

УДК 517.958:536+519.62/64

## О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА К ПОСТРОЕНИЮ ОДНОШАГОВЫХ РЕШЕТОЧНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СХЕМ БОЛЬЦМАНА

Г. В. Кривовичев<sup>1</sup>

Разработаны семейства одношаговых кинетических вычислительных схем, зависящих от параметра. Построение схем производится на основе интегральной формы системы кинетических уравнений, полученной методом дискретных скоростей. Схемы строятся с использованием квадратурных формул нулевой и первой алгебраических степеней точности. При определенных значениях параметра имеет место аппроксимация исходных уравнений со вторым порядком. Проведено исследование устойчивости по Ляпунову построенных схем в случае отсутствия зависимости от пространственных переменных. Рассмотрены примеры решения двух модельных задач гидродинамики, иллюстрирующие применение неявной схемы, аппроксимирующей со вторым порядком.

**Ключевые слова:** кинетические уравнения, решеточные кинетические схемы Больцмана, одношаговые методы.

**1. Введение.** Методы, основанные на использовании кинетических вычислительных схем, в настоящее время широко применяются при численном решении задач механики жидкости и газа [1–6]. Кинетические схемы отличаются от других тем, что они основаны на дискретизации кинетических уравнений, а не уравнений механики сплошной среды. В качестве неизвестных в кинетических уравнениях выступают функции распределения частиц среды, а величины, характеризующие состояние на макроуровне (плотность, скорость, температура, компоненты тензора напряжений), можно получить как моменты функции распределения [7, с. 32–33]. При определенных условиях (при числах Кнудсена, стремящихся к нулю) из кинетических уравнений посредством метода Энского–Чепмена может быть получена система уравнений механики сплошной среды [7, с. 145–163], что и учитывается при использовании кинетических схем.

Методы, использующие кинетические схемы, можно рассматривать как альтернативу другим численным методам, основанным на дискретизации уравнений механики сплошной среды методом конечных разностей, методом конечных объемов или методом конечных элементов. В качестве достоинств этих схем можно указать алгоритмическую простоту (существенно облегчающую программную реализацию) и широкие возможности распараллеливания использующих их вычислительных процессов [8, 9]. Последнее является особенно актуальным в связи с развитием в последние годы технологий параллельного программирования и проведений расчетов на многопроцессорных графических ускорителях [10–13].

Настоящая статья посвящена применению интегро-интерполяционного метода к построению семейств решеточных кинетических схем Больцмана (lattice Boltzmann schemes). Несмотря на то что этот метод широко применяется в вычислительной математике (например, для построения многошаговых методов решения задачи Коши [14, с. 324–325]), к построению кинетических схем он применялся в весьма ограниченном числе работ, причем только для построения конкретной явной одношаговой схемы первого порядка аппроксимации (и по временной, и по пространственным переменным). В данной статье показано, что интегро-интерполяционный метод может быть применен для построения однопараметрических семейств одношаговых схем, причем при определенных значениях параметра порядок аппроксимации может быть сделан равным двум. В этом случае получающаяся схема является неявной. Приведены результаты численного решения двух модельных задач гидродинамики с помощью явной и неявной кинетической схем, а также проведено сравнение с результатами, полученными другими численными методами.

**2. Решеточные кинетические схемы Больцмана.** В данном разделе кратко описывается подход к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана. При построении таких схем, как правило, рассматривается кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука в случае отсутствия массовых сил [1, 3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\lambda}(f - f^{(eq)}), \quad (1)$$

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский пр., д. 35, Петергоф, 198504, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: gera1983k@bk.ru

где  $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$  — одночастичная функция распределения,  $t$  — время,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — вектор пространственных переменных,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости частицы,  $\lambda$  — параметр релаксации,  $f^{(\text{eq})}$  — равновесная функция распределения, в качестве которой выступает локальная функция распределения Максвелла [7, с. 63].

При решении прикладных задач для уравнения (1) ставятся начальное и граничные условия. Располагая решением соответствующей начально-краевой задачи, можно вычислять такие макроскопические характеристики, как плотность  $\rho(t, \mathbf{r})$  и скорость среды  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ . Эти величины являются моментами функции распределения и находятся посредством интегрирования по всем возможным скоростям  $\mathbf{v}$  [7, с. 32–33].

