УДК 519.6

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ БИНГАМА

Л. В. Муравлёва[1], **Е. А. Муравлёва**[1]

Рассматривается разностная схема для расчета плоских течений вязкопластической среды Бингама. В качестве математической модели среды используется вариационное неравенство Дюво–Лионса. Обе компоненты скорости аппроксимируются в узлах основной сетки, давление и все компоненты тензоров скоростей деформации и напряжений — в узлах полусмещенной сетки. Показано, что итерационный метод типа Узавы, используемый для нахождения решения вариационного неравенства, требует специальной адаптации в случае сеточной задачи. В качестве модельного примера рассматривается численное решение задачи о течении вязкопластической среды в каверне. Полученные результаты сравниваются с известными. Статья подготовлена к печати во время пребывания Е. А. Муравлёвой в Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, 04103, Leipzig, Germany. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11–01–00181-a и 09–01–00565-a).

Ключевые слова: вязкопластическая среда Бингама, вариационные неравенства, расширенный функционал Лагранжа, итерационный метод, полусмещенные сетки.

1. Введение. В природе и технике существует широкий круг материалов, таких как свежий бетон, геоматериалы (глинистые почвы, некоторые виды нефтей, буровые растворы, сели, магма), коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, металлы при обработке давлением, кровь в капиллярах, пищевые продукты, зубная паста и др., которые обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела — как несжимаемая вязкая жидкость.

Интерес к этой модели возник на рубеже XIX–XX веков после того, как в работах Шведова [1], Бингама [2] и др. было показано, что ряд реальных материалов обнаруживает такой тип реологического поведения. Модель была предложена для описания движения суспензий в условиях чистого сдвига (одномерная задача). Это — классический эксперимент, при котором можно получить зависимость между единственной ненулевой компонентой тензора напряжений и соответствующей компонентой тензора скоростей деформации (остальные $D_{ij} = 0$), например $\sigma_{12} = f(D_{12})$. Фактически это соответствует одноосному напряженному состоянию.

Переход к определяющим соотношениям в условиях многоосного (многокомпонентного) состояния является нетривиальной задачей. Позднее Генки [3] и Ильюшин [4] предложили пространственное обобщение уравнения состояния Шведова–Бингама и решили ряд задач для случая плоских течений вязкопластической среды при исследовании технологических задач обработки металлов давлением. В дальнейшем эта модель подробно исследовалась Олдройдом [5] и Прагером [6], Мосоловым и Мясниковым [7], а также Дюво и Лионсом [8]. Анализ различных вязкопластических материалов и перечень многих известных аналитических решений приведены в [7, 9, 10]. В [11, 12] решались задачи для более сложных моделей: вязкоупругопластической среды и течения вязкопластической жидкости в пористых средах. Дальнейшему исследованию математических свойств решений задач вязкопластичности посвящены работы [13–17].

2. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$, Γ — граница области. Изотермическое течение несжимаемой вязкопластической среды (среды Бингама, или бингамовской жидкости) в течение временно́го интервала $(0, T)$ описывается следующей системой уравнений и определяющих соотношений:

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right] = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{2}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; Л. В. Муравлёва, доцент, e-mail: lvmurav@gmail.com; Е. А. Муравлёва, мл. науч. сотр., e-mail: catmurav@gmail.com

$$\boldsymbol{\sigma} = -pI + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{cases} 2\mu \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + \sigma_s \dfrac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})}{\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|}, & \text{если} \quad \left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| \neq 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| \leqslant \sigma_s, & \text{если} \quad \left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Систему (1)–(3) необходимо дополнить начальными и краевыми условиями. Для простоты будем рассматривать только краевые условия Дирихле:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, && \nabla \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0, \\ &\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, T), && \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{v}_B(t) \cdot \boldsymbol{n}\, d\Gamma = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in (0, T). \end{aligned} \tag{4}$$

В уравнениях (1)–(4) используются стандартные обозначения: ρ, μ, σ_s — плотность, коэффициент вязкости и предел текучести бингамовской среды соответственно; $\boldsymbol{v}$ — неизвестное поле скоростей; $\boldsymbol{f}$ — заданное поле внешних сил; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; p — давление; $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений. Если задан произвольный тензор второго ранга с компонентами T_{ij}, то разложение его на шаровую часть и девиатор имеет вид $T_{ij} = T\delta_{ij} + T_{ij}^D$, где $T = \dfrac{1}{3} T_{kk}$ и $T_{kk}^D = 0$. В механике $|\boldsymbol{\tau}|$ называют интенсивностью напряжений. $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}\left[\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^{\text{т}}\right]$ — тензор скоростей деформаций с нормой $\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| = \left(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left|D_{ij}(\boldsymbol{v})\right|^2\right)^{1/2}$, $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней единичной нормали на Γ.

Заметим, что если $\sigma_s = 0$, то система (1)–(4) сводится к системе уравнений Навье–Стокса, моделирующей изотермическое течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости. В случае $\sigma_s > 0$ система (1)–(4) выполняется в области движения (т.е. $\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| > 0$) и, вообще говоря, не имеет смысла в жесткой зоне Ω_0: $\Omega_0 = \left\{\{\boldsymbol{x}, t\} \in \Omega \times (0, T) \,|\, D(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}, t) = 0\right\}$. Тензор напряжений в жесткой зоне не определен.

Модель Бингама является двухпараметрической моделью. Если в определяющих соотношениях вязкопластической среды положить $\sigma_s = 0$ или $\mu = 0$, то эти уравнения формально перейдут в хорошо известные определяющие соотношения вязкой жидкости или идеальной пластической среды. Если $\sigma_s > 0$, то в потоке могут быть зоны, в которых жидкость ведет себя как твердое тело (жесткие зоны). При возрастании σ_s эти зоны увеличиваются, а при достаточно большом σ_s блокируют течение. Как правило, традиционно рассматриваются два вида жестких зон: зоны застоя, в которых среда покоится, и ядра течения, в которых среда движется как твердое тело. Например, при течении в трубе ядра течения находятся строго внутри области, зоны застоя примыкают к неподвижной границе.

Когда существуют оба вида движения, необходимо ввести "предельную поверхность". Эта поверхность разделяет две области с разным движением материала. Таким образом, в задачах о течении вязкопластической среды характерной особенностью является необходимость строить решения в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает большие трудности при построении эффективных методов их исследования. Основная сложность при численном моделировании течения вязкопластической среды связана с сингулярностью определяющих соотношений (3) и невозможностью определить напряжения в тех областях, где скорость деформации равна нулю. Для того чтобы преодолеть отмеченные трудности, вводятся различные модификации модели бингамовской жидкости. Они приближают поведение вязкопластической среды. Запишем (3) в виде $\tau_{ij} = \eta\Big(\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|\Big) D_{ij}$, $\eta = 2\mu + \dfrac{\sigma_s}{\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|}$, если $\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| \neq 0$, и $|\boldsymbol{\tau}| \leqslant \sigma_s$, если $\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right| = 0$.

