УДК 519.633.6

## ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАЗМЕННЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

## A. B. Попов<sup>1</sup>, E. B. Чижонков<sup>1</sup>

Построена новая конечно-разностная схема в эйлеровых переменных для расчета аксиальносимметричных плазменных колебаний, основанная на расщеплении по физическим процессам и дискретизации по времени, которая применяется в схеме Лакса–Вендроффа. С помощью предложенной схемы впервые в эйлеровых переменных проведено моделирование динамики колебаний вплоть до момента их опрокидывания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–01–00625-а).

**Ключевые слова:** плазменные колебания, кильватерные волны, опрокидывание, метод конечных разностей, расщепление по физическим процессам, схема Лакса–Вендроффа, аксиальное решение.

Введение. Численное моделирование плазменных аксиально-симметричных колебаний является интересной и весьма содержательной задачей. Хорошо известно (см. [1]), что одномерные цилиндрические колебания в плазме разрушаются при любых (сколь угодно малых!) амплитудах вследствие вклада электронных нелинейностей в сдвиг частоты. Однако наиболее важно, что они являются более простой, но тем не менее весьма нетривиальной моделью для изучения аксиально-симметричных кильватерных плазменных волн, возбуждаемых движущимися источниками — драйверами (электронными сгустками, короткими лазерными импульсами). В настоящее время кильватерные волны в плазме активно изучаются как теоретически, так и экспериментально. Их основное применение связано с ускорением в них заряженных частиц до высоких энергий (так называемые плазменный и лазерные ускорители на кильватерной волне [2, 3]). Кроме того, в последнее время обсуждается возможность использования кильватерных волн для генерации электромагнитного излучения терагерцового диапазона частот (см. [4, 5] и цитированные там работы). Напомним, что существенной особенностью двумерной нелинейной кильватерной волны является изменение ее характеристик по мере удаления от источника: сначала из-за нелинейной зависимости частоты от амплитуды происходит заметное искривление волнового фронта, а затем на определенном расстоянии сзади за источником кильватерная волна опрокидывается, передавая свою энергию частицам плазмы. Процесс опрокидывания сопровождается интенсивным коротковолновым электромагнитным излучением. Хорошее качественное и количественное соответствие основных характеристик (в частности, функции электронной плотности) аксиально-симметричных колебаний и кильватерных волн как с учетом релятивистских эффектов, так и при пренебрежении ими было установлено в работах [6, 7]. Поэтому при моделировании начальные условия для возбуждения колебаний, как правило, подбираются так, чтобы обеспечить их форму, максимально близкую к форме кильватерной волны при ее инициализации с помощью лазерного импульса.

Напомним, что при математическом моделировании процессов в бесстолкновительной холодной плазме наиболее часто используются два подхода: гидродинамическое описание и метод частиц (см., например, [8–10]). В первом случае критерием опрокидывания колебаний является обращение в бесконечность функции, описывающей плотность электронов, а во втором — пересечение электронных траекторий. В монографии [11] (см. также приложение в [12]) имеется строгое обоснование появления сингулярности плотности среды при пересечении траекторий частиц. Поэтому далее в работе при обсуждении опрокидывания колебаний будем использовать оба критерия, исходя при этом только из соображений удобства изложения. В терминах дифференциальных уравнений эффект опрокидывания имеет установившееся название "blow-up" (см., например, [13, 14]), т.е. обращение решения в бесконечность на конечном промежутке времени при достаточно гладких начальных данных. В нашем случае важно, что координаты точки опрокидывания сложным (нелинейным!) образом зависят от параметров, определяющих начальные данные. К сожалению, универсальные методики, позволяющие вычислять переменные с требуемой точностью в окрестности особенности, в настоящее время не известны.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; А.В. Попов, доцент, e-mail: popovav@mech.math.msu.su; Е.В. Чижонков, профессор, e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

<sup>(</sup>с) Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Следует обратить внимание, что задача об опрокидывании колебаний является достаточно сложной с вычислительной точки зрения. Например, используя эйлеровы переменные в гидродинамическом описании, ранее не удавалось смоделировать эффект опрокидывания аксиально-симметричных колебаний. Это получилось только в настоящей работе. До сих пор удачными были численные эксперименты по опрокидыванию только на основе лагранжевых переменных. Кроме того, значение координаты по времени разрушения колебаний весьма чувствительно к входным данным: в слабонелинейном приближении оно обратно пропорционально третьей степени (кубу!) начальной амплитуды. Это означает, что определение физических параметров вычислительно доступного варианта уже является непростой задачей. Наконец, радиальная (по отношению к оси симметрии) координата опрокидывания в умеренно нелинейном режиме (когда возмущение электронной плотности всего лишь на порядок превосходит фоновое значение) составляет порядка 1–2% от характерного размера расчетной области. Другими словами, с целью адекватного отображения процесса требуется по порядку 10<sup>3</sup> точек по каждой пространственной координате даже при условии достаточной гладкости искомых функций.

Вышесказанное определяет структуру статьи. Сначала приведены постановка задачи и качественный сценарий развития — завершения аксиально-симметричных плазменных колебаний. Затем изложен процесс построения схемы метода конечных разностей на основе расщепления по физическим процессам и дискретизации по времени, аналогичной схеме "тренога". Схема представлена в двух версиях: базовой и компактной. Для сравнения приближенных решений, порождаемых этими схемами, далее рассмотрено аксиальное решение задачи о плазменных колебаниях. Для него доказано условие существования, единственности и периодичности во времени. В разделе о численных экспериментах показано, что обе версии имеют одинаковые по порядку свойства устойчивости и сходимости, однако базовая схема является более точной. Там же приведены результаты расчетов, демонстрирующие качество построенной схемы: впервые методом конечных разностей в эйлеровых переменных был посчитан процесс разрушения колебаний вплоть до опрокидывания (формирования разрыва у функции, описывающей электрическое поле). В заключении кратко систематизированы результаты проведенных и обозначены направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи и сценарий процесса. Система гидродинамических уравнений для холодной идеальной релятивистской электронной жидкости совместно с уравнениями Максвелла (см., например, [2]) имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\boldsymbol{v}) = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = e\boldsymbol{E} - mc^2 \nabla \gamma, \quad \boldsymbol{B} = -\frac{c}{e} \operatorname{rot} \boldsymbol{p}, 
\gamma = \sqrt{1 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2 c^2}}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m\gamma}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -4\pi e n \boldsymbol{v} + c \operatorname{rot} \boldsymbol{B},$$
(1.1)

где e, m — заряд и масса электрона; c — скорость света; n, p, v — концентрация (плотность), удельный импульс и скорость электронов;  $\gamma$  — лоренцевский фактор; E, B — напряженности электрического и магнитного полей.