Дискретизация уравнения (1) производится в два этапа: на первом этапе осуществляется дискретизация в пространстве скоростей, а на втором этапе осуществляется дискретизация по времени и пространственным переменным. Для дискретизации в пространстве скоростей применяется метод дискретных скоростей [7, 15, 16]. Согласно этому методу, задается конечная совокупность векторов возможных скоростей  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ . Каждому вектору из заданной совокупности ставится в соответствие функция распределения, зависящая уже только от  $t$  и  $\mathbf{r}$ :  $f_i = f_i(t, \mathbf{r}) = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Таким образом, уравнение (1) сводится к системе уравнений в частных производных относительно  $f_i$ :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\lambda}(f_i - f_i^{(\text{eq})}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

При построении кинетических схем решеточного типа набор возможных скоростей носит название решетки (lattice) [1]. Для каждой решетки вводится обозначение вида  $DpQn$ , где  $p \in \{1, 2, 3\}$  — размерность физического пространства, а  $n \in \mathbf{N}$  — число возможных скоростей. Например, для моделирования плоских течений часто используется решетка  $D2Q9$  с таким набором возможных скоростей:  $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$ . В дальнейшем будут рассматриваться только плоские течения и решетка  $D2Q9$ ; для такого случая  $\rho(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$  вычисляются следующим образом [1, 17]:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r})\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{v}_i f_i(t, \mathbf{r}). \quad (3)$$

Следует отметить, что при построении кинетических схем ставится задача об аппроксимации локальных равновесных функций распределения  $f_i^{(\text{eq})}$ . Предлагается аппроксимировать их полиномиальными формами от  $\rho$  и  $\mathbf{u}$ . Необходимость в таких приближениях связана как с упрощением проведения численных расчетов, так и с упрощением анализа получаемых разностных схем. Аппроксимирующие функции имеют следующий вид (подробный вывод приведен в монографии [1] на с. 164–171, также в [17]):

$$f_i^{(\text{eq})} \approx W_i \rho \left( 1 + 3(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u}^2 \right), \quad \text{где } W_i = \begin{cases} 4/9 & \text{при } i = 1, \\ 1/9 & \text{при } i = 2, 3, 4, 5, \\ 1/36 & \text{при } i = 6, 7, 8, 9. \end{cases} \quad (4)$$

Функции, задаваемые выражениями (4), аппроксимируют равновесные функции распределения с точностью до членов третьего порядка малости по  $u = |\mathbf{u}|$  [1, 18] и применимы в случае течений несжимаемых и слабосжимаемых сред с умеренными скоростями [18]. В общем случае используется равновесная функция распределения Максвелла.

В дальнейшем, говоря о системе уравнений в частных производных вида (2), будем иметь в виду, что речь идет о системе уравнений, в которой в правой части фигурируют приближенные равновесные функции распределения, задаваемые формулами (4).

Для построения решеточных кинетических схем Больцмана можно воспользоваться интегральной формой системы уравнений (2), которая получена, например, в работах [18–20]:

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\Delta t} (f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta)) d\zeta. \quad (5)$$

С помощью представления (5) можно строить кинетические схемы интегро-интерполяционным методом — например, если аппроксимировать интеграл в правой части (5) с помощью квадратурной формулы левых прямоугольников (имеющей нулевую алгебраическую степень точности) и рассмотреть результат

на равномерной по времени  $t$  и пространственным переменным  $(x, y)$  сетке, то получится следующая система разностных уравнений:

$$f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - \frac{\Delta t}{\lambda} \left( f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r}_{kl}, t_j) \right), \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ ,  $k = \overline{1, N_x}$ ,  $l = \overline{1, N_y}$ ,  $j = \overline{0, N_t}$ .

Соотношения (6) представляют собой выражения для “классической” решеточной схемы Больцмана, применяемой в большинстве работ для моделирования течений нетеплопроводной несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости [1]. Как можно видеть, она является явной и одношаговой, что сильно упрощает ее программную реализацию. Для возможности расчета течений реальных сред с помощью формул (6) и (3), дополненных выражениями, аппроксимирующими начальное и граничные условия, параметр  $\lambda$ , фигурирующий в (6), должен быть связан со значениями величин, характеризующими среду на макроуровне. Установлена связь между отношением  $\lambda$  к шагу  $\Delta t$  (т.е. величиной  $\tau = \lambda/\Delta t$ ) и коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$ , фигурирующим в качестве коэффициента в системе уравнений Навье–Стокса. Получение зависимости  $\tau$  от  $\nu$  осуществляется с помощью аналога метода Энскога–Чепмена, применяемого к дифференциальному приближению разностной схемы (6). Зависимость имеет следующий вид:

$$\nu = \frac{\Delta t}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

Процедура получения зависимости (7) является достаточно громоздкой; ознакомиться с ней можно, например, в [1] на с. 172–181 или в [2] на с. 61–63. Следует также отметить, что при использовании кинетических схем, построенных таким методом, значения шага по времени и шагов по пространственным переменным связаны между собой — эта связь определяется используемой решеткой. Например, для рассматриваемой решетки  $D2Q9$  эта связь такая:  $h_x = h_y = \Delta t$ . Для остальных решеток шаги по пространственным переменным могут быть и не равны, но всегда имеют тот же порядок малости, что и  $\Delta t$  [1].

Не представляет особого труда показать, что схема (6) аппроксимирует систему (2) с первым порядком в сеточной норме  $C$  на классе дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренный выше подход к построению решеточных кинетических схем Больцмана применим далеко не для всех возможных случаев. А именно, он неприменим для построения схем с несколькими временами релаксации (multiple relaxation time lattice Boltzmann models) [21].

**3. Однопараметрические семейства одношаговых схем.** При построении разностных схем для уравнений математической физики часто, посредством введения параметров, стремятся получать не конкретную разностную схему, а целое семейство схем, зависящее от параметров. За счет наличия указанной зависимости можно “влиять” на такие свойства разностной схемы, как порядок аппроксимации, устойчивость, численная диссипация и дисперсия [22, 23].

Для того чтобы получать однопараметрические семейства кинетических схем, к правой части (5) прибавим и вычтем следующую величину:

$$\frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{\Delta t} (f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta)) d\zeta,$$

где  $\sigma \in [0, 1]$ . В результате получим

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1 - \sigma}{\lambda} \int_0^{\Delta t} (f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta)) d\zeta - \frac{\sigma}{\lambda} \int_0^{\Delta t} (f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta) - f_i^{(eq)}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta)) d\zeta. \quad (8)$$

Семейства кинетических схем, зависящие от параметра  $\sigma$ , предлагается строить следующим образом: аппроксимировать интегральные слагаемые в правой части (8) какими-либо квадратурными формулами, причем для каждого слагаемого предлагается использовать свою формулу.

В настоящей статье рассматриваются только одношаговые схемы, а для вычисления интегралов предлагается использовать квадратурные формулы нулевой и первой алгебраических степеней точности. Кроме уже использованной выше формулы левых прямоугольников, будем использовать формулу правых

прямоугольников (имеющую нулевую алгебраическую степень точности), а также формулу трапеций (имеющую первую алгебраическую степень точности).

Было построено шесть семейств одношаговых схем, которые можно задать следующей формулой:

$$f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) = A(f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{r}_{kl}, t_j)) + \\ + B(f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t)),$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, значения которых зависят от параметра  $\sigma$ . Ниже приведены их значения для каждого из построенных семейств.

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой левых прямоугольников, второе — формулой правых прямоугольников, то:

$$A = -\frac{1-\sigma}{\tau}, \quad B = -\frac{\sigma}{\tau}. \quad (9.1)$$

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой правых прямоугольников, второе — формулой левых прямоугольников, то:

$$A = -\frac{\sigma}{\tau}, \quad B = -\frac{1-\sigma}{\tau}. \quad (9.2)$$

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой трапеций, второе — формулой левых прямоугольников, то:

$$A = -\frac{1-\sigma}{2\tau}, \quad B = -\frac{1+\sigma}{2\tau}. \quad (9.3)$$

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой трапеций, второе — формулой правых прямоугольников, то:

$$A = -\frac{1+\sigma}{2\tau}, \quad B = -\frac{1-\sigma}{2\tau}. \quad (9.4)$$

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой левых прямоугольников, второе — формулой трапеций, то:

$$A = -\frac{\sigma}{2\tau}, \quad B = \frac{\sigma-2}{2\tau}. \quad (9.5)$$

Если первое слагаемое в правой части (8) аппроксимируется формулой правых прямоугольников, второе — формулой трапеций, то:

$$A = \frac{\sigma-2}{2\tau}, \quad B = -\frac{\sigma}{2\tau}. \quad (9.6)$$

При помощи метода дифференциального приближения несложно показать, что из (9.1)–(9.6) можно получить схему, которая будет аппроксимировать систему (2) со вторым порядком в сеточной норме  $C$  на классе трижды непрерывно-дифференцируемых функций. Эту схему можно получить из (9.1)–(9.6) при следующих значениях параметра:  $\sigma = \frac{1}{2}$  для семейств, задаваемых формулами (9.1) и (9.2);  $\sigma = 0$  для семейств, задаваемых формулами (9.3) и (9.4) и  $\sigma = 1$  для семейств, задаваемых формулами (9.5) и (9.6). Полученная схема является неявной. При остальных значениях  $\sigma$  имеет место аппроксимация только с первым порядком.

