

УДК 518:517.949.8; 533.6.011

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ЛАГРАНЖА–БЮРМАНА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕВЯЗКОГО ГАЗА

Е. В. Ворожцов¹

Предложены явные разностные схемы второго и более высоких порядков точности для гиперболических законов сохранения с применением разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана. Приведены результаты расчетов одно- и двумерных тестовых задач, показывающие, что в случае уравнений Эйлера невязкого сжимаемого газа получаются квазимонотонные профили численных решений. При счете стационарных двумерных задач методом установления предлагаемые схемы требуют в шесть раз меньшее машинное время, чем известные TVD-схемы.

Ключевые слова: гиперболические законы сохранения, разложения Лагранжа–Бюрмана, разностные методы.

1. Введение. В настоящее время основной тенденцией при проведении численных расчетов разрывных решений является применение разностных методов высоких порядков точности. Однако ранние схемы высоких порядков точности, например схемы второго порядка точности Лакса–Вендрофа [1], Мак-Кормака [2] и схема Русанова третьего порядка точности [3], генерируют паразитические осцилляции численного решения в окрестности фронтов ударных волн и контактных разрывов [4]. Хартен [5] предложил осуществлять переход в схемах высокого порядка точности к схемам первого порядка точности с помощью переключательных функций — ограничителей потоков. В основу построения разностных схем в [5] было положено выполнение TVD-свойства: $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$, где $TV(u^n) = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|$ — полная

вариация разностного решения на n -м временном слое. В [6] было предложено семейство TVD-схем для численного интегрирования уравнений Эйлера, описывающих двумерные течения невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа. Общий недостаток TVD-схем состоит в том, что из-за того, что в зонах размазывания сильных разрывов осуществляется переход к схемам первого порядка точности, эти разрывы интенсивно размазываются. В частности, ширина зон размазывания контактных разрывов увеличивается пропорционально $t^{1/2}$, где t — время. Чтобы обойти эту проблему, в [7] было предложено заменить условие $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ на условие $TV(u^n) \leq B$, где B либо постоянная, либо функция, зависящая от t . Соответствующие схемы были названы TVB-схемами, т.е. схемами с ограниченной полной вариацией решения. В [8] был предложен TVB-вариант схемы Ошера–Чакраварти [6]. Однако замена TVD-условия на TVB-условие привела к появлению значительных паразитических осцилляций численного решения в окрестности сильных разрывов, как это явствует из примеров расчетов, представленных в [8].

Ряд других подходов к построению разностных схем для уравнений Эйлера кратко перечислен в [9]. Во всех этих подходах высокая точность аппроксимации потоков через границы ячейки пространственной сетки обеспечивается с помощью разложений компонент вектора потоков в ряды Тейлора. Ряд Тейлора — это ряд по степеням функции $x - x_j$, где x_j — центральный узел шаблона разностной схемы. Таким образом, усеченный ряд Тейлора — это некоторый многочлен. Однако из теории аппроксимации функций многочленами известно (см., например, [10]), что такие приближения приводят к осцилляциям интерполирующей функции в окрестности разрывов исходной функции, а также в областях больших градиентов решения.

С другой стороны, известно, что функцию можно разложить и в степенной ряд общего вида, т.е. по степеням некоторой функции $\varphi(x - x_i)$. Тогда можно подобрать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы уменьшить амплитуду паразитических осцилляций численного решения. Задача разложения функции в ряд по степеням другой функции эффективно решается с помощью формулы Лагранжа–Бюрмана [11, 12]. В [9] было показано, как можно строить разностные схемы для гиперболических законов сохранения с помощью разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана. Построение схем осуществлено для одномерного уравнения переноса $u_t + au_x = 0$, где $a = \text{const} > 0$, и уравнений Эйлера, описывающих одномерные течения невязкого сжимаемого газа.

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск; ведущий науч. сотр., e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

В [13, 14] построены явные многостадийные методы типа Рунге–Кутта для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с помощью разложения сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана. Так как эти разложения имеют намного более сложный вид, чем разложения в ряды Тейлора, в [13, 14] все требуемые аналитические выкладки выполнялись на настольном компьютере с помощью программы, написанной на языке системы *Mathematica*. Основные детали этой программы описаны в [13]. В [13, 14] были построены новые явные методы первого и второго порядков точности, которые были применены для численного интегрирования задачи Коши для умеренно жесткой системы ОДУ. Оказалось, что L_2 -норма ошибки решения, полученного по новому численному методу второго порядка точности, в 50 раз меньше, чем в случае классического метода Рунге–Кутта второго порядка точности. В [14] даны рекомендации по оптимальному выбору функции $\varphi(x)$ при выводе новых явных методов типа Рунге–Кутта третьего и более высоких порядков точности с помощью разложений сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана.

Целью настоящей статьи является построение разностных схем для одномерных и двумерных гиперболических законов сохранения с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана, которые имеют не ниже, чем второй порядок аппроксимации во времени и по пространственным переменным.

2. Формула разложения Лагранжа–Бюрмана. Пусть $u(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, т.е. точка $x = 0$ — нуль первого порядка функции $\varphi(x)$. Тогда можно записать формулу разложения Лагранжа–Бюрмана в виде [9, 13, 14]

$$u(x) = u(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\varphi(x - x_0)]^k}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[u'(x) \left(\frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right)^k \right] \right\}_{x=x_0}. \quad (1)$$

Таким образом, формула (1) позволяет разложить функцию $u(x)$ в ряд по степеням функции $\varphi(x - x_0)$. Очевидно, в частном случае $\varphi(x) = x$ формула Лагранжа–Бюрмана (1) переходит в формулу Тейлора.

Обозначим через b_k коэффициент при $[\varphi(x - x_0)]^k$ в (1), т.е. $b_k = \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[u'(x) \left(\frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right)^k \right] \right\}_{x=x_0}$,

$k = 1, 2, \dots$. В частности, $b_1 = \left[u'(x) \frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right]_{x=x_0} = u'(x_0) \frac{0}{0}$. Видно, что в выражении для b_1 имеется неопределенность вида $0/0$. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся следующим представлением коэффициентов b_k [12]:

$$b_k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[u'(x) \left(\frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right)^k \right] \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В частности, при $k = 1$ имеем

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[u'(x) \frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} u'(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{\varphi(x - x_0)} \right] = \frac{u'(x_0)}{\varphi'(0)}. \quad (3)$$

При вычислении второго предела мы воспользовались правилом Лопиталю. Заметим, что сложность вычисления пределов в выражениях (2) для b_k нелинейно возрастает с ростом k . В [13, 14] была представлена весьма компактная программа, реализующая вычисление коэффициентов b_k в соответствии с (2) для любого конечного k в системе *Mathematica*, и были даны выражения для первых четырех коэффициентов b_k , т.е. для $k = 1, 2, 3, 4$.

