя нормаль к диэлектрику.

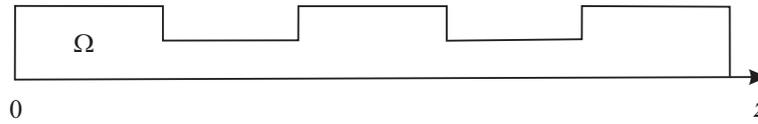


Рис. 2. Разрез аксиально-симметричной структуры кусочно-постоянного радиуса, принимающего два значения, для 5 секций

Обозначим через X пространство функций $u \in H^1$, удовлетворяющих граничному условию первого рода задачи (1). Пусть X_u — подпространство X , элементы u которого удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \varepsilon_1 u_1|_{S_\perp} = \varepsilon_2 u_2|_{S_\perp}, \\ u_1|_{S_\parallel} = u_2|_{S_\parallel}, \end{cases}$$

и пусть X_v — подпространство X , элементы v которого удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \varepsilon_2 v_1|_{S_\parallel} = \varepsilon_1 v_2|_{S_\parallel}, \\ v_1|_{S_\perp} = v_2|_{S_\perp}. \end{cases}$$

Обобщенная постановка задачи имеет вид: найти нетривиальные функции $u \in X_u$ и соответствующие им значения k^2 , удовлетворяющие следующему уравнению для всех функций $v \in X_v$:

$$\int_Q \rho(\text{grad } u, \text{grad } v) dq + m^2 \int_Q \frac{uv}{\rho} dq = k^2 \int_Q \rho \varepsilon uv dq.$$

Для численного решения задачи использовался метод конечных элементов с регулярным разбиением области.

3. Результаты расчета задачи о резонансной структуре. С помощью математического моделирования диэлектрического резонатора получены следующие результаты [7].

1. Построен спектр частот для полностью металлизированного эбонитового цилиндра, который соответствует экспериментальным данным.

2. Проведен расчет собственных частот для системы с диэлектриком аксиально-симметричной формы кусочно-постоянного радиуса, принимающего два значения, состоящим из одиннадцати секций.

3. Выяснено, что существуют частоты, на которых электромагнитное поле практически полностью сосредоточено в диэлектрике. При металлизации нескольких секций такой структуры поле может сосредотачиваться только в нескольких из них, при этом не обязательно в металлизированных. Возбуждение определенных секций наблюдалось также и при экспериментальном исследовании подобных структур.

4. Рассмотрена структура, геометрия которой описана в предыдущем примере, но с добавлением двух диэлектрических слоев разной диэлектрической проницаемости. Получено, что существуют частоты, на которых возбуждаются только несколько секций, при этом поле сосредоточено как в добавленном слое с большей диэлектрической проницаемостью, так и в исходной структуре.

4. Задача о волноводе с входящими ребрами. Рассмотрим бесконечный круговой идеально проводящий цилиндр, у которого в поперечном сечении некоторой его части длины a имеется входящий угол ω_0 (рис. 3).

Ограничимся скалярной постановкой задачи. Считаем, что слева из бесконечности падает волна с амплитудой A_{n_0} и постоянной распространения вдоль оси волновода $\tilde{\gamma}_{n_0}$, соответствующей n_0 -у собственному

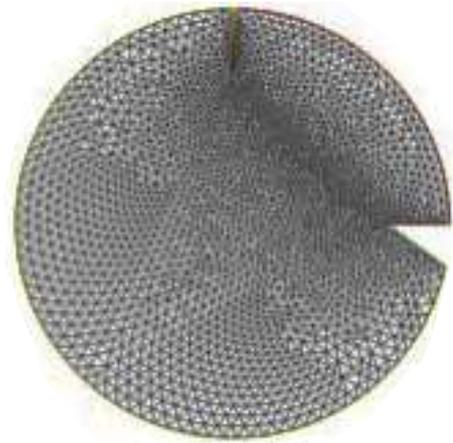


Рис. 3. Сечение нерегулярной части волновода, имеющего два входящих ребра

значению $\tilde{\lambda}_{n_0}$ оператора Лапласа для сечения регулярной части волновода. Используя цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, z) , начало координат которой совпадает с центром левого торца нерегулярной части волновода, а ось Oz направлена вдоль оси цилиндра, запишем краевую задачу для волн амплитуды u , возникающих в волноводе [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u(M, z) = 0, \quad M \in S_z, \quad z \in (-\infty; +\infty), \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ u|_{z=0-0} = u|_{z=0+0}, \\ u|_{z=a-0} = u|_{z=a+0}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0+0}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a-0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a+0}, \\ u|_{z \leq 0} = A_{n_0} e^{i \tilde{\gamma}_{n_0} z} \tilde{\phi}_{n_0}(M) + \sum_n R_n e^{-i \tilde{\gamma}_n z} \tilde{\phi}_n(M), \\ u|_{z \geq 0} = \sum_n T_n e^{i \tilde{\gamma}_n z} \tilde{\phi}_n(M). \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\tilde{\phi}_n, \tilde{\lambda}_n$ — ортонормированные собственные функции и собственные значения поперечного сечения регулярной части волновода (без выреза); S_z — сечение волновода с координатой z ; R_n и T_n — коэффициенты отражения и прохождения n -й гармоники соответственно; Σ — поверхность волновода; $\tilde{\gamma}_{n_0}^2 = k^2 - \tilde{\lambda}_{n_0}$; k^2 — постоянный коэффициент.