Функция $\eta(D)$ называется эффективной вязкостью. Методы регуляризованной вязкости состоят в аппроксимации определяющих соотношений непрерывной функцией, которая описывает одновременно жесткую зону и зону течения. Таким образом, среда рассматривается как нелинейная вязкая жидкость (без использования предельной поверхности): $\tau_{ij} = \eta_\epsilon\Big(\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|\Big) D_{ij}$, $\epsilon \ll 1$, где $\eta_\epsilon\Big(\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|\Big) \to \eta\Big(\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|\Big)$ при $\epsilon \to 0$. Наиболее популярные модели:

1) Берковьера–Энгельмана [18]: $\quad \eta_\epsilon = 2\mu + \sigma_s \left(\dfrac{1}{\left[\epsilon^2 + \left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|^2\right]^{1/2}}\right)$,

2) Папанастаса [19]: $\quad \eta_\epsilon = 2\mu + \sigma_s \left(\dfrac{1 - e^{-|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})|/\epsilon}}{\left|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\right|}\right)$.

При использовании регуляризованных моделей при $\epsilon \to 0$ (т.е. когда модель приближает модель

Бингама) численные методы становятся менее эффективными и время вычислений растет очень быстро. Одним из недостатков регуляризованной модели является следующее: при значениях функции $\boldsymbol{f}$ в правой части (1), меньших некоторого ненулевого критического значения, в среде Бингама течение в области отсутствует. При использовании регуляризованных моделей течение имеет место всегда, хотя и с малыми скоростями. В случае нестационарной задачи регуляризованная модель часто неправильно воспроизводит поведение решения [20–22]. Кроме того, для регуляризованных моделей не определено понятие жесткой зоны и наличие жесткой зоны вводится условием малости деформаций или условием Мизеса $|\boldsymbol{\tau}| = \sigma_s$. Это иногда приводит к неточному решению.

Альтернативой регуляризованным моделям могут служить вариационные методы. Постановка даже простейших задач для вязкопластической среды приводит к краевым задачам для нелинейных уравнений в областях с неизвестными границами. Здесь весьма плодотворным оказался вариационный подход [7], в частности метод вариационных неравенств [8]. Вариационная постановка, впервые предложенная А.А. Ильюшиным [4], дает возможность построения эффективных методов анализа конкретных задач. В частности, она позволяет дать метод изучения геометрической структуры решений, их асимптотического поведения, разработать эффективные численные методы. Различные алгоритмы для решения задач оптимизации можно найти в [23]. В монографиях [24–26] разработаны численные методы решения вариационных неравенств для среды Бингама, основанные на нерегуляризованной модели Бингама и множителях Лагранжа. В отечественной литературе методам решения вариационных неравенств посвящены работы [27–29].

3. Вариационная постановка. Пусть $\boldsymbol{D} : T = \sum\limits_{i,j=1}^{n} D_{ij} T_{ij}$. Любое решение нелинейной системы (1)–(4) удовлетворяет следующей вариационной задаче: найти $\boldsymbol{v}(t)$, $p(t) \in \big(H^1(\Omega)\big)^n \times L^2(\Omega)$, такие, что для каждого $t \in (0, T)$ справедливо

$$\rho \int\limits_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t)\big)\, d\boldsymbol{x} + \rho \int\limits_\Omega \big(\boldsymbol{v}(t) \cdot \nabla\big)\boldsymbol{v}(t) \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t)\big)\, d\boldsymbol{x} + 2\mu \int\limits_\Omega \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}(t)\big) : \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t)\big)\, d\boldsymbol{x} +$$
$$+ \sigma_s \int\limits_\Omega \Big(\big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big| - \Big|\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}(t)\big)\Big|\Big)\, d\boldsymbol{x} \geqslant \int\limits_\Omega \boldsymbol{f}(t) \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t)\big)\, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{u} \in U_B(t), \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_B(t) \quad \text{на} \quad \Gamma,$$
$$U_B = \Big\{\boldsymbol{u} \in \big(H^1(\Omega)\big)^2 \,|\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_B \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0\Big\}.$$

Таким образом, задача (5) является вариационной постановкой для (1)–(4), при этом она автоматически включает в себя задачу о "предельной поверхности". Заметим, что давление можно ввести в вариационную формулировку как множитель Лагранжа, соответствующий ограничению $\nabla \cdot \big(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}(t)\big) = 0$.

Предположим, что течение является установившимся и медленным, т.е. можно пренебречь силами инерции по сравнению с силами вязкости (безынерционное приближение или приближение Стокса). Тогда систему уравнений движения (1), (2) можно заменить следующей системой уравнений:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T), \tag{6}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, T). \tag{7}$$

Вариационная постановка (5) принимает вид

$$2\mu \int\limits_\Omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} + \sigma_s \int\limits_\Omega \Big(\big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big| - \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\big|\Big)\, d\boldsymbol{x} \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_\Omega \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in U_B, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_B \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{8}$$

Решение $\boldsymbol{v}$ задачи (8) существует и единственно [8]. В дальнейшем будем рассматривать только плоские задачи. Введем следующий функционал (функционал Ильюшина):

$$J(\boldsymbol{u}) = \mu \int\limits_\Omega \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big|^2\, d\boldsymbol{x} + \sigma_s \int\limits_\Omega \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big|\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{x}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v} = \arg\min_{\boldsymbol{u} \in U_B} J(\boldsymbol{u}). \tag{10}$$

В работах [4, 7] было доказано, что решение задачи (6), (7), (3) является точкой минимума функционала (9). Эквивалентность постановок (9), (10) и (8) показана в [8].

Главная сложность при нахождении численного решения вариационной задачи (8) связана с недифференцируемостью слагаемого $\int\limits_\Omega \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\big|\,d\boldsymbol{x}$. В монографии [24] предложено несколько способов преодоления этой трудности. Широкое распространение получил метод множителей Лагранжа. Основная идея данного подхода заключается в разделении нелинейности и дифференцирования, которое происходит следующим образом: вводится независимая переменная $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) \in Q$, где $Q = \Big\{\boldsymbol{q} \,\big|\, \boldsymbol{q} \in \big(L^2(\Omega)\big)^4;\ \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{q}\Big\}$ — пространство суммируемых с квадратом в Ω симметричных тензоров второго ранга.