3. Разностные схемы для уравнения конвекции. Рассмотрим одномерное уравнение конвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = s(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

где x — пространственная координата, t — время, $F(u) = au$, $a = \text{const} > 0$, $s(x)$ — заданная функция (источниковый член). Будем решать уравнение (4) при заданном начальном условии $u(x, 0) = u_0(x)$.

Построим следующую явную схему для уравнения (4):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \tau s(x_j), \quad (5)$$

где h — шаг равномерной сетки на оси x , τ — временной шаг, $u_j^n = u(x_j, t_n)$, $x_j = (j - 0.5)h$, j — номер ячейки сетки на оси x , $t_n = n\tau$, $F_{j+1/2}^n = F(u_{j+1/2}^n)$. Аппроксимируем поток $f(x) = F(u(x, t_n))$ в интервале $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ отрезком ряда Тейлора:

$$f(x) = F(u_j^n) + f'(x_j) \varphi(x - x_j), \quad x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]. \quad (6)$$

Если аппроксимировать производную $f'(x_j)$ направленной разностью, то получается известная MUSCL-аппроксимация [15, 16]:

$$f(x_{j+1/2}) = F(u_j^n) + \frac{1}{2} [F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n)]. \quad (7)$$

В [17] предлагалось аппроксимировать производную $f'(x_j)$ в (6) центральной разностью

$$f(x_{j+1/2}) = F(u_j^n) + \frac{1}{4} [F(u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n)]. \quad (8)$$

Теперь, по аналогии с (6), аппроксимируем поток $f(x)$ в интервале $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ отрезком ряда Лагранжа–Бюрмана

$$f(x) = F(u_j^n) + \frac{f'(x_j)}{\varphi'(0)} \varphi(x - x_j), \quad x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}], \quad (9)$$

в соответствии с (3). Чтобы вычислить одностороннюю разностную аппроксимацию производной $f'(x_j)$ по аналогии с (7), положим в (1) $u(x) = F(x)$, $x_0 = x_j$, $x = x_{j-1}$ и вычислим следующую обобщенную разделенную разность: $f'(x_j) = \varphi'(0) \frac{F_{j-1}^n - F_j^n}{\varphi(-h)}$. Полагая в (9) $x = x_{j+1/2}$, получаем следующее выражение для потока $F_{j+1/2}^n$, аналогичное формуле (7):

$$F_{j+1/2}^n = F(u_j^n) + \frac{F_{j-1}^n - F_j^n}{\varphi(-h)} \varphi(x_{j+1/2} - x_j). \quad (10)$$

Мы можем разложить $\varphi(-h)$ в ряд Маклорена, так что $\varphi(-h) \approx (-h)\varphi'(0)$. Тогда вместо (10) можем также использовать формулу

$$F_{j+1/2}^n = F(u_j^n) + \frac{F_j^n - F_{j-1}^n}{h} \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi'(0)}. \quad (11)$$

Можно также получить аналог формулы (8):

$$F_{j+1/2}^n = F(u_j^n) + \frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2h} \frac{\varphi(x_{j+1/2} - x_j)}{\varphi'(0)}. \quad (12)$$

Формула Лагранжа–Бюрмана (1) имеет обобщения на случай двух и большего числа переменных (см., например, [18]). В частности, функцию $u(x, t)$ можно разложить в ряд по степеням функций $\psi(t - t_n)$ и $\varphi(x - x_0)$. Полагая, в частности, $\psi(t - t_n) = t - t_n$, легко показать, что разностная схема (5), (11) имеет порядок аппроксимации $O(\tau) + O(h^2)$.

Как было показано в [13, 14], вид конкретной функции $\varphi(x)$ в (1) существенно влияет на структуру главного члена погрешности численного метода, получаемого с применением разложения (1). В случае нечетной функции $\varphi(x)$ существенно упрощаются выражения (2) для коэффициентов b_k при $k > 1$, что облегчает вывод численных методов третьего и более высоких порядков точности по пространственным переменным. В [9] было предложено задавать функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x - x_j) = h \operatorname{th} \left(\beta \frac{x - x_j}{h} \right), \quad (13)$$

где $\beta > 0$ — свободный параметр. Выбор функции $\operatorname{th}(x)$ связан со следующими свойствами этой функции. Во-первых, эта функция нечетная, как и функция $\varphi(x) = x$, используемая в формуле разложения Тейлора. Во-вторых, функция $\operatorname{th}(x)$ монотонна на всей числовой оси. В-третьих, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} = 1$. Это означает, что при малых $|x|$ функция $\operatorname{th}(x)$ ведет себя аналогично функции $\varphi(x) = x$. Отметим принципиальное различие между функциями $\operatorname{th}(x)$ и x при $|x| \rightarrow \infty$: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\operatorname{th} x| = 1$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| = \infty$.

Приведем некоторые результаты численных расчетов для уравнения (4), где, следуя [6], положим $s(x) = \pi \cos \pi x$ и $F(u) = u$. Источниковый член заставляет численное решение выходить на стационарное решение $u(x) = \sin(\pi x)$. Вычисления выполнялись на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Численное решение предполагалось периодическим вне этого интервала, что использовалось для задания значений решения в двух ячейках сетки слева от точки $x = -1$ и в двух ячейках справа от точки $x = 1$.

Пусть u^n — численное решение и пусть u_{ex} — точное решение $u_{ex} = \sin(\pi x)$. Сеточный аналог нормы пространства L_1 подсчитывался по формуле $E_h = \|u^n - u_{ex}\|_1 = \sum_j |u_j^n - u_{ex}| h$, где h — шаг равномерной сетки в промежутке $[-1, 1]$. Уравнение (4) решалось численно методом установления, начальное условие задавалось в виде $u(x, 0) = 0$. Применялся следующий критерий сходимости к стационарному решению: $\max_j \left| \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \right| < \varepsilon$. Все приводимые в табл. 1–4 результаты расчетов были получены при $\varepsilon = 10^{-5}$ и при числе Куранта $\kappa = \tau/h = 0.5$. Далее, порядок точности p конкретной разностной схемы, входящий в оценку $E_h \leq Ch^p$, подсчитывался по формуле [6] $p = \frac{\ln(E_{h_{m-1}}) - \ln(E_{h_m})}{\ln(h_{m-1}) - \ln(h_m)}$, где h_{m-1}, h_m — значения шага h , такие, что $h_{m-1} \neq h_m, m = 2, 3, \dots$

Таблица 1
Ошибка E_h , порядок сходимости p ,
число временных шагов N_{conv}
для метода RK2-T

h	E_h	p	N_{conv}
2/20	0.4034E-1		11229
2/40	0.1037E-1	1.96	177976
2/60	0.4638E-2	1.98	899434
2/80	0.2615E-2	1.99	2840945