С целью проведения качественного анализа плазменных аксиально-симметричных колебаний систему (1.1) можно существенно упростить. Применяя допущения, что решение определяется только радиальными компонентами вектор-функций p, v, E и зависимость в них от продольной координаты отсутствует, в нерелятивистском случае можно получить замкнутые обезразмеренные уравнения вида

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V \left[ 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho E \right) \right] = 0. \tag{1.2}$$

Здесь и далее  $\rho = k_p r$ ,  $\theta = \omega_p t$ ,  $V = \frac{v_r}{c}$ ,  $E = -\frac{eE_r}{mc\omega_p}$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ , где  $\omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m}\right)^{1/2}$  — плазменная частота,  $n_0$  — значение невозмущенной электронной плотности и  $k_p = \omega_p/c$ . При этом для представляющей

частота, 
$$n_0$$
 — значение невозмущенной электронной плотности и  $\kappa_p = \omega_p / c$ . При этом для представляющей первоочередной интерес безразмерной функции электронной плотности имеем следующее выражение:

$$N = 1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho E\right). \tag{1.3}$$

Детали получения уравнений (1.2), (1.3) из базовой системы (1.1) имеются в [6].

Сделаем важное предположение о форме начальных условий для системы (1.2) (зафиксируем соответствующий момент времени как  $\theta = 0$ ):

$$V(\rho,\theta)\big|_{\theta=0} = 0, \quad E(\rho,\theta)\big|_{\theta=0} = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp^2\left\{-\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}.$$
 (1.4)

Как уже отмечалось во введении, изучение колебаний в настоящей работе не является самоцелью, а служит только начальным этапом исследования динамики кильватерных волн, порождаемых, в первую очередь, коротким лазерным импульсом. Как правило, в теоретических выкладках полагают, что пространственные характеристики импульса имеют гауссово распределение по координатам. Например, комплекснозначную функцию, характеризующую поведение импульса (так называемую огибающую), в аксиально-симметричном случае часто берут в виде  $a = a_0 \exp \left\{-\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}$ , где величина  $a_0$  в общем случае

может зависеть как от времени, так и от пространственных координат. Теперь, имея в виду, что влияние лазерного импульса передается в систему (1.1) через релятивистский фактор, можно установить, что при p = 0 и  $E \approx -\frac{\partial \gamma}{\partial \rho}$  форма начального распределения возмущающего электрического поля описывается как в (1.4) (см. детали рассуждений в [12]). Отметим также, что кроме формального соответствия начальных условий для аксиально-симметричных колебаний и механизма возбуждения кильватерной волны формула для E в (1.4) учитывает еще и глубокую внутреннюю связь между этими процессами. Дело в том, что если размер фокального пятна импульса меньше длины плазменной волны ( $\rho_* < 1$ ), то в кильватерной волне колебания электронов в радиальном направлении будут существенно превосходить колебания в продольном направлении, т.е. уменьшение параметра  $\rho_*$  в (1.4) приводит к сближению математических моделей указанных процессов по существу.

Добавим краевые условия в области  $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}\}$ для завершения постановки задачи. При  $\rho = 0$ , в силу аксиальной симметрии задачи, имеем

$$V(\rho,\theta)\big|_{\rho=0} = E(\rho,\theta)\big|_{\rho=0} = 0.$$
(1.5)

Кроме того, явный вид (1.4) позволяет ограничить размер области, в которой фактически происходят колебания. Если положить  $\rho_{\max} \approx 4\rho_*$ , то получим оценку  $\exp^2\left(-\frac{\rho_{\max}^2}{\rho_*^2}\right) \ll 1$ . Поэтому при  $\rho = \rho_{\max}$  с хорошей точностью справедливы равенства

$$V(\rho,\theta)\big|_{\rho=\rho_{\max}} = E(\rho,\theta)\big|_{\rho=\rho_{\max}} = 0.$$
(1.6)





Рис. 1. Пространственно-временно́е распределение плотности электронов до образования внеосевого максимума

Рис. 2. Пространственно-временно́е распределение плотности электронов при образовании внеосевого максимума

Формальная постановка задачи в эйлеровых переменных (1.2), (1.4)–(1.6) позволяет в целом охарактеризовать качественный сценарий динамики аксиально-симметрических плазменных колебаний. Зафиксируем для определенности значения параметров в (1.4):  $a_* = 0.365$ ,  $\rho_* = 0.6$  и рассмотрим соответствующий им рис. 1. На нем отчетливо виден процесс эволюции нелинейных плазменных колебаний во времени, а также их радиальная структура. На начальной стадии колебаний максимальная величина плотности электронов расположена на оси и примерно на порядок превышает фоновое значение. Далее с течением времени в процессе колебаний наблюдаются две тенденции. Первая из них заключается в том, что внеосевые колебания несколько отстают по фазе от колебаний на оси и от периода к периоду этот фазовый сдвиг увеличивается. Вторая тенденция более наглядна: с течением времени происходит постепенное формирование абсолютного максимума плотности, расположенного вне оси и сравнимого по величине с осевыми. Описанная картина с двумя максимумами изображена отдельно на рис. 2, причем для наглядности изменен угол наблюдения. Рождение внеосевого максимума электронной плотности является сигналом, что регулярное развитие колебаний завершилось и начался процесс их разрушения. Динамика разрушения наиболее заметно проявляется в росте значения внеосевого экстремума: от периода к периоду оно растет и в конце концов обращается в бесконечность, т.е. происходит опрокидывание колебаний. При указанных параметрах внеосевой максимум плотности сформировался при  $\theta_{\max}^{(1)} \approx 34$ , увеличился примерно в два раза на следующем периоде при  $\theta_{\max}^{(2)} \approx 40$  и обратился в бесконечность при  $\theta_{br} \approx 46$ . В силу справедливости формулы (1.3) сингулярность плотности означает формирование скачка (разрыва) радиальной компоненты электрического поля. Заметим, что осевые экстремумы электронной плотности при этом ведут себя регулярным образом, т.е. их абсолютные значения и периодичность появления практически неизменны вплоть до опрокидывания.

Зафиксируем теперь некоторое значение  $\rho_* < 1$  (для отмеченной выше близости моделей электронных колебаний и плазменных волн) и охарактеризуем вариации описанного процесса при изменении параметра  $a_*$ . Предположим сначала, что  $a_*$  будет монотонно убывать. Тогда эволюция плазменных колебаний будет растягиваться во времени, асимптотически приближаясь к результатам слабонелинейной модели, которая была подробно изучена в [6, 12] (см. также [7]). Напомним, что при  $\rho_* \ll 1$  и достаточно малых  $a_*$ 

справедливы асимптотические формулы для амплитуды колебаний  $N_{\rm max} = C_1 \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2$ , времени формиро-

вания первого внеосевого максимума электронной плотности  $\theta_{\max}^{(1)} = C_2 \left(\frac{\rho_*}{a_*}\right)^4$  и времени опрокидывания

колебаний  $\theta_{\rm br} = C_3 \left(\frac{\rho_*}{a_*}\right)^6$  с некоторыми постоянными  $C_i, i = 1, 2, 3$ . Для этого приближения известна 1

также радиальная координата точки опрокидывания —  $\rho_{\rm br} = \frac{1}{\sqrt{6}} \rho_*$ .