Определим функциональное пространство W и функционал $J(,)\colon W \to \mathbb{R}\Big(\big(H^1\Omega\big)^2 = U\Big)$:

$$W = \big\{\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}\} \,|\, \boldsymbol{u} \in U,\, \boldsymbol{q} \in Q,\, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big\}, \quad J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) = \mu \int\limits_\Omega \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})\big|^2\,d\boldsymbol{x} + \sigma_s \int\limits_\Omega |\boldsymbol{q}|\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{x}. \tag{11}$$

Заметим, что задача (8) эквивалентна следующей: найти $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma}\} \in W$,

$$J(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant J(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) \quad \forall\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) \in W. \tag{12}$$

Ограничение $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})$ можно снять с помощью множителя Лагранжа. Лагранжиан, соответствующий задаче (11), (12), естественно определить следующим образом:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{q};\boldsymbol{\lambda}) = \mu \int\limits_\Omega |\boldsymbol{q}|^2\ d\boldsymbol{x} + \sigma_s \int\limits_\Omega |\boldsymbol{q}|\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \big(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{q}\big) : \boldsymbol{\lambda}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\,d\boldsymbol{x}. \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda} \in Q$ является множителем Лагранжа, который можно интерпретировать как девиатор тензора напряжений. Тогда решение $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}\}$ является седловой точкой $\mathcal{L}$, т.е. $\mathcal{L}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{\gamma};\boldsymbol{\tau}) \leqslant \mathcal{L}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{q};\boldsymbol{\tau})$. Для улучшения сходимости в работе [25] был введен расширенный лагранжиан $\mathcal{L}_r : U \times Q \times Q \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_r(\boldsymbol{u};\boldsymbol{q};\boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{q};\boldsymbol{\lambda}) + r \int\limits_\Omega \big|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{q}\big|^2\,d\boldsymbol{x}, \quad r \geqslant 0. \tag{14}$$

Доказано [25], что седловая точка $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\tau}\}$ расширенного лагранжиана $\mathcal{L}_r$ является седловой точкой лагранжиана $\mathcal{L}$, а пара $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma}\}$ — решением задачи (8) при всех $r > 0$.

4. Итерационный метод ALG2. Алгоритм [25], приведенный ниже, представляет собой обобщение метода Узавы для нахождения седловой точки нелинейной задачи.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Пусть заданы произвольные } \big\{\boldsymbol{\gamma}^0,\boldsymbol{\tau}^1\big\} \in Q \times Q. \text{ Для } n = 0,1,2,\ldots \text{ с известными } \big\{\boldsymbol{\gamma}^{n-1},\boldsymbol{\tau}^n\big\}\\
\text{последовательно выполняются следующие шаги.}\\
\text{Шаг 1. Найти } \boldsymbol{v}^n \in U_B, \text{ такой, что } \mathcal{L}_r\big(\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{\gamma}^{n-1};\boldsymbol{\tau}^n\big) \leqslant \mathcal{L}_r\big(\boldsymbol{u};\boldsymbol{\gamma}^{n-1};\boldsymbol{\tau}^n\big) \quad \forall\ \boldsymbol{u} \in U_B.\\
\text{Шаг 2. Найти } \boldsymbol{\gamma}^n \in Q, \text{ такой, что } \mathcal{L}_r\big(\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{\gamma}^n;\boldsymbol{\tau}^n\big) \leqslant \mathcal{L}_r\big(\boldsymbol{v}^n;\boldsymbol{q};\boldsymbol{\tau}^n\big) \quad \forall\ \boldsymbol{q} \in Q.\\
\text{Шаг 3. Вычислить } \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}^n + r\Big(\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}^n\big) - \boldsymbol{\gamma}^n\Big).
\end{array}\right\} \tag{15}$$

Данный алгоритм был предложен для реализации в методе конечных элементов (МКЭ) [30], где скорости аппроксимируются кусочно-линейными функциями, давление и компоненты тензоров деформаций и напряжений — кусочно-постоянными. Такой выбор дискретизации тензоров позволил свести задачу негладкой оптимизации (второй шаг алгоритма) к поточечным вычислениям на каждом элементе. В настоящей статье для дискретизации был выбран метод конечных разностей.

5. Разностная схема. Рассмотрим $\Omega = (0,1)^2$ и положим $h_1 = N_1^{-1}$ и $h_2 = N_2^{-1}$ для заданных натуральных N_1 и N_2. Определим следующие сеточные области:

$$\overline{\Omega}_1 = \big\{x_{ij} = (ih_1, jh_2) \mid i = 0,\ldots,N_1,\, j = 0,\ldots,N_2\big\},$$
$$\Omega_2 = \Big\{x_{ij} = \big((i+1/2)h_1,(j+1/2)h_2\big) \;\big|\; i = 0,\ldots,N_1-1,\, j = 0,\ldots,N_2-1\Big\}.$$

Определим пространства компонент сеточных функций скорости и давления:

$$V_h^0 = \Big\{ \boldsymbol{v}_{i,j} = \big(v_{i,j}^1, v_{i,j}^2\big) = \big(v^1(x_{ij}), v^2(x_{ij})\big) \mid x_{ij} \in \overline{\Omega}_1,\ \boldsymbol{v}_{0,j} = \boldsymbol{v}_{i,N_2} = \boldsymbol{v}_{N_1,j} = \boldsymbol{v}_{i,0} = \boldsymbol{0} \Big\},$$

$$P_h = \Big\{ p_{ij} = p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \Omega_2,\ \sum_{i,j} p_{ij} = 0 \Big\}.$$

Через V_h будем обозначать пространства сеточных векторных функций, заданных только во внутренних точках Ω_1. Пространство сеточных тензорных функций обозначим через Q_h:

$$Q_h = \Big\{ \boldsymbol{q}_h \mid \boldsymbol{q}_h = \big\{q_h^{11}, q_h^{12}, q_h^{21}, q_h^{22}\big\};\ (\boldsymbol{q}_h)_{i,j} = \boldsymbol{q}_h(x_{ij}),\ x_{ij} \in \Omega_2 \Big\}.$$

Определим разностный аналог оператора дивергенции $\nabla_h \cdot : V_h^0 \to P_h$ и тензора скоростей деформации $\boldsymbol{D}_h : V_h^0 \to Q_h$:

$$\begin{aligned}
(\nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h)_{i,j} &= \big(v_{i+1,j+1}^1 - v_{i,j+1}^1 + v_{i+1,j}^1 - v_{i,j}^1\big)/2h_1 + \big(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i+1,j}^2 + v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2\big)/2h_2,\\
\big(D_h^{11}(\boldsymbol{v}_h)\big)_{i,j} &= \big(v_{i+1,j+1}^1 - v_{i,j+1}^1 + v_{i+1,j}^1 - v_{i,j}^1\big)/2h_1,\\
\big(D_h^{22}(\boldsymbol{v}_h)\big)_{i,j} &= \big(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i+1,j}^2 + v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2\big)/2h_2,\\
\big(D_h^{12}(\boldsymbol{v}_h)\big)_{i,j} &= \big(v_{i+1,j+1}^1 - v_{i+1,j}^1 + v_{i,j+1}^1 - v_{i,j}^1\big)/4h_2 + \big(v_{i+1,j+1}^2 - v_{i,j+1}^2 + v_{i+1,j}^2 - v_{i,j}^2\big)/4h_1.
\end{aligned}$$