Таблица 2
Ошибка E_h , порядок сходимости p ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK2-LB, $\beta = 0.25$ в (13)

h	E_h	p	N_{conv}
2/20	0.4035E-1		10134
2/40	0.1038E-1	1.96	123270
2/60	0.4632E-2	1.99	448967
2/80	0.2621E-2	1.98	1019549

Таблица 3
Ошибка E_h , порядок сходимости p ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK2-LB, $\beta = 0.5$ в (13)

h	E_h	p	N_{conv}
2/20	0.4041E-1		7880
2/40	0.1050E-1	1.94	64883
2/60	0.4787E-2	1.94	182080
2/80	0.2784E-2	1.88	354436

Таблица 4
Ошибка E_h , порядок сходимости p ,
число временных шагов N_{conv} для
метода RK2-LB, $\beta = 1.0$ в (13)

h	E_h	p	N_{conv}
2/20	0.4203E-1		4341
2/40	0.1258E-1	1.74	23736
2/60	0.6748E-2	1.54	57337
2/80	0.4554E-2	1.37	104637

С целью обеспечения второго порядка аппроксимации во времени мы применяли следующий явный двухстадийный метод Рунге–Кутты [19, 20]

$$u^{(0)} = u^n; \quad u^{(1)} = u^{(0)} + \tau P_h(u^{(0)}, x); \quad u^{(2)} = \frac{1}{2} u^{(0)} + \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{1}{2} \tau P_h(u^{(1)}, x); \quad u^{n+1} = u^{(2)}. \quad (14)$$

Оператор $P_h(u, x)$ — это оператор разностной аппроксимации оператора $P(u, x) = -\frac{\partial F(u)}{\partial x} + s(x)$, где x рассматривается как параметр.

Как отмечалось в [19], вычислительное правило (14) имеет квадратурный смысл правила трапеций, примененного для вычисления интеграла в правой части равенства $u(t+\tau) = u(t) + \int_t^{t+\tau} P(u(t), x) dt$. Метод

Рунге–Кутта (14), как указывалось в [20], позволяет существенно экономить объем компьютерной памяти, так как он требует при вычислении $u^{(m)}$ хранения в памяти только массивов u^n и $u^{(m-1)}$. Ниже будем ссылаться на метод Рунге–Кутта (14) как на метод RK2.

При решении задач методом установления машинное время, необходимое для сходимости численного решения к стационарному пределу, прямо пропорционально числу выполненных временных шагов N_{conv} . Поэтому в табл. 1–4 приводятся также значения N_{conv} для каждого из тестируемых численных методов.

Будем обозначать метод RK2 (14), использующий формулу (7) для подсчета потока, через RK2-T, поскольку формула (7) получена с применением разложения Тейлора. Метод (14), использующий формулу (11), будем называть RK2-LB. Как видно из табл. 2–4, порядок точности метода RK2-LB понижается с увеличением β в (13). С другой стороны, при $\beta = 0.5$ метод RK2-LB дает величины ошибки E_h , вполне сопоставимые с ошибкой E_h , получаемой по методу RK2-T (ср. табл. 1 и 3). Однако при этом метод RK2-LB требует намного меньшего числа временных шагов при счете по методу установления, чем метод RK2-T. Например, при $h = 2/80$ метод RK2-T требует в восемь раз больше временных шагов, чем метод RK2-LB, при этом машинное время, требуемое для расчета на одном временном шаге, одинаково для обоих методов. Следовательно, метод RK2-LB при решении одной и той же задачи на одинаковой сетке требует в 8 раз меньшего машинного времени, чем метод RK2-T. Из сравнения табл. 3 и 4 видно, что с увеличением β в (13) необходимое количество временных шагов уменьшается, но при этом понижается и порядок точности метода RK2-LB. При решении сложных прикладных задач нужно подбирать параметр β в (13) исходя из компромисса между требуемой точностью итогового стационарного решения и потребными затратами машинного времени.

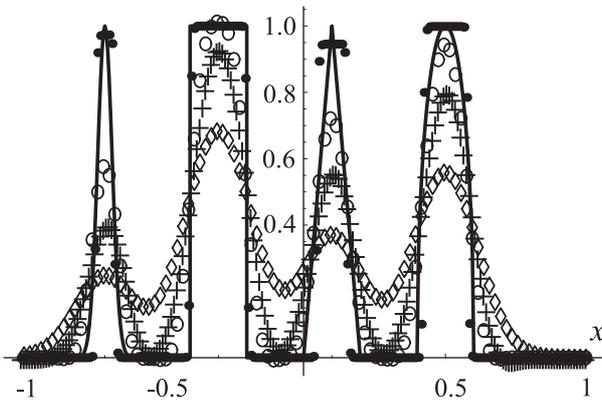


Рис. 1. Конвекция начального профиля в течение одного периода ($t = 400\tau = 2$): 1) точное решение (—), 2) расчет по схеме (5), (12) ($\circ \circ \circ$), 3) расчет по схеме Рунге–Кутты (14), (12) с $\beta = 1.5$ (+ + +), 4) расчет по TVD-схеме [6] ($\cdot \cdot \cdot$), 5) расчет по схеме “уголок” ($\diamond \diamond \diamond$)

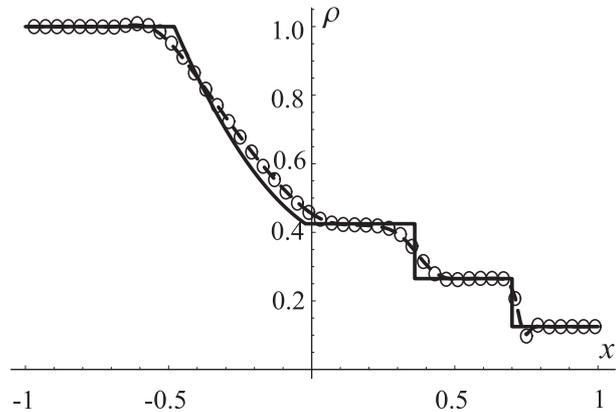


Рис. 2. Задача об одномерном распаде разрыва с начальными данными Сода [5, 10], плотность при $t = 0.4$: 1) точное решение (—), 2) численное решение по схеме (16)–(20) при $\beta_1 = 3.2$, $\beta_2 = \beta_3 = 3.0$ ($\diamond \diamond \diamond$), 3) $\beta_1 = 4.0$, $\beta_2 = \beta_3 = 3.5$ (— — —)

Теперь приведем результаты расчета нестационарной начально-краевой задачи для уравнения (4) с $F(u) = u$ и $s(x) = 0$. Начальная функция $u(x, 0)$ была взята из [21]. На рис. 1 приводится результат расчета по схеме (5), (10) для случая, когда функция $\varphi(x - x_j)$ в (11) имеет вид (13). В этом случае $\frac{\varphi(h/2)}{\varphi'(0)} = \frac{h}{\beta} \text{th}\left(\frac{\beta}{2}\right)$. В расчете использовалось значение $\beta = 4.0$. Для сравнения на рис. 1 также даны результаты расчета по схеме “уголок” первого порядка точности $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h} (F_j^n - F_{j-1}^n)$ и по TVD-схеме Ошера–Чакраварти порядка точности $O(\tau) + O(h^3)$ [6].