Пусть параметр а<sub>\*</sub> будет монотонно расти. Тогда, наоборот, эволюция плазменных колебаний будет сжиматься во времени, приобретая все более нелинейный характер. В первую очередь это будет заметно по абсолютным значениям регулярных осевых максимумов: их значения начнут превосходить фоновое в десятки раз и более. Например, при  $a_* = 0.391$  имеем  $N_{\text{axis}} \approx 111$ , а при  $a_* = 0.401$  имеем  $N_{\text{axis}} \approx 1244$ . Время опрокидывания колебаний и соответствующая радиальная координата будут уменьшаться. При этом наблюдается такая качественная картина. Если опрокидывания колебаний происходят внутри одного периода, то их радиальная координата монотонно убывает при возрастании а<sub>\*</sub>. При "перескакивании" времени опрокидывания в предыдущий период радиальная координата скачком увеличивается, а затем плавно внутри периода убывает. При этом ее минимальное по периодам значение стремится к нулю, т.е. к оси. В процессе роста параметра  $a_*$  (при фиксированном значении  $\rho_*$ ) не всегда удается отследить формирование и рост внеосевого экстремума плотности. Внеосевое опрокидывание часто происходит настолько быстро, что внеосевой экстремум не может просуществовать даже одного периода по времени. Отметим также, что время формирования первого осевого экстремума электронной плотности также убывает при возрастании а<sub>\*</sub>. По крайней мере ни разу в расчетах не было обнаружено опрокидывания накануне появления первого осевого максимума. Критическим в гидродинамической модели является значение  $(a_*/\rho_*)^2 = 1/2$ , в окрестности которого опрокидывание будет носить практически осевой характер: начальное распределение электронов таково, что все они дружно устремляются к оси, отражаются от нее, а затем очень быстро происходит пересечение электронных траекторий. Таким образом, длительность колебаний в окрестности критического значения не будет превышать и половины периода. Этот факт следует из исследования аксиальных решений рассматриваемой задачи [15].

Обратим внимание, что существует еще один сценарий динамики электронных колебаний, существенно отличающийся от рассмотренного выше. Он имеет место при отрицательном распределении электрического поля в начальный момент времени (т.е. если изменить знак в формуле (1.4)). Например, при значениях  $a_* = 0.65$ ,  $\rho_* = 0.6$  имеем качественно совершенно другую картину электронной плотности. На оси с периодом примерно  $2\pi$  располагаются небольшие одинаковые  $N_{\text{аxis}} \approx 3.3$  максимумы (первый сразу при  $\theta = 0$ ), а вне оси на расстоянии примерно  $\rho = 0.78$  со смещением по времени на величину порядка половины периода расположена последовательность монотонно возрастающих (до бесконечности) внеосевых максимумов (см. рис. 3). Конечно, их регулярность во времени и пространстве отличается от осевых. Они постепенно сближаются между собой и смещаются в сторону оси, но эти перемещения носят достаточно плавный характер и не приводят к сингулярностям. При этом первое же значение внеосевого максимума примерно в полтора раза больше осевого, но опрокидывание возникает существенно позже, чем при первом сценарии:  $\theta_{\rm br} \approx 114$ . Здесь имеется еще одно важное отличие: радиальная координата опрокидывания отстоит от оси достаточно далеко (в данном варианте —  $\rho_{\rm br} \approx 0.36$ ), и это резко снижает вычислительную трудность задачи. Однако напомним, что основной целью работы является исследование процесса колебаний, который аналогичен динамике кильватерных волн (по крайней мере для волн, возбуждаемых узким лазерным импульсом). Поэтому приоритетное значение имеет первый сценарий, которому и посвящена настоящая работа.

Из описания сценария колебаний несложно понять, почему процесс опрокидывания практически невозможно смоделировать в эйлеровых переменных без использования специально сконструированных схем. Успешным расчетам в равной мере препятствуют обе указанные тенденции: как искривление фазового фронта, так и неограниченный рост внеосевого максимума. В результате их развития гладкость искомых функций ухудшается настолько, что это требует существенного измельчения параметров дискретизации по времени и пространству одновременно. Последнее приводит к востребованию колоссальных вычислительных ресурсов, но даже их использование не приводит к успеху, так как указанные тенденции про-



Рис. 3. Пространственно-временно́е распределение плотности электронов при противоположно направленном электрическом поле

должают развиваться вплоть до эффекта опрокидывания. Отсюда следует, почему численное решение задачи (1.2), (1.4)–(1.6) с использованием традиционных разностных схем [6, 7] не позволило исследовать структуру плотности электронов после появления внеосевого максимума в режиме даже умеренной нелинейности.

**2. Вспомогательные конструкции.** В системе уравнений (1.2), по существу, представлено взаимодействие двух физических процессов: нелинейные колебания в фиксированной точке пространства и их пространственно-временной перенос. Поэтому удобно предварить формальное описание предлагаемых схем напоминанием базовых вспомогательных конструкций, при этом центральное место выделим процедуре дискретизации по времени с целью получения приближения второго порядка.

2.1. Расщепление по физическим процессам. Рассмотрим модельное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1(u) + L_2(u), \tag{2.1}$$

где  $L_i$ , i = 1, 2, - в общем случае нелинейные операторы, возможно (но не обязательно) связанные с дифференцированием по пространству. Введем дискретизацию по времени:  $t_j = j\tau$ ,  $j \ge 0$ ,  $\tau$  — шаг по переменной t. Для простоты будем считать, что решение зависит только от двух независимых переменных t и x. Удобно воспользоваться обозначениями:  $u = u(t_j, x)$ ,  $\hat{u} = u(t_j + \tau, x)$ . Тогда в предположении гладкости решения (2.1) будем иметь  $\hat{u} = u + \tau [L_1(u) + L_2(u)] + O(\tau^2)$ . Теперь в соответствии с [16] заменим решение (2.1) на отрезке  $[t_j, t_j + \tau]$  последовательным решением двух вспомогательных задач

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_1(v), \quad v\big|_{t=t_j} = u$$
(2.2)

И

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_2(w), \quad w \big|_{t=t_j} = \widehat{v}.$$
 (2.3)

Заметим, что в случае достаточной гладкости искомого решения и полиномиальной (в нашем случае — квадратичной) нелинейности операторов  $L_i$ , i = 1, 2, имеем  $\widehat{w} = \widehat{u} + O(\tau^2)$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= v + \tau L_1(v) + O(\tau^2) = u + \tau L_1(u) + O(\tau^2), \\ \widehat{w} &= w + \tau L_2(w) + O(\tau^2) = \widehat{v} + \tau L_2(\widehat{v}) + O(\tau^2) = u + \tau L_1(u) + \tau L_2(u + \tau L_1(u) + O(\tau^2)) = \\ &= u + \tau [L_1(u) + L_2(u)] + O(\tau^2) = \widehat{u} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Для фактического решения уравнений (2.2) и (2.3) будем использовать в дальнейшем аппроксимации порядка  $O(\tau^2 + h^2)$ , где h — шаг дискретизации по пространственной переменной.