С помощью несложных преобразований [10] задачу (2) можно свести к следующей краевой задаче в ограниченной области при $z \in (0; a)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u(M, z) = 0, \quad M \in S_z, \quad z \in (0; a), \\ u|_{\Sigma} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2A_{n_0} i \tilde{\gamma}_{n_0} \tilde{\phi}_{n_0}(M) - \sum_n i \tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\phi}_n) \Big|_{S_0} \tilde{\phi}_n(M), \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=a} = \sum_n i \tilde{\gamma}_n (u, \tilde{\phi}_n) \Big|_{S_a} \tilde{\phi}_n(M). \end{array} \right.$$

Приближенное решение задачи удобно искать с помощью неполного метода Галеркина, а именно в виде его конечного разложения по собственным функциям поперечного сечения нерегулярной части волновода: $u^N = \sum_{n=1}^N C_n(z) \phi_n(M)$, $z \in (0; a)$, где $\phi_n(M)$ — ортонормированные собственные функции оператора Лапласа для сечения S_z . Система для коэффициентов разложения имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m''(z) + \gamma_m^2 C_m(z) = 0, \quad m = 1, \dots, N, \\ C_m'(0) = 2A_{n_0} i \tilde{\gamma}_{n_0} \phi_{mn_0}^{S_0} - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i \tilde{\gamma}_n \phi_{mn}^{S_0} \phi_{kn}^{S_0} \right) C_k(0), \\ C_m'(a) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N i \tilde{\gamma}_n \phi_{mn}^{S_a} \phi_{kn}^{S_a} \right) C_k(a). \end{array} \right.$$

Здесь $\gamma_n^2 = k^2 - \lambda_n$, $(\phi_k(M), \tilde{\phi}_n(M)) \Big|_{S_0} = \phi_{kn}^{S_0}$, $(\phi_k(M), \tilde{\phi}_n(M)) \Big|_{S_a} = \phi_{kn}^{S_a}$ и λ_n — собственные значения оператора Лапласа для сечения S_z .

Для численного расчета спектральной задачи для сечения с вырезом использовался метод конечных элементов.

4. Результаты расчета задачи о волноводе с входящими ребрами. С помощью математического моделирования волновода с входящими ребрами получены следующие результаты [10].

1. Произведен расчет модовой структуры поля нерегулярного волновода с входящими углами.
2. Получено, что наличие входящих углов приводит к частичному отражению падающей волны и возбуждению других гармоник.
3. Показано, что с увеличением глубины входящего угла и его величины коэффициент прохождения падающей гармоники убывает, а ее энергия переходит в другие волны.
4. В случае незначительного выреза волновода, размеры которого много меньше размеров сечения, падающая волна практически не претерпевает никаких изменений.
5. Численные эксперименты показали, что в некоторых случаях присутствуют гармоники, которые остаются невозбужденными. Этот эффект с физической точки зрения можно объяснить тем, что при данной конфигурации волновода между возбуждаемыми и невозбуждаемыми волнами отсутствует энергетический обмен, а значит, если слева запустить такие волны, то они должны пройти без искажения. Данный факт был подтвержден численными расчетами. Обнаруженный эффект можно использовать для выбора рабочей моды волновода, а также для создания модовых фильтров.

5. Заключение. С помощью математического моделирования исследованы резонансная структура с диэлектрическим аксиально-симметричным наполнением кусочно-постоянного радиуса и волноведущая система с входящими ребрами. Получен ряд результатов, хорошо согласующихся с физической картиной явления и подтвержденных экспериментально. Показано, что проекционные методы различной модификации хорошо применимы к задачам данного типа. Предлагаемый алгоритм может быть модернизирован в плане учета в нем математических особенностей, возникающих вследствие наличия физических неоднородностей исследуемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schiff B., Yosibash Z. Eigenvalues for waveguides containing re-entrant corners by a finite-element method with superelements // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2000. 48, N 2. 214–220.
2. Yahia M., Tao J.W., Benzina H., Abdelkrim M.N. Ridged waveguide filter optimization using the neural networks and a modified simplex method // Int. J. of Innovation, Management and Technology. 2010. 1, N 3. 259–263.
3. Cogollos S., Marini S., Boria V.E., Soto P., Esteban A.V.H., Morro J.V., Gimeno B. Efficient modal analysis of arbitrarily shaped waveguides composed of linear, circular, and elliptical arcs using the BI-RME method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2003. 51, N 12. 2378–2389.
4. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
5. Моденов В.П., Гуцин Р.А., Ерохин А.И., Шапкина Н.Е. Исследование добротности многослойного сферического диэлектрического резонатора // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 2. 3–6.
6. Афонин Д.Г., Малышкин А.К. Электродинамическая система с периодической структурой // 12-я Междунар. конф. “СВЧ техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь: Вебер, 2002. 379–380.
7. Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е., Шапкина Н.Е. Расчет резонансных частот открытого диэлектрического аксиально-симметричного резонатора с кусочно-постоянным радиусом // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. № 2. 21–24.
8. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
9. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
10. Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е. Математическое моделирование цилиндрического волновода с деформацией боковой поверхности // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2011. № 6. 127–130.

Поступила в редакцию
06.02.2012