Кроме того, на рис. 1 приводятся результаты расчета по схеме RK2, где поток $F_{j+1/2}$ вычисляется по формуле (12). Значение числа Куранта κ берется равным $a\tau/h = 1/2$ для расчетов по всем четырем вышеперечисленным схемам. Видно, что скорость распространения разрывного профиля передается правильно по всем схемам.

Для того чтобы повысить далее порядок аппроксимации схемы (5), (9) по пространственной переменной, нужно в формулу (9) включать соответствующее число следующих членов в разложении Лагранжа–Бюрмана (1).

4. Разностная схема для одномерных уравнений Эйлера. Уравнения Эйлера одномерного

течения невязкого сжимаемого газа имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} = 0, \quad w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u E \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Здесь ρ — плотность газа, u — скорость, p — давление, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, ε — удельная внутренняя энергия, γ — отношение удельных теплоемкостей газа, $\gamma = \text{const} > 1$ и $E = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2$.

Построенная в предыдущем разделе скалярная разностная схема (5), (11) может быть обобщена естественным образом на случай аппроксимации гиперболической системы законов сохранения (15) с привлечением расщепления вектора потоков $F(w) = F^+(w) + F^-(w)$. В настоящее время известны несколько способов расщепления потоков: Стегера–Уорминга, Ван Лира, Лакса–Фридрихса и др. [10, 17, 22]. Мы выбрали достаточно произвольно расщепление Стегера–Уорминга:

$$F^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm + \lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm \lambda_1 + \lambda_2^\pm \lambda_2 + \lambda_3^\pm \lambda_3 \\ (\gamma - 1)\lambda_1^\pm \lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^\pm \lambda_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^\pm \lambda_3^2 + W \end{pmatrix}.$$

Здесь $W = \frac{1}{2}(3 - \gamma)(\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm) \frac{c^2}{\gamma - 1}$, $\lambda_k^\pm = \frac{1}{2}(\lambda_k \pm |\lambda_k|)$, $k = 1, 2, 3$, $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u + c$, $\lambda_3 = u - c$, c — скорость звука, $c = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{0.5}$.

Запишем разностную схему порядка точности $O(\tau) + O(h^2)$, аналогичную схеме (5), (11):

$$w_j^{n+1} - w_j^n + \frac{\tau}{h} (\widehat{F}_{j+1/2}^n - \widehat{F}_{j-1/2}^n) = 0, \quad \text{где} \quad (16)$$

$$\widehat{F}_{j+1/2}^n = f_j^+(x, t_n)|_{x_{j+1/2}} + f_{j+1}^-(x, t_n)|_{x_{j+1/2}}, \quad (17)$$

$$f_j^+(x, t_n) = F^+(w_j^n) + \Phi(x, x_j) \frac{F^+(w_j^n) - F^+(w_{j-1}^n)}{h}, \quad x \in I_j; \quad (18)$$

$$f_{j+1}^-(x, t_n) = F^-(w_{j+1}^n) + \Phi(x, x_{j+1}) \frac{F^-(w_{j+2}^n) - F^-(w_{j+1}^n)}{h}, \quad x \in I_{j+1}, \quad (19)$$

где $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ и $\Phi(x, x_j)$ — следующая диагональная матрица:

$$\Phi(x, x_j) = \text{diag} \left(\frac{\varphi_1(x - x_j)}{\varphi_1'(0)}, \frac{\varphi_2(x - x_j)}{\varphi_2'(0)}, \frac{\varphi_3(x - x_j)}{\varphi_3'(0)} \right). \quad (20)$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ — это любые функции, удовлетворяющие условиям $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) \neq 0$, $\varphi_k(x) = -\varphi_k(-x)$, $k = 1, 2, 3$.

Для расчета по схеме (16)–(20), результаты которого приведены на рис. 2, мы использовали функции $\varphi_k(x - x_j) = h \operatorname{th} \left(\frac{\beta_k(x - x_j)}{h} \right)$. Значение числа Куранта $C = 0.5$. Использовалась равномерная сетка из 100 ячеек на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Отметим, что в случае схемы (16)–(20) практически отсутствуют паразитические осцилляции численного решения в зонах “размазывания” сильных разрывов слева от фронтов разрывов. В то же время в случае таких схем второго порядка точности, как схема Лакса–Вендрофа [1] и схема Мак–Кормака [2], паразитические осцилляции присутствуют слева от разрыва и отсутствуют справа от разрыва, движущегося в положительном направлении оси x , см. соответствующие примеры расчетов в [4, 23]. Наоборот, в случае схемы (16)–(20) в зоне “размазанной” ударной волны присутствует один ложный минимум справа от фронта волны. Мы провели расчеты задачи о распаде разрыва при нескольких значениях шага h ; оказалось, что значение плотности в указанной точке минимума слабо зависит от величины h . Это свидетельствует о наличии явления Гиббса в решениях, получаемых по схеме (16)–(20). Для схем второго порядка точности наличие явления Гиббса отмечалось в [4, 8].

Наличие в схеме (16)–(20) трех функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ дает возможность увеличивать значение плотности в указанной точке ложного минимума путем подбора значений параметров β_1 , β_2 , β_3 в выбранных формах функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, см. штриховую кривую на рис. 2. При этом, судя по графикам,

полученным при различных тройках значений $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, ширина зон “размазывания” сильных разрывов остается одинаковой. Таким образом, эти примеры расчетов указывают на принципиальную возможность и целесообразность постановки и решения задачи об оптимальном подборе функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ в (20), который обеспечивал бы либо минимизацию, либо полное устранение ложных осцилляций численного решения при применении схемы (16)–(20).

5. Разностные схемы для двумерных уравнений Эйлера.

5.1. Разностная схема на основе разложения Лагранжа–Бюрмана. Уравнения Эйлера двумерного течения невязкого нетеплопроводного сжимаемого газа имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} + \frac{\partial g(w)}{\partial y} = 0, \tag{21}$$

где x, y — декартовы пространственные координаты, t — время и

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f(w) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}, \quad g(w) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Здесь p, ρ, u, v обозначают давление, плотность, составляющие скорости; $E = \varepsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $H = E + \frac{p}{\rho}$.

Используется уравнение состояния идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$.

