

УДК 534.2:517.954

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Я. М. Жилейкин¹, Ю. И. Осипик¹, Н. И. Пушкина¹

Исследуется распространение акустических волн конечной амплитуды в двухфазных пористых средах типа морских осадков. Реализованные конечно-разностные методы позволяют дать количественное и качественное описание акустических процессов, представляющих практический интерес.

Ключевые слова: акустическая волна, двухфазная пористая среда, морские осадки, волновое уравнение, численные методы, конечные разности.

Введение. Исследование распространения акустических волн является эффективным способом изучения физических свойств различных сред, в том числе двухфазных пористых сред типа морских осадков.

Распространение акустических волн в осадках определяется внутренними свойствами осадков, которые характеризуются рядом физических параметров. Одним из параметров, который существенно влияет на распространение звука в осадках, является пористость. Пористость указывает относительное количество твердых и жидких составляющих в осадках и тем самым заметно влияет на скорость распространения акустической волны. Существенным свойством двухфазных сред является также их значительная нелинейность, которая должна быть принята во внимание при изучении распространения волн.

В настоящей статье исследуется влияние изменения с расстоянием пористости нелинейной среды на распространение акустических волн в морских осадках. Если флуктуации пористости достаточно малы, то изменение акустического поля мало на расстоянии масштаба длины волны. Это позволяет применить метод медленно меняющейся формы волны для получения эволюционного волнового уравнения в неоднородных средах.

Существует значительное количество публикаций, посвященных распространению звука в окрестности дна океана [1–4]. Базовыми уравнениями для исследования механических волн в двухфазных средах являются классические уравнения Био [5–7]. В предлагаемой работе эти уравнения используются в несколько иной форме [8], которая в явном виде дает уравнения непрерывности для плотностей и импульсов твердой и жидкой фаз. Разработанные и реализованные авторами настоящей статьи конечно-разностные методы позволяют дать количественное и качественное описание сложных акустических процессов, представляющих большой интерес.

1. Численное моделирование распространения волн конечной амплитуды в поглощающих морских осадках. Численное моделирование рассматриваемой задачи основано на использовании уравнения нелинейной акустики для пучков — уравнения Хохлова–Заболотской–Кузнецова [9]. Решение этого уравнения дает возможность учитывать такие процессы, как образование ударного фронта, дифракция и диссипация энергии акустических пучков при их распространении в равновесных средах.

Обычно акустическая волна является периодической функцией сопутствующей временной переменной $\tau = t - \frac{x}{c}$. Решение соответствующего дифференциального уравнения меняется в зависимости от продольной переменной x и поперечной координаты r .

В работе [10] указанный метод применен для вывода дифференциальных уравнений, описывающих распространение дифрагирующих акустических пучков в морских осадках, при этом получены дифференциальные уравнения для возмущения плотности жидкой и твердой фаз ($\delta\rho_f$ и $\delta\rho_s$) среды. На основе физических соображений твердая фаза ρ_s исключается и рассматривается уравнение для жидкой фазы. Полученное уравнение содержит большое количество физических параметров осадков и вычисленных коэффициентов [10], приведенных в литературе. Параметр пористости в этом уравнении — величина постоянная, что является недостатком уравнения, так как в реальной среде пористость может меняться

¹ Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, д. 1, стр. 4, Ленинские горы, 119991, Москва; Я. М. Жилейкин, зав. лаб., e-mail: jam@srcc.msu.ru; Ю. И. Осипик, науч. сотр., e-mail: jam@srcc.msu.ru; Н. И. Пушкина, вед. науч. сотр., e-mail: n.pushkina@mererand.com

с расстоянием. В настоящей статье рассматривается случай, когда параметр пористости среды является переменной величиной, зависящей от x . Ввиду сложности такой задачи предполагается, что решение не зависит от поперечной координаты r , а только от переменных τ и x . В результате мы приходим к следующему уравнению, описывающему распространение жидкой фазы в пористой среде:

$$a_1 \frac{\partial \rho_f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \rho_f}{\partial \tau} \delta(x) + a_3 \frac{\partial \rho_f^2}{\partial \tau} + a_1 D_\tau \rho_f = 0. \quad (1)$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — коэффициенты, характеризующие свойства пористой среды. Уравнение для возмущения плотности жидкой фазы звуковой волны после деления на a_1 принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{a_2}{a_1} \delta(x) \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{a_3}{a_1} \frac{\partial \rho^2}{\partial \tau} + D_\tau \rho = 0. \quad (2)$$

Возмущение плотности удовлетворяет начальному условию $\rho|_{x=0} = A\rho_0$, $A = 10^{-3} \div 10^{-5}$. Вместо переменной τ введем переменную θ : $\theta = 10^4 \tau$. Имеем $\rho(2\pi 10^4 \tau) = \rho(2\pi \theta)$.