**2.2.** Схема Лакса–Вендроффа ("тренога"). Рассмотрим другое модельное уравнение (типа нелинейного переноса)  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$ ,  $F(u) = \frac{u^2}{2}$ , и введем обозначение  $A = \frac{\partial F}{\partial u}$ . В предположении достаточной гладкости решения u имеем  $u_{tt} = -F_{xt} = -F_{tx}$ ,  $F_t = F_u u_t = -F_u F_x \equiv -AF_x$ . Это дает  $u_{tt} = (AF_x)_x$  и, соответственно,

$$\widehat{u} = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + O(\tau^3) = u - \tau F_x + \frac{\tau^2}{2} (AF_x)_x + O(\tau^3).$$

В приведенных выше выкладках нижним индексом обозначено частное дифференцирование по соответствующей переменной. Теперь можно записать дискретизацию по времени схемы "тренога":

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \frac{\partial F^j}{\partial x} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( A^j \frac{\partial F^j}{\partial x} \right)$$

обладающую аппроксимацией  $O(\tau^2)$ . Здесь верхний индекс обозначает принадлежность функции к соответствующему моменту времени.

Отметим, что если взять линейное уравнение переноса  $\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  в качестве модельного уравнения, то для него дискретизация по времени, аналогичная схеме "тренога", будет иметь вид

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} + \left(v^j + \frac{\tau}{2}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau v^j}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v^j\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

и так же обладать аппроксимацией  $O(\tau^2)$  на гладких решениях.

**3.** Построение разностных схем. Приведем уравнения (1.2) к удобному виду. С этой целью выделим явно слагаемое во втором уравнении, отвечающее за сдвиг частоты колебаний. В результате получим

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} + E + V \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} - V + \frac{VE}{\rho} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} = 0.$$

Отнесем теперь к описанию процесса нелинейных колебаний уравнения

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \theta} + \widetilde{E} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{E}}{\partial \theta} - \widetilde{V} + \frac{\widetilde{V}\widetilde{E}}{\rho} = 0,$$
(3.1)

а к их переносу в пространстве и времени —

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \theta} + \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \overline{E}}{\partial \theta} + \overline{V} \frac{\partial \overline{E}}{\partial \rho} = 0.$$
(3.2)

В качестве основы для дискретизаций по времени обеих систем применим обычную схему с перешагиванием. Пусть  $\tau$  — шаг по времени, тогда будем относить к "целым" моментам времени  $\theta_j = j\tau$   $(j \ge 0$  целое) величины  $E, \tilde{E}, \overline{E}, N$ , а к "полуцелым"  $\theta_{j\pm 1/2} - V, \tilde{V}, \overline{V}$ . Выбор соответствующего момента времени для значения функции будем обозначать верхним индексом. Для дискретизации по пространству будем использовать сетку с постоянным шагом h так, что  $\rho_m = mh, 0 \le m \le M, Mh = \rho_{max}$ .

**3.1. Схема расщепления.** Запишем разностные уравнения, аппроксимирующие системы (3.1) и (3.2). Для первой из них получим

$$\frac{\widetilde{V}_{m}^{j+1/2} - \widetilde{V}_{m}^{j-1/2}}{\tau} + \widetilde{E}_{m}^{j} = 0, 
\frac{\widetilde{E}_{m}^{j+1} - \widetilde{E}_{m}^{j}}{\tau} - \widetilde{V}_{m}^{j+1/2} + \frac{\widetilde{V}_{m}^{j+1/2}}{\rho_{m}} \frac{\widetilde{E}_{m}^{j+1} + \widetilde{E}_{m}^{j}}{2} = 0, 
\widetilde{V}_{m}^{j-1/2} = V_{m}^{j-1/2}, \quad \widetilde{E}_{m}^{j} = E_{m}^{j}, \quad 1 \leq m \leq M - 1.$$
(3.3)

Дискретный аналог системы (3.2) имеет следующий вид:

$$\frac{\overline{V}_{m}^{j+1/2} - \overline{V}_{m}^{j-1/2}}{\tau} + F_{\circ}^{j-1/2} = \frac{\tau}{2} \left( \overline{V}_{s,m}^{j-1/2} F_{\mathbf{X},m}^{j-1/2} \right)_{\overline{\mathbf{x}},m}, \\
\frac{\overline{E}_{m}^{j+1} - \overline{E}_{m}^{j}}{\tau} + \left( \overline{V}_{m}^{j+1/2} + \frac{\tau}{2} \frac{\overline{V}_{m}^{j+1/2} - \overline{V}_{m}^{j-1/2}}{\tau} \right) \overline{E}_{\circ,m}^{j} = \frac{\tau}{2} \overline{V}_{m}^{j+1/2} \left( \overline{V}_{s,m}^{j+1/2} \overline{E}_{\mathbf{X},m}^{j} \right)_{\overline{\mathbf{x}},m}, \\
\overline{V}_{m}^{j-1/2} = \widetilde{V}_{m}^{j+1/2}, \quad \overline{E}_{m}^{j} = \widetilde{E}_{m}^{j+1}, \quad 1 \le m \le M-1, \quad \overline{V}_{0}^{j+1/2} = \overline{V}_{M}^{j+1/2} = \overline{E}_{0}^{j+1} = \overline{E}_{M}^{j+1} = 0.$$
(3.4)

В выражении (3.4) использованы обозначения:  $F^{j-1/2} \equiv F(V^{j-1/2}) = \frac{1}{2} \left( V_m^{j-1/2} \right)^2$ ,  $F_{s,m} = \frac{F_{m+1} + F_m}{2}$ ,  $F_{x,m} = \frac{F_{m+1} - F_{m-1}}{2h}$  – центральная разность,  $F_{x,m} = \frac{F_{m+1} - F_m}{h}$  и  $F_{\overline{x}} = \frac{F_m - F_{m-1}}{h}$  – разности вперед и назад соответственно.