Обозначим через A и B матрицы Якоби, соответствующие векторам потоков $f(w)$ и $g(w)$ в (22), т.е.

$$A(w) = \frac{\partial f(w)}{\partial w}, \quad B(w) = \frac{\partial g(w)}{\partial w}.$$

Собственные значения матрицы A имеют вид $\lambda_1^{(1)} = \lambda_2^{(1)} = u$, $\lambda_3^{(1)} = u + c$, $\lambda_4^{(1)} = u - c$. Собственные значения матрицы B : $\lambda_1^{(2)} = \lambda_2^{(2)} = v$, $\lambda_3^{(2)} = v + c$, $\lambda_4^{(2)} = v - c$. Положим $\lambda_k^{(\mu)\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_k^{(\mu)} \pm |\lambda_k^{(\mu)}|)$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\mu = 1, 2$.

Построенная в разделе 4 разностная схема может быть обобщена естественным образом на случай аппроксимации гиперболической системы законов сохранения (21) с привлечением расщепления векторов потоков $f(w) = F^+(w) + F^-(w)$, $g(w) = G^+(w) + G^-(w)$. Мы выбрали расщепление Стегера–Уорминга:

$$F^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1)\pm} + \lambda_3^{(1)\pm} + \lambda_4^{(1)\pm} \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1)\pm}\lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)\pm}\lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(1)\pm}\lambda_4^{(1)} \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(1)\pm}\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(1)\pm}\lambda_1^{(2)} + \lambda_4^{(1)\pm}\lambda_1^{(2)} \\ (H + uc)\lambda_3^{(1)\pm} + (H - uc)\lambda_4^{(1)\pm} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2)\lambda_1^{(1)\pm} \end{pmatrix},$$

$$G^\pm = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2)\pm} + \lambda_3^{(2)\pm} + \lambda_4^{(2)\pm} \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2)\pm}\lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(2)\pm}\lambda_3^{(1)} + \lambda_4^{(2)\pm}\lambda_4^{(1)} \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^{(2)\pm}\lambda_1^{(2)} + \lambda_3^{(2)\pm}\lambda_3^{(2)} + \lambda_4^{(2)\pm}\lambda_4^{(2)} \\ (H + vc)\lambda_3^{(2)\pm} + (H - vc)\lambda_4^{(2)\pm} + (\gamma - 1)(u^2 + v^2)\lambda_1^{(2)\pm} \end{pmatrix}.$$

Выпишем явную разностную схему порядка точности $O(\tau) + O(h_1^2) + O(h_2^2)$, аналогичную схеме (16)–(20), где h_1 и h_2 — шаги равномерной прямоугольной сетки вдоль осей x и y соответственно:

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\tau}{h_1} (\widehat{f}_{i+1/2,j}^n - \widehat{f}_{i-1/2,j}^n) - \frac{\tau}{h_2} (\widehat{g}_{i,j+1/2}^n - \widehat{g}_{i,j-1/2}^n). \tag{23}$$

Здесь

$$\widehat{f}_{i+1/2,j}^n = f_{i,j}^+(x, y, t_n)|_{x_{i+1/2,y_j}} + f_{i+1,j}^-(x, y, t_n)|_{x_{i+1/2,y_j}}, \tag{24}$$

$$\widehat{g}_{i,j+1/2}^n = g_{i,j}^+(x, y, t_n)|_{x_{i,y_{j+1/2}}} + g_{i,j+1}^-(x, y, t_n)|_{x_{i,y_{j+1/2}}},$$

$$f_{i,j}^+(x, y, t_n) = F^+(w_{i,j}^n) + \Phi_1(x, x_i) \frac{F^+(w_{i,j}^n) - F^+(w_{i-1,j}^n)}{h_1}, \quad x \in I_i; \tag{25}$$

$$f_{i+1,j}^-(x, y, t_n) = F^-(w_{i+1,j}^n) + \Phi_1(x, x_{i+1}) \frac{F^-(w_{i+2,j}^n) - F^-(w_{i+1,j}^n)}{h_1}, \quad x \in I_{i+1}; \tag{26}$$

$$g_{i,j}^+(x, y, t_n) = G^+(w_{i,j}^n) + \Phi_2(y, y_j) \frac{G^+(w_{i,j}^n) - G^+(w_{i,j-1}^n)}{h_2}, \quad y \in I_j;$$

$$g_{i,j+1}^-(x, y, t_n) = G^-(w_{i,j+1}^n) + \Phi_2(y, y_{j+1}) \frac{G^-(w_{i,j+2}^n) - G^-(w_{i,j+1}^n)}{h_2}, \quad y \in I_{j+1}, \tag{27}$$

где $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $I_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ и $\Phi_1(x, x_i)$, $\Phi_2(y, y_j)$ — следующие диагональные матрицы:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, x_i) &= \text{diag} \left(\frac{\varphi_1(x - x_i)}{\varphi_1'(0)}, \frac{\varphi_2(x - x_i)}{\varphi_2'(0)}, \frac{\varphi_3(x - x_i)}{\varphi_3'(0)}, \frac{\varphi_4(x - x_i)}{\varphi_4'(0)} \right), \\ \Phi_2(y, y_j) &= \text{diag} \left(\frac{\psi_1(y - y_j)}{\psi_1'(0)}, \frac{\psi_2(y - y_j)}{\psi_2'(0)}, \frac{\psi_3(y - y_j)}{\psi_3'(0)}, \frac{\psi_4(y - y_j)}{\psi_4'(0)} \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\psi_3(y)$, $\psi_4(y)$ — это любые функции, удовлетворяющие условиям $\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(0) \neq 0$, $\varphi_k(x) = -\varphi_k(-x)$, $\psi_k(0) = 0$, $\psi_k'(0) \neq 0$, $\psi_k(y) = -\psi_k(-y)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Для расчетов по схеме (23)–(28) мы использовали функции

$$\varphi_k(x - x_i) = h_1 \text{th} \left(\beta_k \frac{x - x_i}{h_1} \right), \quad \psi_k(y - y_j) = h_2 \text{th} \left(\beta_k \frac{y - y_j}{h_2} \right)$$

с $\beta_1 = 3.2$ и $\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 3.0$. При таком выборе функций φ_k и ψ_k получаем

$$\frac{\varphi_k(x_{i+1/2} - x_i)}{\varphi_k'(0) h} = \frac{\text{th}(0.5\beta_k)}{\beta_k}. \tag{29}$$

Легко убедиться в том, что правая часть этого равенства удовлетворяет неравенствам

$$0 < \frac{\text{th}(0.5\beta_k)}{\beta_k} \leq 0.5, \quad -\infty < \beta_k < \infty. \tag{30}$$

Члены в (25), (27), содержащие множители Φ_1 , Φ_2 , обеспечивают второй порядок аппроксимации разностной схемы по пространственным переменным. В силу неравенств (30) коэффициенты Φ_1 , Φ_2 можно еще интерпретировать, с точки зрения TVD-схем, как ограничители потоков. Однако, в отличие от TVD-схем, формулы (25), (27) получены из точной формулы разложения Лагранжа–Бюрмана, поэтому они сохраняют равномерно второй порядок точности в смысле величины погрешности разложения сеточных функций в ряды Лагранжа–Бюрмана во всей расчетной области, включая зоны размазанных ударных волн и контактных разрывов.