При решении уравнения (2) речь идет о нахождении функции $\rho(2\pi \theta)$, которая является периодической с периодом 1 по переменной θ . Начальное значение по x берется в виде гармонической функции

$$\rho_0 = -\sin(2\pi \theta). \quad (3)$$

Предполагаем, что в уравнении (2) коэффициент $\frac{a_3}{a_1}$ — отрицательный. Пусть $\frac{a_2}{a_1}$ и D_τ равны нулю, тогда мы приходим к модельному уравнению газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{a_3}{a_1} \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} = 0. \quad (4)$$

Знак минус в (3) обусловлен тем, что разрыв решения уравнения (4) удобно рассматривать в точке $\theta = 0.5$. Если $\frac{a_3}{a_1}$ — положительный коэффициент, то следует взять начальное условие $\rho|_{x=0} = \sin(2\pi \theta)$ и перейти к функции $\tilde{\rho} = -\rho$. Функция $\tilde{\rho}$ будет удовлетворять равенствам (3) и (4), но при этом в (2) изменится знак коэффициента $\frac{a_2}{a_1} \delta(x)$.

В результате при $\frac{a_3}{a_1} \leq 0$ удобно рассматривать условие (3) и сохранить коэффициент $\frac{a_2}{a_1} \delta(x)$. Если $\frac{a_3}{a_1} > 0$, то следует изменить знак этого коэффициента и знак коэффициента $\frac{a_2}{a_1} \delta(x)$.

В уравнении (2) целесообразно пронормировать функции и переменные, оставив размерной только переменную x , которая измеряется в сантиметрах. Мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + C \delta'(x) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - d \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} + D_\theta \rho = 0, \quad (5)$$

$$\rho|_{x=0} = -\sin(2\pi \theta), \quad (6)$$

где $C = \frac{\varepsilon}{a_1} \frac{b}{c} 10^4 \delta_0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\delta(x) = \delta_0 \delta'(x)$, $\delta' \varepsilon(x) \in [0, 1]$, $\delta_0 \in [0.1, 0.2]$, $d = \left| \frac{a_3}{a_1} \right| 10^4 A$; $D_\theta = 10^4 D_\tau$ — оператор диссипации.

2. Решение пронормированной задачи. Для решения задачи (5), (6) применяется метод расщепления [11], который использует тот факт, что исследуемый процесс состоит из взаимодействия трех явлений: образование ударного фронта, фазовое изменение сигнала и диссипативное поглощение волны при ее распространении.

Рассмотрим простой пример. Пусть требуется решить задачу

$$\frac{du}{dx} = Au + Bu, \quad u|_{x=0} = u_0 \quad (7)$$

и найти значение $u(h)$, где h — шаг по x .

Перейдем к двум задачам: первая — $\left\{ \frac{dv}{dx} = Av, \quad v|_{x=0} = u_0 \right\}$, вторая — $\left\{ \frac{dw}{dx} = Bw, \quad w|_{x=0} = v(h) \right\}$.

Для гладких решений справедливо равенство $w(h) = u(h) + O(h^2)$. Таким образом, можно решить задачу (7), последовательно решая более простые задачи.

Применим предлагаемый метод для решения задачи (5), (6). Начнем с задачи

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} - d \frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} = 0, \quad \rho|_{x=0} = -\sin(2\pi\theta), \tag{8}$$

решение которой описывает образование ударного фронта при распространении гармонической волны.

Наиболее эффективным методом решения задачи (8) является конечно-разностная схема Годунова [9]. Часто такую схему называют “схемой распада разрыва”. Эта схема позволяет определить расстояние, на котором образуется ударный фронт волны. В задаче (8) это расстояние имеет вид $x_p = \frac{1}{2(2\pi d)}$.