Для каждого из построенных выше семейств с помощью метода Энского–Чепмена можно получить зависимость  $\nu$  от  $\tau$  и  $\Delta t$  при фиксированном значении  $\sigma$ . Для неявной схемы второго порядка аппроксимации, получающейся из всех рассмотренных семейств, эта зависимость имеет следующий вид:

$$\nu = \frac{\Delta t}{3} \tau. \quad (10)$$

В связи с тем, что схема второго порядка аппроксимации является неявной, возникают определенные сложности при ее практической реализации — на каждом шаге по времени и в каждом узле сетки приходится решать систему нелинейных алгебраических уравнений, что существенно замедляет время проведения расчетов. При этом могут возникать и трудности при распараллеливании вычислений. Однако необходимо также учитывать тот факт, что неявные схемы часто имеют более широкую область устойчивости, чем явные схемы, а иногда они являются и безусловно устойчивыми [22, 23], что позволяет

проводить расчеты без ограничений на шаги по времени и пространственным переменным. Ниже показано, что в простейшем случае отсутствия зависимости от пространственных переменных схема второго порядка аппроксимации является безусловно устойчивой. Кроме того, приведены результаты решений двух простых задач гидродинамики, позволяющие говорить о возможности применения схемы при решении практических задач.

**4. Анализ устойчивости в случае отсутствия зависимости от пространственных переменных.** В связи с тем, что сеточные функции в кинетических схемах зависят от нескольких независимых переменных и сами схемы являются нелинейными, то, как правило, исследуется устойчивость стационарных режимов течения (характеризуемых конкретными значениями  $\rho$  и  $\mathbf{u}$ , через которые вычисляются приближения для  $f_i^{(eq)}$ ). При этом с помощью “принципа замороженных коэффициентов” исследуется устойчивость по линейному приближению с использованием численных и аналитических методов решения задач на собственные значения [24–27]. Однако на первом этапе, как правило [24], рассматривается ситуация, когда имеют место возмущения сеточных функций только по временной переменной — это имеет место при предположении, что система (2), а следовательно, и ее дискретные аналоги имеют не зависящее от пространственных переменных решение. В этом случае для схемы (6) в [24] получено следующее условие устойчивости:  $\tau > \frac{1}{2}$ .

Рассмотрим при указанных предположениях семейства схем, задаваемые формулами (9.1)–(9.6). В случае отсутствия зависимости от пространственных переменных, семейство, задаваемое посредством (9.1), имеет вид

$$f_i(t_j + \Delta t) - f_i(t_j) = -\frac{(1 - \sigma)}{\tau} (f_i(t_j) - f_i^{(eq)}) - \frac{\sigma}{\tau} (f_i(t_j + \Delta t) - f_i^{(eq)}), \tag{11}$$

где равновесные функции распределения  $f_i^{(eq)}$  постоянны в силу того, что исследуется стационарный режим течения. Равновесные функции распределения рассматриваем в качестве невозмущенных решений системы (11) (непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что они действительно представляют собой решения (11) с начальными условиями  $f_i(t_0) = f_i^{(eq)}$ ).

Исследуем их устойчивость по Ляпунову. Выпишем выражения для отклонений возмущенных решений  $f_i(t)$  от невозмущенных:  $\delta f_i(t) = f_i(t) - f_i^{(eq)}$ ; следовательно, система в отклонениях примет вид

$$\delta f_i(t_j + \Delta t) = \frac{\tau + \sigma - 1}{\tau + \sigma} \delta f_i(t_j). \tag{12}$$

Нулевое решение (12) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову в случае, когда  $\tau + \sigma > \frac{1}{2}$ , а так как  $\sigma \in [0, 1]$  и значение  $\tau$  по физическому смыслу всегда должно быть положительно, то при  $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$  асимптотическая устойчивость будет иметь место при любых  $\tau > 0$ .

В таблице приведены условия, которым должны удовлетворять  $\tau$  и  $\sigma$  для обеспечения асимптотической устойчивости схем, задаваемых формулами (9.2)–(9.6), а также приведены диапазоны значений  $\sigma$ , при которых эти условия выполняются для всех  $\tau > 0$ .