Определим скалярное произведение и нормы:

$$\begin{aligned}
(p_h, \varphi_h)_h &= \sum_{\Omega_2} p_{i,j}\varphi_{i,j} h_1 h_2,\\
(\boldsymbol{w}_h, \boldsymbol{v}_h)_h &= \sum_{\overline{\Omega}_1} \big(w_{i,j}^1 v_{i,j}^1 + w_{i,j}^2 v_{i,j}^2\big) h_1 h_2, \quad \boldsymbol{w}_h = \big(w_h^1, w_h^2\big)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{v}_h = \big(v_h^1, v_h^2\big)^{\mathrm{т}},\\
(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)_h &= \sum_{\Omega_2} \big(q_{i,j}^{11}\lambda_{i,j}^{11} + q_{i,j}^{12}\lambda_{i,j}^{12} + q_{i,j}^{21}\lambda_{i,j}^{21} + q_{i,j}^{22}\lambda_{i,j}^{22}\big) h_1 h_2,\\
\|p_h\|_h &= (p_h, p_h)_h^{1/2}, \quad \|\boldsymbol{v}_h\|_h = (\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h)_h^{1/2}, \quad \|\boldsymbol{q}_h\|_h = (\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{q}_h)_h^{1/2}.
\end{aligned}$$

Введем разностные аналоги функционала (9) и лагранжианов (13), (14):

$$\begin{aligned}
J_h(\boldsymbol{u}_h) &= \mu \big\|\boldsymbol{D}_h(\boldsymbol{u}_h)\big\|_h^2 + \sigma_s j\big(\boldsymbol{D}_h(\boldsymbol{u}_h)\big) - (\boldsymbol{f}_h,\, \boldsymbol{u}_h)_h,\\
\mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{q}_h,\, \boldsymbol{\lambda}_h) &= \mu\|\boldsymbol{q}_h\|_h^2 + \sigma_s j(\boldsymbol{q}_h) - (\boldsymbol{f}_h,\, \boldsymbol{u}_h)_h + \big(\boldsymbol{D}_h(\boldsymbol{u}_h) - \boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{\lambda}_h\big)_h,\\
\mathcal{L}_{rh}(\boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{q}_h,\, \boldsymbol{\lambda}_h) &= \mathcal{L}_h(\boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{q}_h,\, \boldsymbol{\lambda}_h) + r\big\|\boldsymbol{D}_h(\boldsymbol{u}_h) - \boldsymbol{q}_h\big\|_h^2, \quad r \geqslant 0,\\
j(\boldsymbol{q}_h) &= \sqrt{\big(q_h^{11}\big)_{i,j}^2 + \big(q_h^{12}\big)_{i,j}^2 + \big(q_h^{21}\big)_{i,j}^2 + \big(q_h^{22}\big)_{i,j}^2}\,.
\end{aligned}$$

Задаче (10) соответствует следующая задача

$$\boldsymbol{v}_h = \arg\min_{\boldsymbol{u}_h \in V_h^0} J_h(\boldsymbol{u}_h). \tag{16}$$

Теорема 1 [31]. *Пусть* $(\boldsymbol{v}_h,\, \boldsymbol{\gamma}_h,\, \boldsymbol{\tau}_h)$ *— седловая точка* $\mathcal{L}_{rh}(\boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{q}_h,\, \boldsymbol{\lambda}_h)$*, т.е.*

$$\mathcal{L}_{rh}(\boldsymbol{v}_h,\, \boldsymbol{\gamma}_h,\, \boldsymbol{\lambda}_h) \leqslant \mathcal{L}_{rh}(\boldsymbol{v}_h,\, \boldsymbol{\gamma}_h,\, \boldsymbol{\tau}_h) \leqslant \mathcal{L}_{rh}(\boldsymbol{u}_h,\, \boldsymbol{q}_h,\, \boldsymbol{\tau}_h).$$

Тогда она также является седловой точкой $\mathcal{L}_{r'h}$ *для любого* $r' \geqslant 0$ *и* $\boldsymbol{v}_h$ *– решение задачи* (16).

Теорема 2 [31]. *Пусть* $(\boldsymbol{v}_h,\, \boldsymbol{\gamma}_h,\, \boldsymbol{\tau}_h)$ *— седловая точка* $\mathcal{L}_{rh}$ *на* $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$. *Если* $0 < \rho < r\big(1+\sqrt{5}\big)/2$, *то имеет место следующая сходимость:* $\boldsymbol{v}_h^n \to \boldsymbol{v}_h$ *в* V_h^0, $\boldsymbol{\gamma}_h^n \to \boldsymbol{\gamma}_h$ *в* Q_h. *Более того, если* $\boldsymbol{\tau}_h^*$ *— предел подпоследовательности* $\{\boldsymbol{\tau}_h^n\}$*, тогда* $(\boldsymbol{v}_h,\, \boldsymbol{\gamma}_h,\, \boldsymbol{\tau}_h^*)$ *— седловая точка* $\mathcal{L}_{rh}$ *на* $V_h^0 \times Q_h \times Q_h$.

Теперь запишем алгоритм ALG2 (15).

Значения $\boldsymbol{\gamma}_h^0,\ \boldsymbol{\tau}_h^0$ задаются произвольно в $Q_h \times Q_h$.

Шаг 1. Предполагая $\boldsymbol{\gamma}_h^n$ и $\boldsymbol{\tau}_h^n$ известными, для $n \geqslant 0$ найти $\boldsymbol{v}_h^{n+1}$ и p_h^{n+1} как решение задачи

$$-r\triangle_h \boldsymbol{v}_h^{n+1} + \nabla_h p_h^{n+1} = \nabla_h \cdot \big(\boldsymbol{\tau}_h^n - 2r\boldsymbol{\gamma}_h^n\big) + \boldsymbol{f}_h, \quad \nabla_h \cdot \boldsymbol{v}_h^{n+1} = 0, \quad \boldsymbol{v}_h^{n+1}\big|_{\partial\Omega_1} = \boldsymbol{v}_B.$$

Шаг 2. Вычислить $\boldsymbol{\gamma}_h^{n+1}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\gamma}_h^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \left|\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}_h^{n+1}\big)\right| < \sigma_s, \\ \left(1 - \dfrac{\sigma_s}{\left|\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}_h^{n+1}\big)\right|}\right) \dfrac{\boldsymbol{\tau}_h^n + 2r\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{v}_h^{n+1}\big)}{2(r+\mu)} & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{17}$$

Шаг 3. Вычислить $\boldsymbol{\tau}_h^{n+1}$ согласно $\boldsymbol{\tau}_h^{n+1} = \boldsymbol{\tau}_h^n + 2\rho\Big(\boldsymbol{D}_h\big(\boldsymbol{v}_h^{n+1}\big) - \boldsymbol{\gamma}_h^{n+1}\Big)$. Если $\left|\boldsymbol{\tau}_h^{n+1} - \boldsymbol{\tau}_h^n\right| > \varepsilon$ для некоторого заданного $\varepsilon > 0$, то переходим к шагу 1.