Для повышения точности предлагаемой схемы во времени можно применять схемы Рунге–Кутты, как это обсуждалось в [9]. С этой целью мы реализовали метод Рунге–Кутты (14), в котором нужно заменить оператор $P_h(u, x)$ на оператор

$$P_h(w) = -\frac{\widehat{f}_{i+1/2,j}^* - \widehat{f}_{i-1/2,j}^*}{h_1} - \frac{\widehat{g}_{i,j+1/2}^* - \widehat{g}_{i,j-1/2}^*}{h_2}, \tag{31}$$

где величины $\widehat{f}_{i+1/2,j}^*$, $\widehat{f}_{i-1/2,j}^*$, $\widehat{g}_{i,j+1/2}^*$, $\widehat{g}_{i,j-1/2}^*$ вычисляются по формулам (24)–(28), в которых необходимо заменить верхний индекс n на второй стадии метода Рунге–Кутты на индекс (1).

5.2. Схема Ошера–Чакраварти. В применении к уравнениям Эйлера (21), (22) эта схема имеет следующий вид [6]:

$$\frac{w_{j,k}^{n+1} - w_{j,k}^n}{\tau} + \frac{\widetilde{f}_{j+1/2,k}^n - \widetilde{f}_{j-1/2,k}^n}{h_1} + \frac{\widetilde{g}_{j,k+1/2}^n - \widetilde{g}_{j,k-1/2}^n}{h_2} = 0. \tag{32}$$

Потоки $\tilde{f}_{j+1/2,k}^n$ и $\tilde{g}_{j,k+1/2}^n$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{j+1/2,k}^n &= \frac{1}{2} \left[f(w_{j+1,k}^n) + f(w_{j,k}^n) - \psi(A)_{j+1/2,k} \Delta_{j+1/2,k} w_{j,k}^n \right] - \tilde{W}_{j+1/2,k}^n, \\ \tilde{g}_{j,k+1/2}^n &= \frac{1}{2} \left[g(w_{j,k+1}^n) + g(w_{j,k}^n) - \psi(B)_{j,k+1/2} \Delta_{j,k+1/2} w_{j,k}^n \right] - \tilde{W}_{j,k+1/2}^n, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\Delta_{j+1/2,k} w_{j,k}^n = w_{j+1,k}^n - w_{j,k}^n$, $\Delta_{j,k+1/2} w_{j,k}^n = w_{j,k+1}^n - w_{j,k}^n$,

$$\begin{aligned} \psi(A)_{j+1/2,k} &= R_{j+1/2,k}^{(1)} \operatorname{diag} \left(\psi(\lambda_1^{(1)}), \psi(\lambda_2^{(1)}), \psi(\lambda_3^{(1)}), \psi(\lambda_4^{(1)}) \right)_{j+1/2,k} \left(R_{j+1/2,k}^{(1)} \right)^{-1}, \\ \psi(B)_{j,k+1/2} &= R_{j,k+1/2}^{(2)} \operatorname{diag} \left(\psi(\lambda_1^{(2)}), \psi(\lambda_2^{(2)}), \psi(\lambda_3^{(2)}), \psi(\lambda_4^{(2)}) \right)_{j,k+1/2} \left(R_{j,k+1/2}^{(2)} \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{34}$$

В каждом из выражений (33) выражение $\frac{1}{2} [\dots]$ обеспечивает первый порядок точности схемы. Члены $\tilde{W}_{j+1/2,k}^n$, $\tilde{W}_{j,k+1/2}^n$ включают в себя монотонизирующие поправки, обеспечивающие второй или третий порядок аппроксимации по пространственным переменным.

Матрицы $R^{(m)}$ и $(R^{(m)})^{-1}$, $m = 1, 2$, входящие в (34), берутся из разложений $A = R^{(1)} D_1 (R^{(1)})^{-1}$, $B = R^{(2)} D_2 (R^{(2)})^{-1}$, где $D_m = \operatorname{diag} (\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \lambda_3^{(m)}, \lambda_4^{(m)})$, $m = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= u - c, & \lambda_2^{(1)} &= u, & \lambda_3^{(1)} &= u + c, & \lambda_4^{(1)} &= u; \\ \lambda_1^{(2)} &= v - c, & \lambda_2^{(2)} &= v, & \lambda_3^{(2)} &= v + c, & \lambda_4^{(2)} &= v. \end{aligned} \tag{35}$$

Явный вид матриц $R^{(m)}$ и $(R^{(m)})^{-1}$, $m = 1, 2$, для случая упорядочения собственных значений $\lambda_k^{(m)}$ в соответствии с (35) можно найти в [24], поэтому мы не приводим эти выражения в целях краткости.

Функция $\psi(z)$, входящая в (34), определяется по формуле [24, 25]

$$\psi(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \delta, \\ \frac{z^2 + \delta^2}{2\delta}, & |z| < \delta, \end{cases} \tag{36}$$

где δ — постоянная, задаваемая в интервале $[0.01, 0.25]$.

Теперь представим выражения для поправок $\tilde{W}_{j+1/2,k}^n$:

$$\tilde{W}_{j+1/2,k}^n = \frac{1 - \phi}{4} \left[\Delta \tilde{f}_{j+3/2,k}^- - \Delta \tilde{f}_{j-1/2,k}^+ \right] + \frac{1 + \phi}{4} \left[\Delta \tilde{f}_{j+1/2,k}^- - \Delta \tilde{f}_{j+1/2,k}^+ \right], \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{f}_{j+3/2,k}^- &= R_{j+3/2,k}^{(1)} \operatorname{minmod} \left[\sigma_{j+3/2,k}^-, \beta \sigma_{j+1/2,k}^- \right], \\ \Delta \tilde{f}_{j-1/2,k}^+ &= R_{j-1/2,k}^{(1)} \operatorname{minmod} \left[\sigma_{j-1/2,k}^+, \beta \sigma_{j+1/2,k}^+ \right], \\ \Delta \tilde{f}_{j+1/2,k}^- &= R_{j+1/2,k}^{(1)} \operatorname{minmod} \left[\sigma_{j+1/2,k}^-, \beta \sigma_{j+3/2,k}^- \right], \\ \Delta \tilde{f}_{j+1/2,k}^+ &= R_{j+1/2,k}^{(1)} \operatorname{minmod} \left[\sigma_{j+1/2,k}^+, \beta \sigma_{j-1/2,k}^+ \right], \\ \sigma_{j+1/2,k}^\pm &= \frac{1}{2} (D_1 \pm |D_1|)_{j+1/2,k} (R_{j+1/2,k}^{(1)})^{-1} \Delta_{j+1/2,k} w_{j,k}^n, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\frac{1}{2} (D_m \pm |D_m|) = \operatorname{diag} \left(\frac{1}{2} (\lambda_1^{(m)} \pm |\lambda_1^{(m)}|), \frac{1}{2} (\lambda_2^{(m)} \pm |\lambda_2^{(m)}|), \frac{1}{2} (\lambda_3^{(m)} \pm |\lambda_3^{(m)}|), \frac{1}{2} (\lambda_4^{(m)} \pm |\lambda_4^{(m)}|) \right), \quad m = 1, 2;$$

$$\operatorname{minmod}(x, y) = \operatorname{sgn}(x) \max \left(0, \min(|x|, \operatorname{sgn}(x)y) \right).$$

Формулы для $\tilde{W}_{j,k+1/2}^n$ аналогичны, поэтому их не приводим.