После вычислений по схеме (3.4) следует переопределить искомые функции на следующем временном слое:  $V_m^{j+1/2} = \overline{V}_m^{j+1/2}$ ,  $E_m^{j+1} = \overline{E}_m^{j+1}$ ,  $0 \le m \le M$ , и рассчитать (при необходимости) значение электронной плотности по формуле

$$N_m^{j+1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\rho_m} \frac{\rho_{m+1} E_{m+1}^{j+1} - \rho_{m-1} E_{m-1}^{j+1}}{2 h} & \text{при} \quad 1 \leqslant m \leqslant M - 1 \\ 1 - 2 \frac{E_1^{j+1}}{h} & \text{при} \quad m = 0, \\ 0 & \text{при} \quad m = M. \end{cases}$$

На этом вычисления на *j*-м шаге по времени заканчиваются и можно переходить к следующему. Следует отметить, что начальные данные (1.4) соответствуют j = 0, поэтому их следует отнести для V к слою с номером -1/2, а для E — с номером 0.

Сделаем замечание о предлагаемой схеме расщепления (3.3) и (3.4). Для каждой из вспомогательных задач при достаточной гладкости решения имеется аппроксимация порядка  $O(\tau^2 + h^2)$ , а также условие устойчивости, полученное на основе спектрального признака [17, 23], вида  $\tau = O(h)$ . Это уже является хорошим аргументом, что рассматривая схема более удобна для расчетов, чем ранее использовавшиеся для тех же целей [6, 7]. В частности, применение новой схемы позволяет добиться существенной экономии вычислительных ресурсов за счет более слабого условия устойчивости без потери аппроксимации. Кроме того, схема (3.3) и (3.4) — явная, что порождает потенциал для распараллеливания при обобщении на многомерные случаи.

**3.2. Компактная версия схемы расщепления.** Конструкция представленной выше схемы позволяет попарно объединить как первые, так и вторые уравнения в соотношениях (3.2) и (3.3). Это приводит к компактной версии схемы: в данном случае исчезает необходимость использования вспомогательных величин  $\tilde{E}, \bar{E}$  и  $\tilde{V}, \bar{V}$ . Приведем ее формальную запись:

$$\frac{V_m^{j+1/2} - V_m^{j-1/2}}{\tau} + E_m^j + F_{\hat{x},m}^{j-1/2} = \frac{\tau}{2} \left( V_{s,m}^{j-1/2} F_{X,m}^{j-1/2} \right)_{\overline{x},m}, \\
\frac{E_m^{j+1} - E_m^j}{\tau} - V_m^{j+1/2} + \frac{V_m^{j+1/2}}{\rho_m} \frac{E_m^{j+1} + E_m^j}{2} + \left( V_m^{j+1/2} + \frac{\tau}{2} \frac{V_m^{j+1/2} - V_m^{j-1/2}}{\tau} \right) E_{\hat{x},m}^j = (3.5) \\
= \frac{\tau}{2} V_m^{j+1/2} \left( V_{s,m}^{j+1/2} E_{X,m}^j \right)_{\overline{x},m}, \quad 1 \le m \le M - 1, \quad V_0^{j+1/2} = V_M^{j+1/2} = E_0^{j+1} = E_M^{j+1} = 0.$$

При проведении расчетов компактные версии схем расщепления более удобны, однако иногда могут приводить к ухудшению аппроксимационных свойств. Поэтому для увеличения надежности вычислений следует проводить сравнительный анализ обоих вариантов, причем используя тесты, учитывающие специфику искомого решения.

4. Аксиальное решение. В работе [15] для нелинейных задач, описывающих лазер-плазменные взаимодействия и обладающих аксиальной симметрией, было введено понятие аксиального решения как решения, имеющего локально-линейную зависимость по пространственной координате. Там же было проведено численное исследование решений такого типа, в том числе для задачи нерелятивистских плазменных колебаний.

В настоящей работе аксиальное решение привлекается для сравнения качества рассматриваемых разностных схем. Предварительно установим его полезные свойства, действуя по аналогии с работой [18]. Под аксиальным решением уравнений (1.2) понимается вещественное решение вида  $V(\rho, \theta) = W(\theta)\rho$ ,  $E(\rho, \theta) = D(\theta)\rho$ . Несложно убедиться, что множители, зависящие от времени, в данном случае удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$W' + D + W^2 = 0, \quad D' - W + 2WD = 0.$$
 (4.1)

Дополним полученные уравнения произвольными вещественными начальными условиями

$$W(0) = \beta, \quad D(0) = \alpha \tag{4.2}$$

и выясним условия существования и единственности решения задачи Коши (4.1), (4.2).

Заметим, что приведенная задача Коши не является тривиальной, поскольку допускает как регулярные периодические решения (например, при малых  $\alpha$  и  $\beta$ ), так и решения, имеющие сингулярности на конечном интервале времени (так называемые blow-up-peшения). При этом имеющиеся результаты даже для полиномиальных правых частей [19] в общем случае не позволяют установить точную границу между множествами начальных данных, порождающими решения различных типов. Поэтому представляется полезным несколько иной взгляд на рассматриваемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Имеет место

Лемма. Задача Коши (4.1), (4.2) эквивалентна следующей дифференциально-алгебраической задаче:

$$W' + (\alpha + \beta^2)x + (\alpha - 1/2)x \ln x = 0, \qquad (4.3)$$

$$2W^{2} + 1 - (1 + 2\beta^{2})x - 2(\alpha - 1/2)x\ln x = 0, \qquad (4.4)$$

$$W(0) = \beta, \quad x(0) = 1. \tag{4.5}$$

**Доказательство.** После исключения из системы (4.1) функции *D* получим задачу Коши для уравнения второго порядка:

$$W'' + 4W'W + W + 2W^3 = 0, \quad W(0) = \beta, \quad W'(0) = -(\alpha + \beta^2).$$
(4.6)

Понизим порядок уравнения с помощью замены  $p(W) = W'_{\theta}$ :

$$p'_W p + 4pW + W + 2W^3 = 0. (4.7)$$

Здесь и далее нижний индекс у производной явно указывает на независимую переменную, по которой проводится дифференцирование. Отметим, что уравнению (4.7) соответствует (см. задачу (4.6)) начальное условие

$$p(\beta) = -(\alpha + \beta^2). \tag{4.8}$$

Преобразование зависимой переменной p(W) = 1/u(W) приведет к уравнению

$$u'_W - 4u^2W - u^3(W + 2W^3) = 0,$$

в котором удобно сделать подстановку  $u(W) = \eta(\xi)$ , где  $\xi = 2W^2 + C_{\xi}$ . В результате будем иметь  $\eta'_{\xi} = g(\xi)\eta^3 + \eta^2$ ,  $g(\xi) = \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}(1 - C_{\xi})$ . Для получения аналитического решения этого уравнения введем параметризацию независимого переменного  $\xi = \xi(t)$  так, что  $\xi'_t = -\frac{1}{t\,\eta(\xi)}, t \neq 0$ , и в качестве ее следствия придем к уравнению  $t^2\xi''_t + \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}(1 - C_{\xi}) = 0$ . Его общее решение имеет вид

$$\xi(t) = C_1 t^{1/2} + C_2 t^{1/2} \ln t - (1 - C_{\xi}),$$

откуда следует формула

$$\eta(\xi) = -\left(\frac{1}{2}C_1t^{1/2} + \frac{1}{2}C_2t^{1/2}\ln t + C_2t^{1/2}\right)^{-1}.$$