Решение задачи

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + C\delta'(x) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0, \quad \rho|_{x=0} = \rho_0(0), \tag{9}$$

удовлетворяющее периодическому граничному условию, может быть получено с помощью конечно-разностной схемы “угол”. Шаблон этой схемы задается линиями, определяемыми уравнением $\frac{d\theta}{dx} = C\delta'(x)$, вдоль которых решение постоянно. Это — характеристики уравнения (9). Направление характеристик зависит от знака коэффициента C .

Если $\rho|_{x=0}$ представить в виде ряда Фурье $\rho|_{x=0} = \sum_m \nu_m(0)e^{2\pi im\theta}$, то уравнение (9) можно решить в явном виде: $\rho(x, \theta) = \sum_m \nu_m(x)e^{2\pi im\theta}$, где $\nu_m(x) = \nu_m(0) \exp\left\{-2\pi imC \int_0^x \delta'(\xi) d\xi\right\}$. Пусть $m = \pm 1$, тогда $\rho(x, \theta) = -\sin(2\pi(\theta - \mu))$, $\mu = C \int_0^x \delta'(\xi) d\xi$. Поэтому решение уравнения (9) сводится к сдвигу фазы на величину $2\pi\mu$. Фаза сдвигается вправо при положительном C и влево — при отрицательном.

Отметим, что схема Годунова является “консервативной”, первого порядка точности на гладких решениях. В случае образования разрыва она хорошо воспроизводит это явление. Использование консервативных схем и схем решения уравнения (9) второго порядка точности может привести к явлению Гиббса, которое дает неверное описание физического процесса. Поэтому использование рассмотренных конечно-разностных схем является достаточно эффективным.

Рассмотрим уравнение $\frac{\partial \rho}{\partial x} + D_\tau \rho = 0$. Здесь D_τ — оператор диссипации первого порядка: $D_\tau \implies D_\theta = 10^4 \left| \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right| \alpha$, α — коэффициент диссипации.

Действие этого оператора можно описать рядом Фурье $\rho = \sum_m \nu_m e^{2\pi im\theta}$. В результате мы приходим к уравнению $\frac{d\nu}{dx} = -\frac{\alpha}{2\pi} 10^4 |d_m|$, где $d_m \approx 2\pi m$, откуда $\nu_m = \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi} 10^4 |d_m| x\right\}$. Если взять $m = \pm 1$, то получим $\rho(x, \theta) = -\sin(2\pi\theta)e^{-\alpha 10^4 x}$.

Расстояние, на котором гармоническая волна затухает в e раз, называется длиной затухания и обозначается L_3 , оно равняется $\frac{1}{\alpha 10^4}$. Если известна длина затухания, то коэффициент диссипации $\alpha = \frac{1}{L_3 10^4}$.

При реализации метода расщепления необходимо учитывать условия устойчивости разностных схем, связывающие шаги по x и по θ [11]. Для схемы Годунова — это $h \leq \frac{lz}{2d \max_n |\rho_n^m|}$, а для схемы “угол” — $h \leq \frac{z}{|C|}$. Здесь l — константа порядка 0.5; h и z — шаги разностных схем по осям x и θ соответственно.

3. Численное моделирование распространения акустических волн в пористых средах.

Численное моделирование осуществляется по мере выполнения следующих этапов.

1. Выбор значений физических параметров.
2. Определение коэффициентов дифференциального уравнения (1): a_1, a_2, a_3 . В качестве примера значения физических параметров и вычисленные коэффициенты можно взять в статье [10].
3. Нормировка параметров и коэффициентов дифференциального уравнения (5). Определение коэффициентов C, d и α . Нормировка параметров и коэффициентов уравнений в (5), (6) является очень важной при постановке математической задачи.

Рассмотренные выше физические параметры и коэффициенты имеют различный порядок, от 10^{-6} до 10^{10} . Численное решение задачи с такими коэффициентами может быть неустойчивым. Переход к безразмерным величинам может привести к коэффициентам и параметрам порядка 1 и сделать решение более удобным.

4. Аналитическое или дискретное определение функции пористости $\delta(x) = \delta_0 \delta'(x)$, где δ_0 — коэффициент нормировки.

5. Завершающий этап — определение параметров вычислительного алгоритма. Численное решение задачи.

Приведем примеры, графически описывающие изменения гармонических акустических волн при их распространении по x .

На рис. 1 и 2 приведены графики функций $\rho|_{x=0}$ и $\delta(x) = 0.667 + 0.333 \sin(10^{-1}\pi x)$, $\delta_0 = 0.1$.