Элементы матриц $R_{j+1/2,k}^{(1)}$, $(R_{j+1/2,k}^{(1)})^{-1}$ и т.д. вычислялись как средние по Роу: $\rho_{j+1/2,k}$, $u_{j+1/2,k}$, $v_{j+1/2,k}$, $c_{j+1/2,k}$; соответствующие формулы имеются в [6].

Временной шаг τ , входящий в (32), вычислялся с учетом результатов [6] по формуле

$$\tau = \frac{4\theta}{5 - \phi + \beta(1 + \phi)} \left[\max \left(\frac{|u| + c}{h_1}, \frac{|v| + c}{h_2} \right) \right]^{-1}, \tag{39}$$

где θ — множитель надежности, $0 < \theta \leq 1$, $c = \left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{0.5}$ — местная скорость звука, γ — постоянная, входящая в уравнение состояния идеального газа. Постоянная ϕ , входящая в поправку (37), — параметр, задаваемый пользователем; он регулирует направленность по потоку: $\phi = 1$ дает центральную разность, $\phi = -1$ — направленную разность второго порядка точности, $\phi = 1/3$ — направленную разность третьего порядка точности. Параметр β в (39) — параметр “сжатия”, задаваемый в интервале [6]

$$1 < \beta \leq \frac{3 - \phi}{1 - \phi}. \tag{40}$$

Если берется большее значение β , удовлетворяющее (40), то переключение схемы (32) с высокого порядка аппроксимации на первый порядок происходит в меньшем количестве узлов пространственной сетки.

Отметим теперь три существенных отличия разностной схемы, полученной в предыдущем разделе с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана, от схемы Ошера–Чакраварти.

Первое отличие состоит в том, что “ограничители потоков” (29) в схеме (23)–(28) не зависят от компонент сеточного решения в окрестности рассматриваемого узла.

Второе отличие состоит в том, что в областях сильных разрывов решения порядок точности схемы Ошера–Чакраварти по пространственным переменным понижается до первого из-за соответствующей конструкции ограничителей потоков, в то время как схема (23)–(28) сохраняет второй порядок точности и в этих подобластях.

Третье отличие состоит в том, что расчетные формулы в методе (23)–(28) намного проще, чем в схеме Ошера–Чакраварти.

5.3. Примеры расчетов.

Отражение косой ударной волны от стенки. Точное решение рассматриваемой тестовой задачи представляет собой кусочно-постоянную функцию. Мы взяли значение $\varphi = \pi/6$ для угла между фронтом падающей ударной волны и осью x (см. рис. 3). В случае совершенного газа (воздуха) с $\gamma = 1.4$ постоянные точного решения в подобластях 1, 2, 3, указанных на рис. 3, таковы: подобласть 1 — $u_1 = 1.0$, $v_1 = 0.0$, $p_1 = 0.084932903$, $\rho_1 = 1.0$, $M_1 = 2.90$; подобласть 2 — $u_2 = 0.890755053$, $v_2 = -0.189217798$, $p_2 = 0.194177850$, $\rho_2 = 1.776135164$, $M_2 = 2.327642861$; подобласть 3 — $u_3 = 0.806645743$, $v_3 = 0.0$, $p_3 = 0.390838939$, $\rho_3 = 2.898621574$, $M_3 = 1.856588584$. Здесь M_1, M_2, M_3 — значения числа Маха $M = \frac{1}{c} \sqrt{u^2 + v^2}$ в подобластях 1, 2, 3 соответственно; c — скорость звука, $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$. Отраженная ударная волна образует угол $\varphi_3 = 0.418279545$ с положительным направлением оси x .

Начальные условия. В начальный момент времени все поле течения задается равным значениям невозмущенного сверхзвукового втекающего потока, заданным выше для подобласти 1, т.е. начальное течение газа параллельно оси x .

Аналитические граничные условия. Пространственная область имеет размер 4 вдоль оси x и размер 1 вдоль оси y . Граничные условия задаются следующим образом:

- а) сверхзвуковое втекание при $x = 0, 0 \leq y \leq 1$, которое позволяет зафиксировать значения u, v, p, ρ равными условиям невозмущенного потока, данными выше для подобласти 1;
- б) заданные фиксированные значения из подобласти 2 при $y = 1, 0 \leq x \leq 4$, которые создают желаемую интенсивность ударной волны и ее угол;
- в) сверхзвуковое истечение при $x = 4, 0 \leq y \leq 1$;
- г) твердая плоская поверхность при $y = 0, 0 \leq x \leq 4$, которая представляется условием $v = 0$ с дополнительным условием $\partial p / \partial y = 0$ при $y = 0$ из уравнения количества движения вдоль оси y .

Численные граничные условия. Значения сверхзвукового истечения $w_{J,k}, k = 1, \dots, K$, получаются экстраполяцией нулевого порядка, т.е. $w_{J,k} = w_{J-1,k}, k = 1, \dots, K$.

Для вычисления TVD-поправок в методе Ошера–Чакраварти требуются значения численного решения в двух рядах фиктивных ячеек, примыкающих к границам пространственной расчетной области. Значения компонент вектора решения w задавались в фиктивных ячейках в соответствии с методом симметрии, описанным в [22]. Твердая стенка: $p_{j,0} = p_{j,1}; p_{j,-1} = p_{j,2}; \rho_{j,0} = \rho_{j,1}; \rho_{j,-1} = \rho_{j,2}; u_{j,0} = u_{j,1}; u_{j,-1} = u_{j,2}; v_{j,0} = -v_{j,1}; v_{j,-1} = -v_{j,2}$. Граница истечения $x = 4$: $w_{J,k} = w_{J-1,k}; w_{J+1,k} = w_{J-2,k}$.

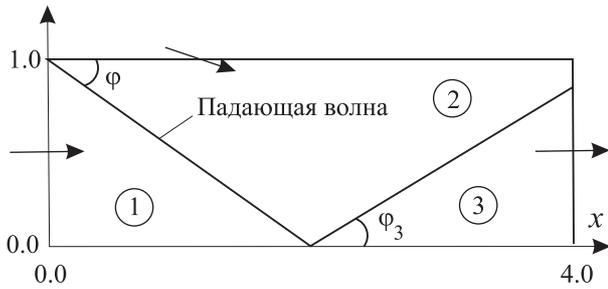


Рис. 3. Пространственная область в задаче об отражении косой ударной волны

Значения численного решения в двух рядах ячеек, примыкающих к границам втока $x = 0$ и $y = 1$, задавались аналогично случаю границы истечения $x = 4$.