Первый шаг алгоритма ALG2 заключается в решении задачи Стокса, правая часть для которой вычисляется по результатам предыдущей итерации. Для рассматриваемой дискретизации применение первого шага алгоритма приводит к использованию следующих сеточных аналогов оператора градиента $\nabla_h : P_h \to V_h$ и дивергенции $\nabla_h \cdot : Q_h \to V_h$:

$$(\nabla_h p_h)_{i,j} \quad = (\nabla_h p_h)_{i,j} = \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_1}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_2}\right),$$

$$(\nabla_h \cdot \boldsymbol{q}_h)_{i,j} = \left(\frac{q_{i,j}^{11} - q_{i-1,j}^{11} + q_{i,j-1}^{11} - q_{i-1,j-1}^{11}}{2h_1} + \frac{q_{i,j}^{12} - q_{i,j-1}^{12} + q_{i-1,j}^{12} - q_{i-1,j-1}^{12}}{2h_2}, \right.$$
$$\left. \frac{q_{i,j}^{21} - q_{i-1,j}^{21} + q_{i,j-1}^{21} - q_{i-1,j-1}^{21}}{2h_1} + \frac{q_{i,j}^{22} - q_{i,j-1}^{22} + q_{i-1,j}^{22} - q_{i-1,j-1}^{22}}{2h_2}\right),$$

а также оператора Лапласа $\Delta_h : V_h^0 \to V_h$:

$$(\Delta_h \boldsymbol{v}_h)_{i,j} = \frac{1}{4h_1^2}\left(\boldsymbol{v}_{i+1,j+1} - 2\boldsymbol{v}_{i,j+1} + \boldsymbol{v}_{i-1,j+1} + 2\boldsymbol{v}_{i+1,j} - 4\boldsymbol{v}_{i,j} + 2\boldsymbol{v}_{i-1,j} + \boldsymbol{v}_{i+1,j-1} - 2\boldsymbol{v}_{i,j-1} + \boldsymbol{v}_{i-1,j-1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4h_2^2}\left(\boldsymbol{v}_{i+1,j+1} + 2\boldsymbol{v}_{i,j+1} + \boldsymbol{v}_{i-1,j+1} - 2\boldsymbol{v}_{i+1,j} - 4\boldsymbol{v}_{i,j} - 2\boldsymbol{v}_{i-1,j} + \boldsymbol{v}_{i+1,j-1} + 2\boldsymbol{v}_{i,j-1} + \boldsymbol{v}_{i-1,j-1}\right).$$

При $h_1 = h_2 = h$ имеем $(\Delta_h \boldsymbol{v}_h)_{i,j} = \dfrac{\boldsymbol{v}_{i-1,j-1} + \boldsymbol{v}_{i+1,j-1} + \boldsymbol{v}_{i+1,j+1} + \boldsymbol{v}_{i-1,j+1} - 4\boldsymbol{v}_{i,j}}{2h^2}$ (так называемый "косой крест"). Второй шаг алгоритма (17), заключающийся в минимизации функционала $\mathcal{L}_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{\gamma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ по переменной $\boldsymbol{\gamma}_h$, удалось свести к поточечным вычислениям. Третий шаг не вызывает никаких затруднений, так как он так же заключается в поточечных вычислениях.

Заметим, что данная разностная схема, построенная на лебедевских сетках [33, 34], для переменных скорость–давление (без дискретизации тензорных величин) использовалась для решения задачи Навье–Стокса [35]. Хорошо известно, что для задачи Стокса построенная разностная схема приводит к вырожденной матрице дополнения по Шуру, поскольку сеточный оператор градиента ∇_h, в отличие от непрерывного, имеет на пространстве P_h нетривиальное ядро вида

$$\operatorname{Ker}(\nabla_h) = \operatorname{span}\left(p^1, p^2\right), \quad p_{i,j}^1 = (-1)^{i+j} - 1, \quad p_{i,j}^2 = (-1)^{i+j+1} - 1, \tag{18}$$

в трехмерном случае размерность ядра увеличивается с уменьшением h [32]. Для возможности применения данной схемы используется один из двух подходов: либо введение в уравнение для давления стабилизационной добавки специального вида [35, 36], либо поиск решения на подпространстве пространства P_h, ортогональном $\operatorname{Ker}(\nabla_h)$ [37]. В данной работе используется второй подход.

6. Численные результаты. Поскольку первый шаг алгоритма ALG2 заключается в решении задачи Стокса, сначала приведем результаты численных экспериментов для задачи Стокса в $(0,1)^2$ с известными аналитическими решениями.

6.1. Тригонометрический многочлен (вязкая жидкость). В этом случае

$$u = \frac{1}{4\pi^2}\,(1 - \cos 2\pi x) \sin 2\pi y, \quad v = \frac{1}{4\pi^2}\,\sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi y), \quad p = \frac{1}{\pi}\,\sin 2\pi x\, \sin 2\pi y. \tag{19}$$

Результаты счета иллюстрируются в табл. 1. Даны значения нормы ошибки скорости $\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{v}|_{\Omega_1} - \boldsymbol{v}_h$ и давления $r_h = p|_{\Omega_2} - p_h$ в сеточном аналоге L_2-нормы. В последнем столбце приведено число итераций

Таблица 1

Сходимость разностного решения и число итераций, пример (19)

h	$\lvert e_h\rvert_{L_2}$	$\log_2\left\{\lvert e_h\rvert_{L_2}/\lvert e_{2h}\rvert_{L_2}\right\}$	$\lvert r_h\rvert_{L_2}$	$\log_2\left\{\lvert r_h\rvert_{L_2}/\lvert r_{2h}\rvert_{L_2}\right\}$	#it
1/32	2.4860×10^{-4}	2.0042	1.2929×10^{-3}	2.0047	11
1/64	6.1969×10^{-5}	2.0010	3.2218×10^{-4}	2.0012	12
1/128	1.5481×10^{-5}	2.0002	8.0479×10^{-5}	2.0003	13
1/256	3.8695×10^{-6}	2.0001	2.0115×10^{-5}	2.0000	13
1/512	9.6730×10^{-7}		5.0288×10^{-6}		13

в методе Узавы — сопряженных градиентов, необходимое для уменьшения нормы невязки в 10^8 раз. Метод состоит в решении уравнения для давления с матрицей $B^TA^{-1}B$ с помощью метода сопряженных градиентов.