Возврат к исходным переменным дает

$$p(W) = -\left(\frac{1}{2}C_1t^{1/2} + \frac{1}{2}C_2t^{1/2}\ln t + C_2t^{1/2}\right), \quad 2W^2 + 1 = C_1t^{1/2} + C_2t^{1/2}\ln t$$

Определение постоянных  $C_1, C_2$  из условия (4.8), т.е. из согласования значений параметров  $\theta = 0$  и t = 1, и формальная замена  $t^{1/2} = x$  приводят к дифференциально-алгебраической задаче (4.3)–(4.5). Лемма доказана.

Отметим, что проведенная процедура есть несложная последовательность хорошо известных технических приемов (см., например, [20]). Ее практическая польза в данном случае состоит в получении эквивалентной задачи в более удобной для исследования форме. С помощью доказанного утверждения устанавливается **Теорема.** Необходимым и достаточным условием существования и единственности периодического гладкого решения задачи Коши (4.1), (4.2) является выполнение неравенства

$$\alpha < 1/2. \tag{4.9}$$

## Доказательство.

Достаточность. Пусть неравенство (4.9) выполнено. Рассмотрим многообразие (4.4). Используя линейные замены переменных  $z = W\sqrt{2}$ ,  $x = y \exp(r/s)$ , где  $r = 1 + 2\beta^2$ ,  $s = 1 - 2\alpha > 0$ , приведем его к виду

$$z^2 + 1 + Ay \ln y = 0 \tag{4.10}$$

с параметром  $A = s \exp(r/s)$ . Несложно установить, что кривая (4.10) является гладкой и замкнутой (компактной) при A > e, а при A = e вырождается в точку z = 0, y = 1/e. При этом равенство A = e соответствует случаю  $\beta = \alpha = 0$ , порождающему только тривиальное решение задачи Коши (4.1), (4.2) и не представляющему поэтому никакого интереса. Для остальных значений  $\beta$  и  $\alpha < 1/2$  справедливо строгое неравенство A > e, т.е.  $(1 - 2\alpha) \exp \frac{1 + \beta^2}{1 - 2\alpha} > e$ , которое легко проверяется от противного.

Теперь из гладкости и компактности многообразия (4.4), а также из гладкости правой части системы (4.1) в нормальной форме следует существование и единственность неограниченно продолжаемого в обе стороны относительно точки  $\theta = 0$  гладкого решения (см., например, [21]), а теорема Пуанкаре– Бендиксона [22] гарантирует его периодичность. Достаточность доказана.

*Необходимость*. Пусть неравенство (4.9) не выполнено, тогда возможны два случая. Рассмотрим их последовательно.

Пусть  $\alpha = 1/2$ , тогда многообразие (4.4) является параболой  $W^2 = 2y$ , где  $y = \frac{1}{4} \Big[ (1 + 2\beta^2) x - 1 \Big]$ , а соответствующее ему уравнение (4.3) имеет вид

$$W' = -\left(2y + \frac{1}{2}\right) \equiv -W^2 - \frac{1}{2}.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $W(0) = \beta$  несложно выписать явно:

$$W_0(\theta) = \left[\frac{\beta}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \beta \operatorname{tg} \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right]^{-1},$$

откуда следует, что оно монотонно убывает и становится неограниченным при некотором  $0 < \theta_* < 2\pi$ , таком, что либо знаменатель равен нулю при  $\beta \neq 0$ , либо  $\theta_* = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  при  $\beta = 0$ .

Пусть  $\alpha > 1/2$ , тогда уравнение (4.3) удобно записать в виде  $W' = -(\alpha + \beta^2)x - (\alpha - 1/2)x \ln x$ . Покажем, что при произвольном начальном условии  $W(0) = \beta$  решение этого уравнения убывает быстрее, чем  $W_0(\theta)$ . В силу теоремы сравнения для этого достаточно установить справедливость неравенства

$$-(\alpha + \beta^2)x - (\alpha - 1/2)x \ln x < -W^2 - 1/2$$

на рассматриваемом многообразии (4.4). Пусть справедливо обратное неравенство

$$-(\alpha + \beta^2)x - (\alpha - 1/2)x \ln x \ge -W^2 - 1/2.$$
(4.11)

Тогда из (4.4) выразим величину  $(\alpha - 1/2)x \ln x$  и подставим ее в (4.11). После элементарных преобразований получим  $(1/2 - \alpha)x \ge 0$ . Теперь вспомним, что x > 0 (см. доказательство леммы), откуда получим требуемое противоречие с предположением о величине  $\alpha$ , т.е. справедливость мажорантной оценки при любых значениях W. Окончательно имеем, что из невыполнения условия (4.9) следует неограниченность решения на конечном интервале времени, т.е. blow-up-свойство. Теорема доказана.

Прокомментируем полученный результат с двух точек зрения: физической интерпретации и нахождения приближенного (численного) решения задачи (4.1), (4.2).

Рассмотрим для изучаемой задачи Копи простейшее неограниченное решение  $W_0(\theta)$ , которое удовлетворяет уравнению  $W' = -(2W^2 + 1)/2$ . Отсюда следует формула  $D_0(\theta) \equiv 1/2$  и, соответственно, выражение для электронной плотности  $N_0 = 1 - 2D_0 \equiv 0$ . Таким образом, с физической точки зрения, критическое значение  $\alpha = 1/2$  бессмысленно, так как оно означает отсутствие электронов (их концентрация равна нулю). Другими словами, колеблющихся объектов не существует. С точки зрения численных методов следует заметить, что дифференциально-алгебраическая постановка (4.3)–(4.5) не имеет видимых преимуществ по сравнению с полностью дифференциальной постановкой (4.1), (4.2). Напротив, задача Коши (4.1), (4.2), имеющая гладкое периодическое решение, может быть успешно численно проинтегрирована самыми разнообразными методами (см., например, [23]), однако сходимость приближенного решения к точному можно аккуратно обосновать лишь при условии устойчивости решения по начальным данным, которое тесно связано с гладкостью и компактностью многообразия (4.4).