Следует отметить интересный факт: схема второго порядка аппроксимации, получающаяся из (9.1)–(9.6), будет асимптотически устойчивой по Ляпунову при любых значениях  $\tau > 0$ .

В дальнейшем планируется провести исследование устойчивости этой схемы при наличии пространственных возмущений.

**5. Численные решения тестовых задач.** В данном разделе иллюстрируется применение как явной кинетической схемы (6), аппроксимирующей (2) с первым порядком, так и неявной схемы второго порядка аппроксимации, получающейся из семейств, определяемых формулами (9.1)–(9.6). В качестве примеров рассматриваются численные решения двух модельных плоских задач о течении вязкой ньютоновской нетеплопроводной жидкости. Полученные результаты сравниваются с решениями начально–краевых задач для системы уравнений Навье–Стокса, полученных при дискретизации с помощью метода конечных разностей и метода конечных элементов. Задачи решаются в безразмерных переменных. Численные расчеты по кинетическим схемам проводились с использованием оригинальной программы, написанной на языке пакета Matlab и использующей векторизацию вычислений.

(9.2)	$\tau - \sigma > -\frac{1}{2},$	$\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$
(9.3)	$\tau > \frac{\sigma}{2},$	$\sigma \in [0, 1]$
(9.4)	$\tau > -\frac{\sigma}{2},$	$\sigma \in [0, 1]$
(9.5)	$\tau > \frac{1 - \sigma}{2},$	$\sigma = 1$
(9.6)	$\tau > \frac{\sigma - 1}{2},$	$\sigma \in [0, 1]$

**5.1. Задача о течении в каверне.** Рассматривается задача о течении в квадратной каверне с подвижной верхней крышкой. Расчетная область представляет собой квадрат со сторонами длины  $L$  (рис. 1).

В начальный момент времени скорость жидкости во внутренних точках области полагается равной нулю, плотность  $\rho$  равна единице.

На границах 2, 3 и 4 компоненты вектора скорости равны нулю:  $u_x = u_y = 0$ , а на границе 1 компоненты вектора скорости задаются в виде  $u_x = U = \text{const}$ ,  $u_y = 0$ . При проведении численных расчетов рассматривались следующие значения  $L$  и  $U$ :  $L = 1$  и  $U = 0.1$ .

В начальный момент времени значения  $f_i$  предполагались совпадающими со значениями равновесных функций распределения и вычислялись через значения макровеличин по формуле (4). Значения  $f_i$  на границах вычислялись через значения макровеличин в соответствии с подходом, предложенным в работе [28].

Расчеты производились при задании значений такого критерия подобия, как число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{Vl}{\nu}, \quad (13)$$

где  $l$  представляет собой характерный линейный размер течения,  $V$  — характерную скорость. При решении задачи о течении в каверне в качестве  $l$  естественно брать длину стороны квадрата  $L$ , в качестве  $V$  — значение  $U$ . Задавая определенное значение  $\text{Re}$ , из формулы (13) можно получить значение  $\nu$ , через которое при известном шаге  $\Delta t$  для явной схемы из (7) можно получить значение параметра  $\tau$ , для неявной схемы значение этого параметра можно получить из соотношения (10).

Численные расчеты производились на сетках из  $50 \times 50$ ,  $100 \times 100$ ,  $200 \times 200$  и  $500 \times 500$  узлов при  $1 \times 10^4$ ,  $2 \times 10^4$ ,  $4 \times 10^4$  и  $1 \times 10^5$  шагах по времени соответственно. Число Рейнольдса бралось равным 100. Как показали полученные результаты, через определенное число шагов по времени (например, для случая сетки из  $50 \times 50$  узлов — через  $2.5 \times 10^3$  шагов) решение выходит на стационарный режим и остается неизменным. Можно отметить, что графики решений, полученных на сетках из  $200 \times 200$  и  $500 \times 500$  узлов, визуально не различимы.