6.2. “Вихрь” в каверне (вязкая жидкость). Решение

$$\begin{aligned}
u &= \left(1-\cos\left(\frac{2\pi\left(e^{R_1x}-1\right)}{e^{R_1}-1}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi\left(e^{R_2y}-1\right)}{e^{R_2}-1}\right)\frac{R_2}{2\pi}\,\frac{e^{R_2y}}{e^{R_2}-1},\\
v &= \sin\left(\frac{2\pi\left(e^{R_1x}-1\right)}{e^{R_1}-1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi\left(e^{R_2y}-1\right)}{e^{R_2}-1}\right)\right)\frac{R_1}{2\pi}\,\frac{e^{R_1x}}{e^{R_1}-1},\\
p &= R_1R_2\sin\left(\frac{2\pi\left(e^{R_1x}-1\right)}{e^{R_1}-1}\right)\sin\left(\frac{2\pi\left(e^{R_2y}-1\right)}{e^{R_2}-1}\right)\frac{e^{R_1x}e^{R_2y}}{\left(e^{R_1}-1\right)\left(e^{R_2}-1\right)}
\end{aligned}\qquad(20)$$

имитирует “вихрь” в каверне, центр которого находится в точке

$$x_0=\frac{1}{R_1}\log\frac{\exp(R_1)+1}{2}\approx0.842,\quad y_0=\frac{1}{R_2}\log\frac{\exp(R_2)+1}{2}\approx0.512.$$

Таким образом, у правой границы области решение имеет пограничный слой [38]. Рис. 1 иллюстрирует распределение вектора скорости (a) и поля давления (b). Результаты счета при $R_1 = 4.2985$, $R_2 = 0.1$ приведены в табл. 2. Поскольку в пограничном слое возникают большие градиенты скорости и давления, то число итераций, необходимых для сходимости, больше, чем в предыдущем примере.

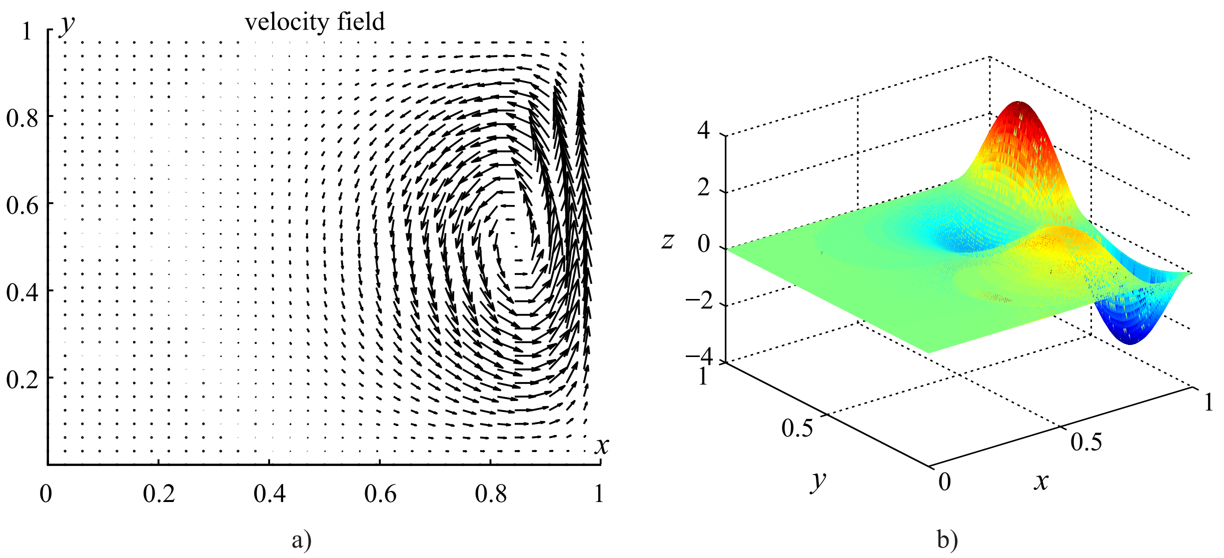

Рис. 1. Вектор скорости (a) и давление (b) для примера (20)

Расчеты, приведенные в табл. 1 и 2, демонстрируют второй порядок сходимости по скорости и по давлению.

Таблица 2

Сходимость разностного решения и число итераций, пример (20)

h	$\lvert \boldsymbol{e}_h \rvert_{L_2}$	$\log_2 \left\{ \lvert \boldsymbol{e}_h \rvert_{L_2} / \lvert \boldsymbol{e}_{2h} \rvert_{L_2} \right\}$	$\lvert r_h \rvert_{L_2}$	$\log_2 \left\{ \lvert r_h \rvert_{L_2} / \lvert r_{2h} \rvert_{L_2} \right\}$	#it
1/32	7.3731×10^{-3}	2.0476	1.3453×10^{-1}	2.1129	14
1/64	1.7834×10^{-3}	2.0124	3.1101×10^{-2}	2.0290	14
1/128	4.4203×10^{-4}	2.0031	7.6204×10^{-3}	2.0073	14
1/256	1.1027×10^{-4}	2.0008	1.8955×10^{-3}	2.0018	15
1/512	2.7552×10^{-5}		4.7327×10^{-4}		15

6.3. Задача о каверне. Рассмотрим задачу о течении в каверне — самый известный тест в вычислительной гидродинамике для задачи Стокса. Она стала тестовой и для среды Бингама [24, 36, 39–41] и заключается в следующем. Пусть $\Omega = (0,1)^2$, $\boldsymbol{f} = 0$ и $\Gamma_B = \left\{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, x_2), 0 < x_1 < 1, x_2 = 1 \right\}$ — подвижная верхняя граница. Тогда краевые условия задаются в виде $\boldsymbol{v}_B(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_B, \\ 1, & \text{если } x \in \Gamma_B. \end{cases}$

Если рассматривается течение вязкой жидкости в каверне с подвижной крышкой, то основными характеристиками численного решения являются распределение линий тока, интенсивность вихря и координаты его центра, срединный профиль скорости. Что касается задачи вязкопластичности, то “естественно, что наибольший интерес в проведенных численных экспериментах представляет задача определения жестких зон” [24]. Поэтому далее будут приведены как расположение жестких зон, так и основные гидродинамические характеристики. Отметим, что часто рассматривается не величина σ_s, а безразмерная величина $\mathrm{Bn} = \sigma_s L/\mu V\sqrt{2}$ (число Бингама), где L — характерный линейный размер, V — характерная скорость; в настоящей задаче $\mathrm{Bn} = \sigma_s/\sqrt{2}$.