5. Численные эксперименты. Так как построить аналитическое решение задачи о плазменных колебаниях в аксиально симметричном случае не представляется возможным, то для сравнения точности двух предлагаемых версий схем расщепления (базовой и компактной) был использован следующий прием. На временном отрезке [0, T], когда решение еще является достаточно гладким по обеим переменным, можно построить приближение высокого порядка точности к аксиальному решению. Это приближение можно принять в качестве точного и сравнить с ним решение на оси симметрии, полученное с тем же шагом по времени  $\tau$  из схемы расщепления. Если провести серию расчетов с уменьшением  $\tau$  по выбранному закону, то, полагая при этом  $h = \tau$ , можно получить представление об асимптотическом изменении погрешности метода для каждой из рассматриваемых схем. В качестве основы для наблюдений за погрешностью выбиралась электронная плотность N как наиболее чувствительная по отношению к способу вычисления.

Конкретизируем сказанное. Для численного решения задачи Коши (4.1), (4.2) в нормальной форме y' = f(t, y) с заданным начальным условием y(0) применялась классическая формула Рунге–Кутта четвертого порядка точности [23]:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где

$$k_1 = \tau f(t, y), \quad k_2 = \tau f(t + \tau/2, y + k_1/2), \quad k_3 = \tau f(t + \tau/2, y + k_2/2), \quad k_4 = \tau f(t + \tau, y + k_3).$$

При этом постоянный шаг по времени брался из последовательности  $\tau_1, \tau_2, \ldots$  так, что  $\tau_{l+1} = \tau_l/2$ , а само значение электронной плотности вычислялось из аксиального решения по формуле  $N_{\text{axis}}^j = 1 - 2D_j$ . Полученные таким способом величины принимались за точные. В свою очередь, под приближениями к ним понимались значения  $N_0^j = 1 - 2 \frac{E_1^j}{h}$ , где  $E_1^j$  — значение электрического поля, полученное при том же значении  $\tau$  и  $h = \tau$  по одной из рассматриваемых разностных схем.

Для вычисления погрешностей применялись нормы:

$$\|\Psi\|_{C,\tau} = \max_{0 \leqslant j \leqslant J} |\Psi_j|, \quad \|\Psi\|_{L_{1},\tau} = \tau \sum_{j=0}^{J} |\Psi_j|, \quad \|\Psi\|_{L_{2},\tau} = \left(\tau \sum_{j=0}^{J} |\Psi_j|^2\right)^{1/2},$$

где значение *J* связано с длиной интервала тестирования так, что  $T = J\tau$ , а  $\Psi_j = N_{axis}^j - N_0^j$ . Значение *T* было выбрано равным 20 для параметров исходной задачи  $a_* = 0.365$ ,  $\rho_* = 0.6$ .

В табл. 1 представлены вычисленные указанным способом погрешности для базовой версии схемы расщепления. Основной вывод из нее таков: базовая версия имеет первый порядок точности по времени. Действительно, для каждой из представленных норм погрешность асимптотически убывает в два раза при соответствующем изменении  $\tau$ . Этот результат находится в полном соответствии с имеющейся теорией: локальная погрешность схемы расщепления имеет второй порядок, значит, на конечном интервале по времени — первый. При этом как порядок точности метода Рунге–Кутта (четвертый), так и порядок аппроксимации схемы "тренога" (второй), его не ухудшают.

			Таблица	1
Погрешности	лля базовой	версии	схемы	

$\tau^{-1}$	$\ \Psi\ _{C, au}$	$\ \Psi\ _{L_1,\tau}$	$\ \Psi\ _{L_1,\tau}$
3200	$5.90 \times 10^{-3}$	$1.87\times 10^{-2}$	$7.56 \times 10^{-3}$
6400	$3.56\times10^{-3}$	$8.76\times10^{-3}$	$3.62 \times 10^{-3}$
12800	$2.03 \times 10^{-3}$	$4.38\times10^{-3}$	$1.89 \times 10^{-3}$
25600	$1.08 \times 10^{-3}$	$2.21 \times 10^{-3}$	$9.77 \times 10^{-4}$

Таблица 2 Погрешности для компактной версии схемы

$ au^{-1}$	$\ \Psi\ _{C, au}$	$\ \Psi\ _{L_1,\tau}$	$\ \Psi\ _{L_1,\tau}$
3200	$7.55\times10^{-2}$	$9.77\times 10^{-2}$	$5.63\times10^{-2}$
6400	$3.91 \times 10^{-2}$	$5.04\times10^{-2}$	$2.91\times10^{-2}$
12800	$1.99 \times 10^{-2}$	$2.56\times 10^{-2}$	$1.48\times10^{-2}$
25600	$1.00 \times 10^{-2}$	$1.29 \times 10^{-2}$	$7.48 \times 10^{-3}$

Рассмотрим теперь результаты вычислений из табл. 2, в которой представлены аналогичные величины для компактной версии схемы расщепления. Вывод о порядке точности по времени для нее точно такой же, как и для базовой версии. Это вполне естественно, так как различие между ними заключается, в первую очередь, в аппроксимации по пространству: в компактной версии слагаемые, моделирующие схемную диссипацию, взяты из более простых уравнений. Однако между рассматриваемыми схемами имеется существенное различие, заключающееся в абсолютном значении константы асимптотической ошибки. Из сравнения двух нижних строк представленных таблиц следует, что указанная константа для первой схемы примерно на порядок меньше, чем для второй. С вычислительной точки зрения отсюда следует, что для получения одинаковой точности шаг по времени для компактной версии схемы следует выбирать раз в десять меньше, чем для базовой. Вышесказанное означает безусловное преимущество схемы (3.3), (3.4) по сравнению со схемой (3.7).

Далее базовая версия схемы расщепления была применена для моделирования процесса опрокидывания аксиально симметричных плазменных колебаний. Проведенные расчеты подтвердили высокое качество схемы (3.3), (3.4): впервые на основе метода конечных разностей удалось просчитать колебания вплоть до самого момента опрокидывания. Напомним, что ранее наилучшим достижением в рамках такого подхода было получение первого внеосевого максимума электронной плотности. Схема расщепления позволила аккуратно посчитать образование второго внеосевого максимума и формирование разрыва электрического поля, т.е. явления, приводящего к бесконечному значению плотности. На рис. 4–6 представлено поведение плотности, скорости и электрического поля в моменты формирования первого внеосевого максимума плотности и опрокидывания.