Возьмем значения параметров $C = -0.652 \times 10^{-2}$, $d = 0.117 \times 10^{-2}$, $\alpha = 0.45 \times 10^{-6}$, которые соответствуют практическому случаю [10]. Число узлов по временной переменной θ на отрезке $[0, 1]$ берется равным 64. Этого числа вполне достаточно для приближения гармонической функции и функции, полученной из нее в результате разрыва. Шаг по пространственной переменной x равняется 0.5, исходя из величины констант C и d и условий устойчивости разностных схем.

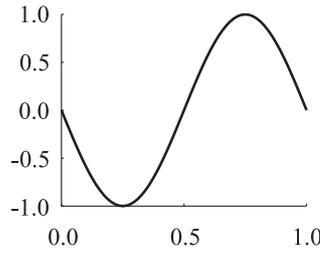


Рис. 1

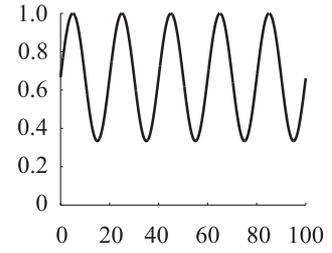


Рис. 2

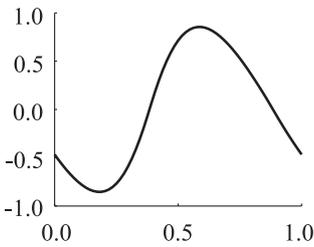


Рис. 3

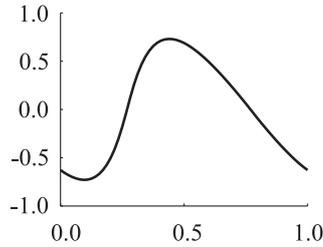


Рис. 4

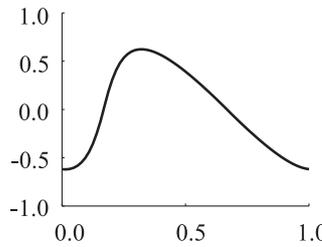


Рис. 5

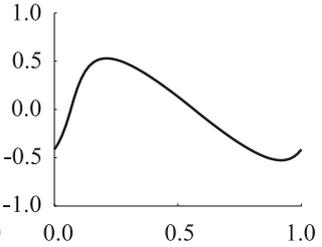


Рис. 6

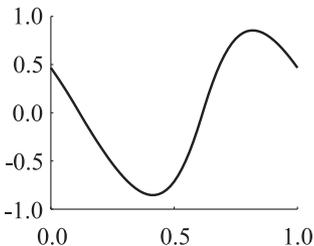


Рис. 7

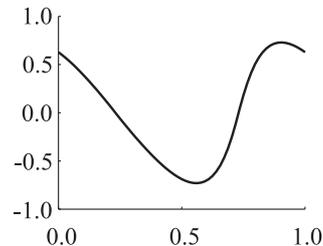


Рис. 8

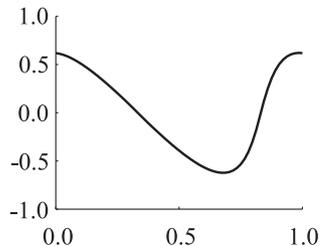


Рис. 9

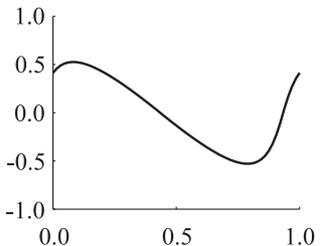


Рис. 10

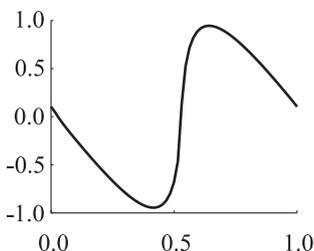


Рис. 11

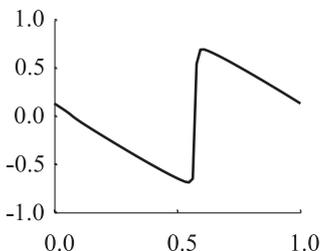


Рис. 12

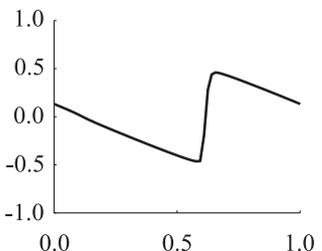


Рис. 13

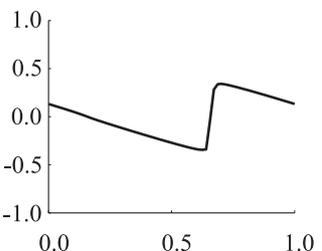


Рис. 14

На рис. 3–6 приведены графики $\rho(x_i, \theta)$ при $x_i = 25, 50, 75, 100$.