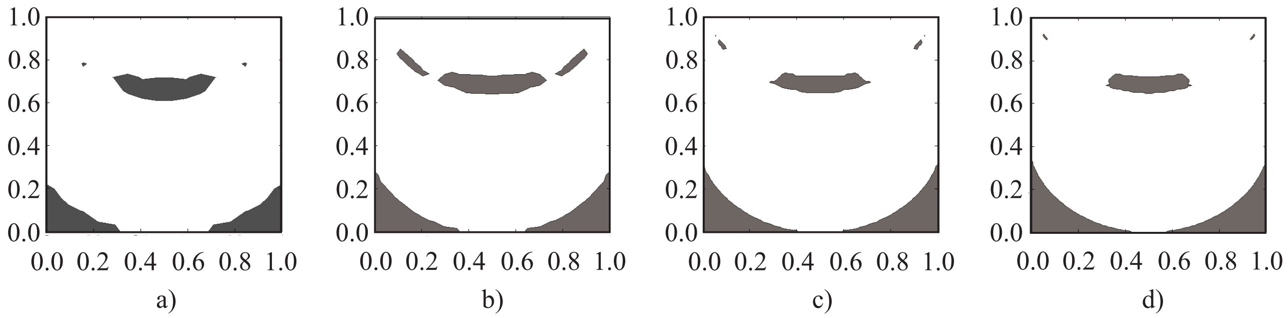

Рис. 2. Зависимость изображения жестких зон от шага расчетной сетки:
a) $h = 1/16$; b) $h = 1/32$; c) $h = 1/64$; d) $h = 1/128$

Для получения качественных численных результатов следует предварительно определить, насколько мелкими должны быть расчетные сетки. На рис. 2 приводятся результаты для сеток с $h = 1/16$ (a), $h = 1/32$ (b), $h = 1/64$ (c), $h = 1/128$ (d) ($\sigma_s = \sqrt{2}$, здесь и далее $\mu = 1$). Легко видеть, что размер, форма и расположение жестких зон существенно зависит от шага сетки, а размер шага, равный 1/16 или 1/32, не применим для практических расчетов. Для того чтобы получить правильную картину жестких зон, желательно использовать сетки с шагом 1/128 и мельче. Все дальнейшие вычисления выполнены на сетке с $h = 1/256$ и критерием сходимости $\varepsilon = 10^{-4}$.

Проведем сравнение с работами [39] и [40], в которых решалась аналогичная задача. На рис. 3 приводится сравнение с работой [39], в которой использовалась регуляризованная модель Папанастаса и метод конечных элементов. При использовании МКЭ жесткие зоны определяются как совокупность элементов, на которых интенсивность напряжений не превышает предельного значения предела текучести. В нашем случае жесткие зоны определяются как изолинии $\lvert \boldsymbol{\tau}_h \rvert = \sigma_s$ (критерий Мизеса применяется к дискретному полю $\boldsymbol{\tau}_h$). Для возможности сравнения были выполнены вычисления при $\mathrm{Bn} = 2, 20$. Результаты, полученные в настоящей работе (рис. 3b и 3d), хорошо согласуются с работой [39] (рис. 3a и 3c).

На рис. 4 изображены жесткие зоны и линии тока для различных значений Bn: $\mathrm{Bn} = 0.1$ (a), $\mathrm{Bn} = 1$ (b), $\mathrm{Bn} = 10$ (c), $\mathrm{Bn} = 100$ (d). Форма и размеры жестких зон хорошо согласуются с работами [40, 41].

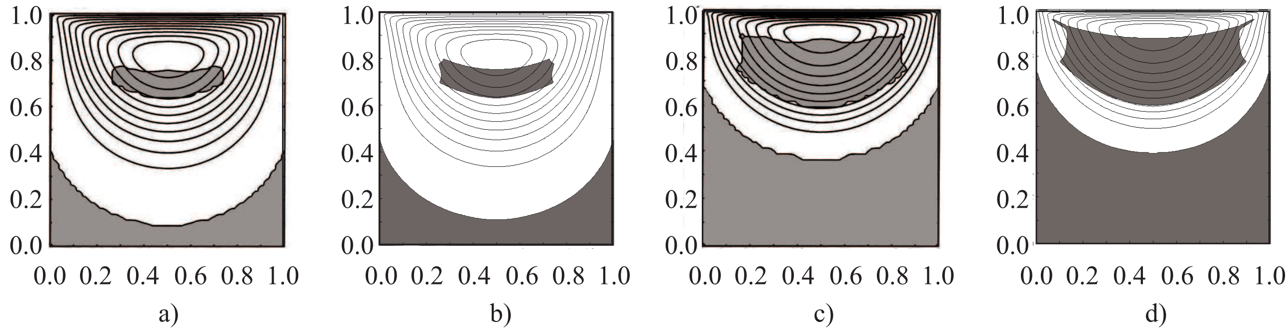

Рис. 3. Сравнение с работой [39]: a) Bn = 2 [39]; b) Bn = 2; c) Bn = 20 [39]; d) Bn = 20

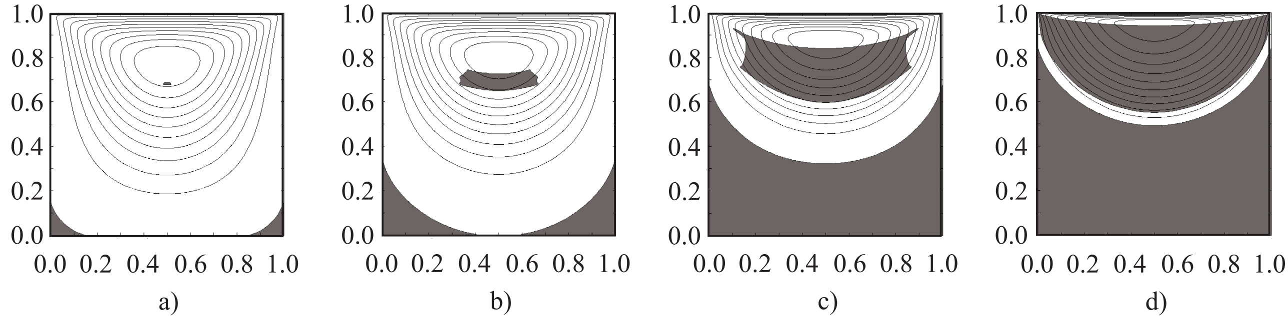

Рис. 4. Линии тока и распределение жестких зон в зависимости от числа Бингама, $h = 1/256$: a) Bn = 0.1; b) Bn = 1; c) Bn = 10; d) Bn = 100

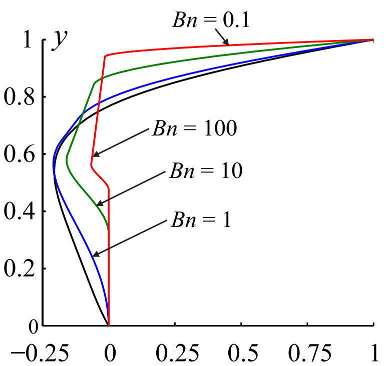

Рис. 5. Профили горизонтальной компоненты скорости

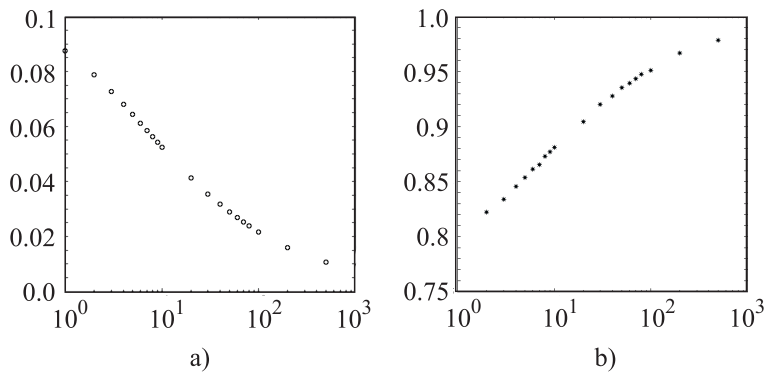

Рис. 6. Значение интенсивности вихря (a) и ордината центра вихря (b) в зависимости от числа Бингама