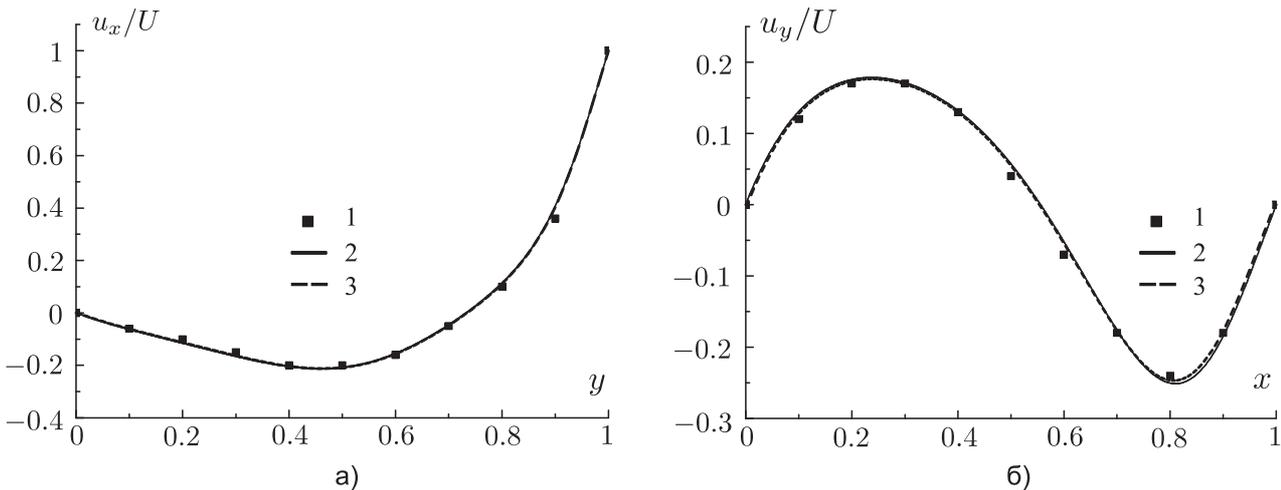


Рис. 2. Графики зависимости  $u_x/U$  от  $y$  (а) и зависимости  $u_y/U$  от  $x$  (б) для задачи о течении в каверне: 1) результат из работы [29], 2) результат расчета по явной схеме, 3) результат расчета по неявной схеме

При численной реализации неявной схемы в каждом узле сетки система из девяти нелинейных уравнений решалась с помощью метода Ньютона, в качестве начального приближения выбиралось решение, полученное с помощью явной схемы (т.е. использовалась идея методов типа “предиктор–корректор”). Как показала практика проведенных автором численных расчетов, метод Ньютона сходил к приближенному

решению менее чем за 35 итераций для всех случаев. В качестве критерия останова выбиралась евклидова норма разности между приближениями, полученными на двух последовательных итерациях, — как только эта величина становилась меньше  $10^{-8}$ , итерационный процесс останавливался.

Результаты, полученные с помощью кинетических схем, сравнивались с результатами, представленными в работе [19], в которой для численного решения применялся многосеточный метод, использующий для дискретизации метод конечных разностей.

На рис. 2 для сравнения представлены графики численных решений, отнесенных к  $U$  и полученных с помощью кинетических схем в случае сетки из  $200 \times 200$  узлов и данных, приведенных в [29]. На рис. 2а представлены графики  $u_x/U$  в точках прямой  $\{x = 0.5L, y \in [0, L]\}$ , а на рис. 2б приведены графики  $u_y/U$  в точках прямой  $\{x \in [0, L], y = 0.5L\}$ . Графики выведены на 8000-м шаге по времени. Как показала практика проведенных автором расчетов, на таком шаге в случае сетки из  $200 \times 200$  узлов решение уже выходит на стационарный режим. Как можно заметить, решения, полученные с помощью кинетических схем, хорошо согласуются с результатами расчетов из [29].

**5.2. Задача о течении в канале с уступом.** Рассматривается задача о течении в области, представленной на рис. 3.

Границы 1 и 2 представляют собой неподвижные твердые стенки, границы 3 и 4 играют роль входного и выходного отверстий соответственно. На рис. 3 приведена форма расчетной области и указаны линейные размеры. В начальный момент времени во внутренних точках области скорость предполагается равной нулю. Плотность предполагается равной единице. На границах 1 и 2 поставлены условия прилипания — компоненты вектора скорости равны нулю:  $u_x = u_y = 0$ , на границах 3 и 4 поставлены условия следующего вида:  $u_x = -4 \frac{U}{H^2} y(y - H)$ ,  $u_y = 0$ , где  $U$  — заданная постоянная величина.