Существенной характеристикой этих графиков является малость коэффициента d , которая не приводит к быстрому образованию ударного фронта волны. Большой модуль коэффициента C дает сдвиг фазы

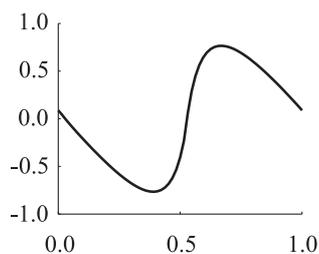


Рис. 15

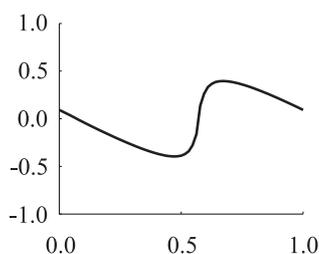


Рис. 16

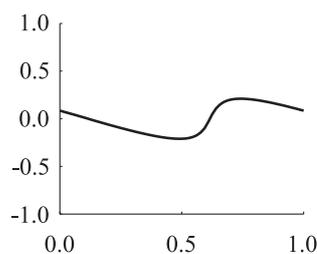


Рис. 17

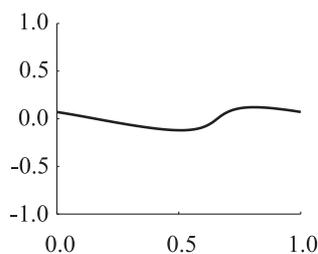


Рис. 18

волны влево. Если при равных других параметрах C будет таким же по модулю, но положительным, то фаза будет сдвигаться вправо (рис. 7–10, те же значения x_i).

В случае больших значений параметра d можно наблюдать быстрое образование ударного фронта волны. Рассмотрим случай, когда d больше, чем в предыдущем случае, а именно: $C = 0.652 \times 10^{-2}$, $d = 1.5 \times 10^{-2}$, $\alpha = 0.45 \times 10^{-6}$. Согласно вышеприведенной формуле для x_p получим: $x_p = 5.31$. На рис. 11–14 при $x_i = 5, 15, 25, 35$ соответственно дается описание развития ударного фронта волны. При этом виден и ее фазовый сдвиг (вправо).

В заключение изменим коэффициент диссипации α . Оставим $C = 0.652 \times 10^{-2}$, $d = 1.5 \times 10^{-2}$ и увеличим α в 10 раз, положив $\alpha = 4.5 \times 10^{-6}$. На рис. 15–18 приведены графики возмущения плотности при тех же $x_i = 5, 15, 25, 35$.

Сравнение этих графиков с графиками на рис. 11–14 позволяет оценить сглаживание ударных фронтов и их быстрое затухание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hovem J.M.* The nonlinearity parameter of saturated marine sediments // *J. Acoust. Soc. Am.* 1979. **66**, N 5. 1463–1467.
2. *Donskoy D.M., Khashanah K., McKee T.G.* Nonlinear acoustic waves in porous media in the context of Biot's theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 1997. **102**, N 5. 2521–2528.
3. *Boyle F.A., Chotiros N.P.* Nonlinear acoustic scattering from a gassy poroelastic seabed // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. **103**, N 3. 1328–1336.
4. *Городецкая Н.С.* Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // *Акустичный вистник.* 2007. **10**, № 2. 43–63.
5. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. **28**, N 2. 168–178.
6. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range // *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. **28**, N 2. 179–191.
7. *Biot M.A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. **34**, N 9. 1254–1264.
8. *Быков В.Г., Николаевский В.Н.* Нелинейные геоакустические волны в морских осадках // *Акустический журнал.* 1990. **36**, № 4. 606–610.
9. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
10. *Жилейкин Я.М., Осипик Ю.И., Пушкина Н.И.* Дифрагирующие акустические пучки конечной амплитуды в морских осадках // *Акустический журнал.* 2003. **49**, № 3. 360–366.
11. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию
27.05.2011