При Bn = 0.1, 1 присутствуют три жесткие зоны, одна из них расположена рядом с центром вихря, а другие — в нижних углах каверны; при больших значениях Bn (начиная с Bn = 2) — две жесткие зоны: одна центральная и одна — в нижней части каверны. Наблюдается вполне предсказуемая с точки зрения механики закономерность: при увеличении предела текучести жесткие зоны увеличиваются, область деформируемого течения уменьшается и поднимается выше. Эта закономерность хорошо заметна и на рис. 5, на котором изображены профили горизонтальной компоненты вектора скорости вдоль срединной линии $x = 0.5$ для различных значений Bn.

На рис. 6 приведены интенсивности вихря (a) и ордината центра вихря (b) в зависимости от числа Bn. С увеличением предела текучести центр вихря поднимается, а его интенсивность уменьшается, так как замедляется движение среды. Приведенные графики хорошо согласуются с соответствующими результатами [39, 40].

7. Заключение. Рассмотрена реализация итерационного алгоритма типа Узавы конечно-разностным методом на полусмещенных (лебедевских) сетках. Вычислительные эксперименты подтверждают эффективность рассматриваемого подхода. Отметим, что данный метод можно обобщить на широкий круг задач, включающий в себя трехмерные задачи в областях сложной формы с учетом конвекции и с различными типами граничных условий. Кроме того, предложенный способ дискретизации представляется полезным для моделирования течений не только вязкопластических, но и других неньютоновских сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shwedov F.N.* La rigidité de liquides // Rapport Congr. Intern. Phys. Paris. 1900. **1**. 478–486.
2. *Bingham F.C.* Fluidity and plasticity. New York: McGraw-Hill, 1922.
3. *Генки Г.* Пространственная задача упругого и пластического равновесия // Изв. АН СССР. Механика. ОТН. 1937. № 2. 187–196.
4. *Ильюшин А.А.* Деформация вязко-пластического тела // Уч. записки МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. 3–81.
5. *Oldroyd J.G.* Two-dimensional plastic flow of a Bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion // Proc. Camb. Phil. Soc. 1947. **43**. 383–395.
6. *Prager W.* On slow visco-plastic flow // Studies in Mathematics and Mechanics. New York: Academic Press, 1954. 208–216.
7. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1971.
8. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
9. *Byron-Bird R., Dai G.C., Yarusso B.J.* The rheology and flow of viscoplastic materials // Rev. Chem. Eng. 1983. **1**, N 1. 2–70.
10. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1970.
11. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. Вып. 4. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1975. 152–169.
12. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989.
13. *Ladyzhenskaya O.A., Seregin G.A.* On semigroups generated by initial-boundary value problems describing two-dimensional visco-plastic flows // Amer. Math. Soc. Transl. 1995. **164**. 99–123.
14. *Fuchs M., Seregin G.A.* Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids. Berlin: Springer, 2000.
15. *Repin S.* A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: De Gruyter, 2008.
16. *Shelukhin V.V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. 2002. **4**, N 2. 109–127.
17. *Мамонтов А.Е.* Существование глобальных решений многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама // Матем. заметки. 2007. **82**, № 4. 560–577.
18. *Bercovier M., Engelman M.* A finite element method for incompressible non-Newtonian flows // J. Comp. Phys. 1980. **36**. 313–326.
19. *Papanastasiou T.C.* Flows of materials with yield // J. Rheol. 1987. **31**, N 5. 385–404.
20. *Chatzimina M., Georgiou G.C., Argyropaidas I., Mitsoulis E., Huilgol R.R.* Cessation of Couette and Poiseuille flows of a Bingham plastic and finite stopping times // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2005. **129**. 117–127.
21. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Numerical simulations of cessation flows of a Bingham plastic with the augmented Lagrangian method // J. Non-Newtonian Fluid. Mech. 2010. **165**, N 9, 10. 544–550.
22. *Muravleva L.V., Muravleva E.A., Georgiou G.C., Mitsoulis E.* Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rheol. Acta. 2010. **49**, N 11, 12. 1197–1206.
23. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
24. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
25. *Glowinski R., Fortin M.* Methodes de Lagrangien augumente, applications a la resolution de problemes aux limites. Dunod: Paris, 1982.
26. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
27. *Антипин А.С.* Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 3. 1291–1307.
28. *Лапин А.В.* Введение в теорию вариационных неравенств. Казань: Изд-во КГУ, 1981.
29. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М. : МГАПИ, 1997.
30. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
31. *Муравлева Е.А.* Численные методы на основе вариационных неравенств для вязкопластической среды Бингама. Дисс. .... Москва, 2010.
32. *Муравлева Е.А.* О ядре дискретного оператора градиента // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 97–104.
33. *Лебедев В.И.* О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Математика. 1958. **22**, № 5. 717–734.
34. *Лебедев В.И.* Разностные аналоги ортогональных разложений, фундаментальных дифференциальных операторов и основных начально-краевых задач математической физики // ЖВМ и МФ. 1964. **4**, № 3. 449–465.

35. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* Численные методы решения нестационарных уравнений Навье–Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках // Математическое моделирование. 1997. **9**, № 4. 85–114.
36. *Muravleva L.V., Muravleva E.A.* Uzawa-like algorithm on semi-staggered grids for unsteady Bingham medium flows // Rus. J. Num. Anal. and Math. Modelling. 2009. **24**, N 6. 543–563.
37. *Oseledets I.V., Muravleva E.A.* Fast orthogonalization to the kernel of the discrete gradient operator with application to Stokes problem // Lin. Alg. Appl. 2010. **432**, N 6. 1492–1500.
38. *Berrone S.* Adaptive discretization of the Navier–Stokes equations by stabilized finite element methods // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2001. **190(40)**. 4435–4455.
39. *Mitsoulis E., Zisis Th.* Flow of Bingham plastics in a lid-driven cavity // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2001. **101**. 173–180.
40. *Vola D., Boscardin L., Latche J.C.* Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results // J. Comp. Phys. 2003. **187**. 441–456.
41. *Dean E.J., Glowinski R., Guidoboni G.* On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: old and new results // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. **142**. 36–62.

Поступила в редакцию
11.01.2012