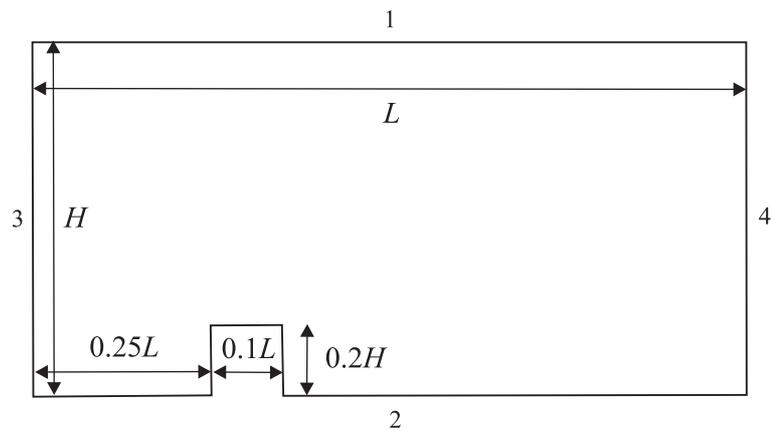


Рис. 3. К постановке задачи о течении в канале с уступом

Начальные и граничные значения  $f_i$  рассчитывались таким же образом, как и для задачи о течении в каверне.

Расчеты производились при следующих значениях параметров:  $L = 2$ ,  $H = 0.5L$  и  $U = 0.1$ . Число Рейнольдса бралось равным 200, в качестве  $l$  в (13) бралась высота уступа  $0.2H$ , в качестве  $V$  — значение  $U$ . Использовалась равномерная сетка из  $400 \times 200$  узлов, построенная в прямоугольнике  $[0, L] \times [0, H]$ , при этом отбрасывались узлы, соответствующие уступу, т.е. принадлежащие прямоугольнику  $[0.25L, 0.35L] \times [0, 0.2H]$ . Расчеты производились с использованием как явной, так и неявной схемы при  $2 \times 10^4$  шагах по времени. Было установлено, что после 15 000 шагов решение выходит на стационарный режим.

Полученные с помощью кинетических схем численные решения сравнивались с результатами расчетов, полученными при решении начально-краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса проекционным методом Чорина–Раннахера [30], в котором для дискретизации по пространственным переменным используется метод конечных элементов. Производные по времени аппроксимируются с первым порядком с использованием правых разностных производных. Программная реализация метода производилась в свободно распространяемом конечно-элементном пакете FreeFem++ [31]. Использовалась неструктурированная сетка из 9175 узлов, полученная при триангуляции области. Использовались линейные базисные функции и бралось то же число шагов по времени, что и для случая кинетических схем.

На рис. 4 представлены графики компоненты вектора скорости  $u_x$ , выведенные в точках прямой  $\{x = 0.5L, y \in [0, H]\}$ . Можно видеть, что решения, полученные по кинетическим схемам и с помощью метода Чорина–Раннахера, хорошо согласуются.

По результатам проведенных расчетов можно отметить, что решения, полученные с помощью предложенной в данной работе неявной кинетической схемы, хорошо согласуются с решениями, полученными как по явной схеме, так и с помощью других методов. Это позволяет говорить о возможности успешного использования данной схемы при решении прикладных задач.

**6. Заключение.** В представленной работе показано, что хорошо известный в вычислительной математике интегро-интерполяционный метод может быть применен для построения семейств кинетических

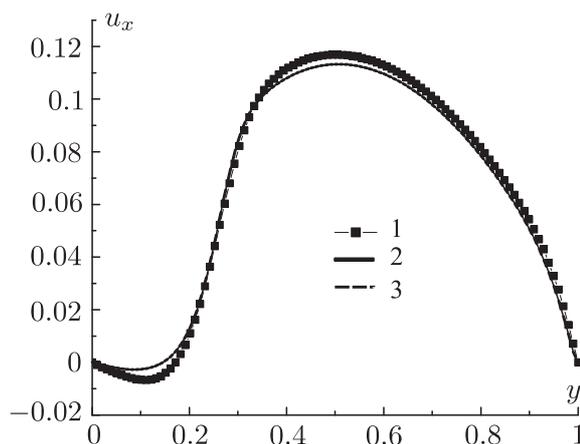


Рис. 4. Графики зависимости  $u_x$  от  $y$  для задачи о течении в канале с уступом. Результаты расчета: 1) по методу Чорина–Раннахера, 2) по явной схеме, 3) по неявной схеме