Рис. 4. Пространственное распределение плотности электронов в момент образования первого внеосевого максимума



Прокомментируем расчеты пространственной структуры электрического поля и скорости электронов. На рис. 5 представлены результаты этих расчетов в момент появления первого внеосевого максимума плотности. Описанный выше подход на основе эйлеровых переменных позволяет продвинуться дальше по времени и исследовать структуру плотности электронов после появления внеосевого максимума. Численные расчеты показывают, что с течением времени максимумы плотности, расположенные на оси, не меняют своей величины. В отличие от этого внеосевой максимум плотности после своего появления в момент времени  $\theta_{\max}^{(1)}$  быстро нарастает от периода к периоду. Второй внеосевой максимум плотности имеет величину  $N_{\max}^{(2)} \approx 23$  и возникает в момент времени  $\theta_{\max}^{(1)} \approx 40$  на расстоянии от оси, равном  $\rho_{\max}^{(2)} \approx 0.053$ . И наконец, на следующем периоде колебаний в момент времени  $\theta_{\max}^{(3)} \approx 46$  на расстоянии от оси  $\rho_{\max}^{(3)} \approx 0.035$  плотность обращается в бесконечность, т.е. происходит опрокидывание цилиндрических плазменных колебаний. Именно с этим резким нарастанием внеосевого максимума плотности связаны трудности числебаний. Именно с использованием внеосевого максимума плотности связаны трудности числебаний. Именно к истемы уравнений в частных производных (1.2) — системы с использованием эйлеровых переменных.

Расчеты также показывают, что с течением времени происходит укручение радиального профиля электрического поля и формирование излома у скорости электронов. При опрокидывании плазменных колебаний в момент времени  $\theta_{\max}^{(3)}$  у электрического поля наблюдается скачок, а скорость электронов имеет разрыв радиальной производной (см. рис. 6). Проведенные расчеты траекторий частиц для указанных

выше параметров показывают, что в процессе колебательного движения расстояния между соседними частицами изменяются в зависимости от их начальных положений. Траектории некоторых соседних частиц сближаются, и в определенный момент времени происходит их пересечение. При этом моменты времени пересечения траекторий частиц и обращения плотности в бесконечность в точности совпадают.

Отметим, что ранее такие расчеты удавалось проводить только на основе метода частиц [12].

В завершение раздела следует заметить, что, используя схему (3.7), также удается просчитывать динамику колебаний вплоть до момента опрокидывания, т.е. компактная версия уступает базовой только в количественном отношении, полностью обеспечивая при этом качественную картину решения задачи.

Заключение. В представленной работе построена новая схема метода конечных разностей в эйлеровых переменных для моделирования аксиально-симметричных плазменных колебаний. При ее построении использовалось расщепление по физическим процессам и дискретизация по времени, аналогичная схеме Лакса–Вендроффа. С целью сравнительного анализа двух представленных версий схемы (базовой и компактной) применялось аксиальное решение исходной задачи, для которого, в свою очередь, было получено необходимое и достаточное условие существования, единственности, периодичности и гладкости.

С использованием базовой версии конечно-разностной схемы впервые в эйлеровых переменных удалось провести численное моделирование динамики колебаний вплоть до их опрокидывания, т.е. обращения в бесконечность функции электронной плотности.

Предложенная схема обладает рядом замечательных свойств. На гладких решениях она имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок точности по времени. Условие устойчивости при этом оптимально для систем гиперболического типа:  $\tau = O(h)$ . Используя идею правила Рунге для численного интегрирования [23], порядок точности по времени можно улучшить до второго за счет увеличения объема вычислительной работы. Очень важно, что схема может быть реализована явными формулами: это делает ее исключительно полезной для обобщения на дву- и трехмерные случаи. В сочетании с указанными выше асимптотическими свойствами возможность распараллеливания вычислений делает до-



Рис. 6. Пространственное распределение скорости и электрического поля в момент опрокидывания плазменных колебаний

ступными (или по крайней мере приближает) многомерные расчеты для задач такого типа. Кроме того, следует иметь в виду, что релятивистский эффект в плазменных колебаниях может быть учтен несложным образом в конструкции обсуждаемой схемы. И наконец, возможно, самое главное: открывается перспектива гидродинамического моделирования эффекта опрокидывания кильватерных волн, что является задачей, весьма актуальной для приложений.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.М. Староверову за помощь в подготовке графических материалов для статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Dawson J.M. Nonlinear electron oscillations in a cold plasma // Phys. Review. 1959. 113, N 2. 383–387.
- Esarey E., Sprangle P., Krall J., Ting A. Overview of plasma-based acceleration concepts // IEEE Trans. on Plasma Science. 1996. 24. 252–288.
- Mourou G.A., Tajima T., Bulanov S.V. Optics in the relativistic regime // Reviews of Modern Physics. 2006. 78. 309–370.
- 4. *Горбунов Л.М., Фролов А.А.* Низкочастотное переходное излучение короткого лазерного импульса на границе плазмы // Журн. эксперим. и теор. физики. 2006. **129**, № 6. 1018–1025.
- 5. Yampolsky N.A., Fraiman G.M. Conversion of laser radiation to terahertz frequency waves in plasma // Phys. Plasmas. 2006. 13. 113108–113114.
- Chizhonkov E.V., Frolov A.A., Gorbunov L.M. Modelling of relativistic cylindrical oscillations in plasma // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008. 23, N 5. 455–467.
- 7. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В. О моделировании нерелятивистских цилиндрических колебаний в плазме // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 62–69.
- 8. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics via computer simulation. New York: McGraw-Hill, 1985.
- 9. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.

- 10. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer simulation using particles. New York: McGraw-Hill, 1981.
- 11. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Наука, 1973.
- 12. Горбунов Л.М., Фролов А.А., Чижонков Е.В., Андреев Н.Е. Опрокидывание нелинейных цилиндрических колебаний плазмы // Физика плазмы. 2010. **36**, № 4. 375–386.
- Goriely A., Hyde C. Necessary and sufficient condition for finite time singularities in ordinary differential equations // J. of Differential Equations. 2000. 161. 422–448.
- 14. Pohozaev S.I. The general blow-up theory for nonlinear PDE's // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. The Hans Triebel Anniversary Volume. Bazel: Birkhäuser, 2003. 141–159.
- 15. *Чижонков Е.В.* Численное моделирование аксиальных решений некоторых нелинейных задач // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 2. 57–69.
- 16. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1973.
- 17. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- 18. Чижонков Е.В. К моделированию электронных колебаний в плазменном слое // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. **51**, № 3. 456–469.
- Goriely A., Hyde C. Necessary and sufficient conditions for finite time singularities in ordinary differential equations // J. of Differential Equations. 2000. 161. 422–448.
- 20. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.
- 21. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
- 22. Коддингтон Э.Л., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностранная литература, 1958.
- 23. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 6-е изд. М.: БИНОМ, 2008.

Поступила в редакцию 30.10.2011