схем. Построены семейства схем, полученные при применении квадратурных формул нулевой и первой алгебраических степеней точности. При решении двух модельных задач показано, что схема, аппроксимирующая со вторым порядком, может успешно применяться при расчетах плоских течений вязких жидкостей. Следует также отметить, что интегро-интерполяционный метод можно применять и для построения многошаговых как явных, так и неявных кинетических схем высоких порядков аппроксимации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer, 2005.
2. *Chopard B., Dupuis A., Masselot A., Luthi P.* Cellular automata and lattice Boltzmann techniques: an approach to model and simulate complex systems // *Advances in Complex Systems*. 2002. **5**, N 2. 1–144.
3. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
4. *Мачин Д.А., Четверушкин Б.Н.* Кинетические и lattice Boltzmann схемы // *Матем. моделирование*. 2004. **16**, № 3. 87–94.
5. *Xiong W., Zhang J.* A two-dimensional lattice Boltzmann model for uniform channel flows // *Computers and Mathematics with Applications*. 2011. **61**. 3453–3460.
6. *Кутерштох А.Л.* Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость–пар // *Современная наука*. 2010. **2**, № 4. 56–63.
7. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
8. *Velivelli A.C., Bryden K.M.* Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burger's equation // *Physica A*. 2006. **362**. 139–145.
9. *Каменщиков Л.П.* Параллельная реализация метода решеточного уравнения Больцмана для задач гидродинамики // *Математика в приложениях. Тез. докладов Всероссийской конференции, приуроченной к 80-летию академика С.К. Годунова*. Новосибирск, 2009. 133–134.
10. *Kuznik F., Obrecht C., Rusaouen G., Roux J.-J.* LBM based flow simulation using GPU computing processor // *Computers and Mathematics with Applications*. 2010. **59**. 2380–2392.
11. *Obrecht C., Kuznik F., Tourancheau B., Roux J.-J.* A new approach to the lattice Boltzmann method for graphics processing units // *Computers and Mathematics with Applications*. 2011. **61**. 3628–3638.
12. *Кутерштох А.Л.* Реализация метода решеточных уравнений Больцмана на многопроцессорных графических ускорителях для 3D моделирования двухфазных систем типа жидкость–пар // *Современная наука*. 2011. **2**, № 7. 112–118.
13. *Грачев Н.Е., Дмитриев А.В., Сенин Д.С.* Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**. 227–231.
14. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Пер. с англ. под ред. С.С. Филиппова. М.: Мир, 1990.
15. *Веденятин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
16. *Luo L.-S.* Some recent results on discrete velocity models and ramifications for lattice Boltzmann equation // *Computer Physics Communication*. 2000. **129**. 63–74.
17. *He X., Luo L.-S.* A priori derivation of the lattice Boltzmann equation // *Physical Review E*. 1997. **55**, N 6. R6333–R6336.

18. *Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *Int. J. of Multiphase Flow*. 2003. **29**. 117–169.
19. *Dellar P.J.* Lattice kinetic schemes for magnetohydrodynamics // *J. of Computational Physics*. 2002. **179**. 95–126.
20. *Min M., Lee T.* A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows // *J. of Computational Physics*. 2011. **230**. 245–259.
21. *D’Humières D., Ginzburg I., Krafczyk M., Lallemand P., Luo L.-S.* Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions // *Philosophical Transactions of Royal Society of London A*. 2002. **360**. 437–451.
22. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009.
23. *Самарский А.А., Вабичев П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009.
24. *Worthing R.A., Mozer J., Seeley G.* Stability of the lattice Boltzmann models in hydrodynamic regimes // *Physical Review E*. 1997. **56**, N 2. 2243–2253.
25. *Sterling J.D., Chen S.* Stability analysis of lattice Boltzmann methods // *J. of Computational Physics*. 1996. **123**. 196–206.
26. *Kupershtokh A.L.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // *Computers and Mathematics with Applications*. 2010. **59**. 2236–2245.
27. *Кривовичев Г.В.* Об устойчивости решеточной кинетической схемы Больцмана для расчета плоских течений // *Вычислительные методы и программирование*. 2011. **12**, № 1. 178–188.
28. *Zou Q., He X.* On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model // *Physics of Fluids*. 1997. **9**, N 6. 1591–1598.
29. *Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.* High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and multigrid method // *J. of Computational Physics*. 1982. **48**. 387–411.
30. *Rannacher R.* Finite element methods for the incompressible Navier–Stokes equations // *Fundamental directions in mathematical fluid mechanics* / Ed. P. Galdi, J. Heywood, R. Rannacher. Basel: Birkhuser. 2000. 191–293.
31. [www.freefem.org](http://www.freefem.org).

Поступила в редакцию  
26.09.2011

---