В качестве критерия сходимости разностного решения w^n к предельному стационарному решению проверялось выполнение неравенства $\text{Res}(n) < \varepsilon$, где ε — задаваемое пользователем малое положительное число и

$$\text{Res}(n) = \max_{j,k} \left\{ \max \left(|R_{1,j,k}^n|, |R_{2,j,k}^n|, |R_{3,j,k}^n|, |R_{4,j,k}^n| \right) \right\}. \quad (41)$$

Здесь $\{R_{1,j,k}^n, R_{2,j,k}^n, R_{3,j,k}^n, R_{4,j,k}^n\}^T = \frac{\tilde{f}_{j+1/2,k}^n - \tilde{f}_{j-1/2,k}^n}{h_1} + \frac{\tilde{g}_{j,k+1/2}^n - \tilde{g}_{j,k-1/2}^n}{h_2}$ в случае схемы (32); верхний индекс t обозначает операцию транспонирования.

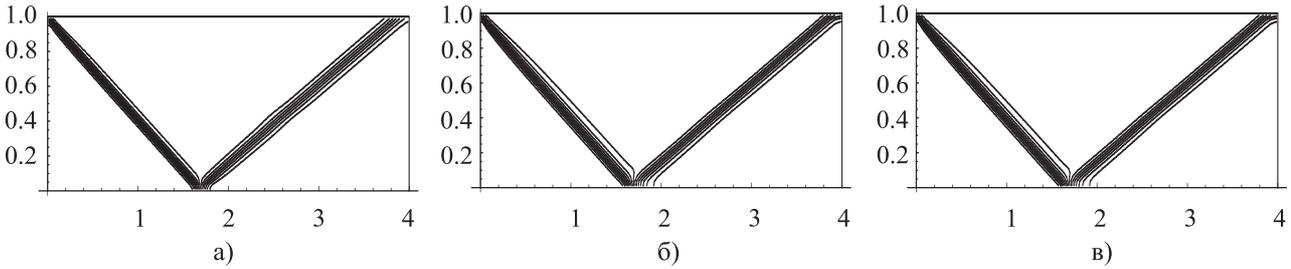


Рис. 4. Задача об отражении косо́й ударной волны от твердой стенки. Линии постоянных чисел Маха: а) схема Ошера–Чакраварти; б) схема (23)–(28); в) схема (14), (31), (24)–(28)

На рис. 4 приведены результаты численных расчетов задачи об отражении косо́й ударной волны от твердой стенки, полученные методом установления по обеим рассматриваемым схемам на равномерной сетке из 160×40 ячеек; $\phi = 1/3$ в (37). Число изолиний $M = \text{const}$ одинаково для обеих схем. Видно, что отраженная волна размывается менее интенсивно при счете по схеме (23)–(28).

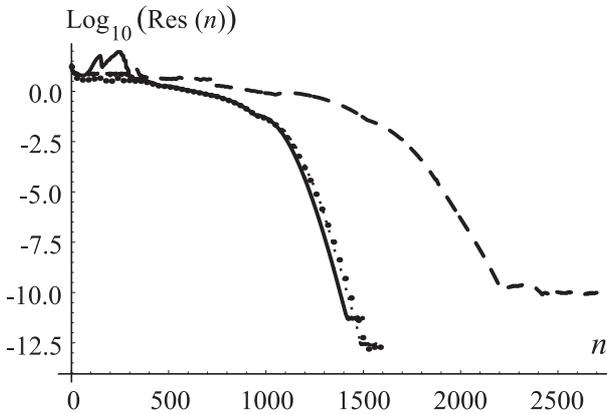


Рис. 5. Невязка (41) как функция числа временных шагов n

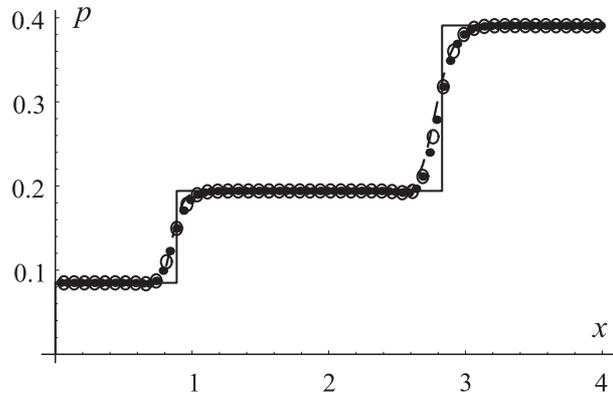


Рис. 6. Задача об отражении косо́й ударной волны от твердой стенки: а) расчет по схеме Ошера–Чакраварти (---); б) расчет по схеме (23)–(28) (···), в) расчет по схеме (14), (31), (24)–(28) (o o o)

На рис. 5 сплошной линией показана невязка (41) в случае схемы (23)–(28), а штриховой линией — невязка при использовании схемы Ошера–Чакраварти. Видно, что новая схема требует 1400 шагов во времени для обеспечения падения нормы невязки решения до уровня машинных ошибок округления (10^{-11} – 10^{-12}). В случае схемы второго порядка точности во времени (14), (31), (24)–(28) невязка (41) (пунктирная линия) падает до уровня машинных ошибок округления примерно за такое же количество временных шагов, что и в случае одностадийной схемы (23)–(28), однако при этом на каждом шаге по t схема (14), (31), (24)–(28) требует в два раза большего машинного времени, так как необходимо вычислять оператор (31) на каждой из двух стадий метода Рунге–Кутты (14).

В то же время TVD-схема Ошера–Чакраварти требует 2400 шагов по t , т.е. примерно в 1.7 раз больше, чем схема (23)–(28). Отметим также, что схема Ошера–Чакраварти требует для получения решения на одном временном шаге машинное время, которое в 3.43 раза больше, чем в случае схемы (23)–(28). С учетом

того, что для получения стационарного решения по новой схеме требуется в 1.7 раза меньше временных шагов, чем в случае схемы Ошера–Чакраварти, получаем суммарный выигрыш в машинном времени примерно в 5.84 раза при использовании схемы (23)–(28) по сравнению со схемой Ошера–Чакраварти.

На рис. 6 приведены профили давления газа $p = p(x, y_0)$ в сечении $y = 0.5$, полученные по обеим рассматриваемым схемам. Ширины зон размазывания ударных волн обеими схемами сравнимы, несмотря на то, что использованный в схеме Ошера–Чакраварти параметр $\phi = 1/3$ соответствует третьему порядку точности схемы по пространственным переменным в подобластях гладкого течения.

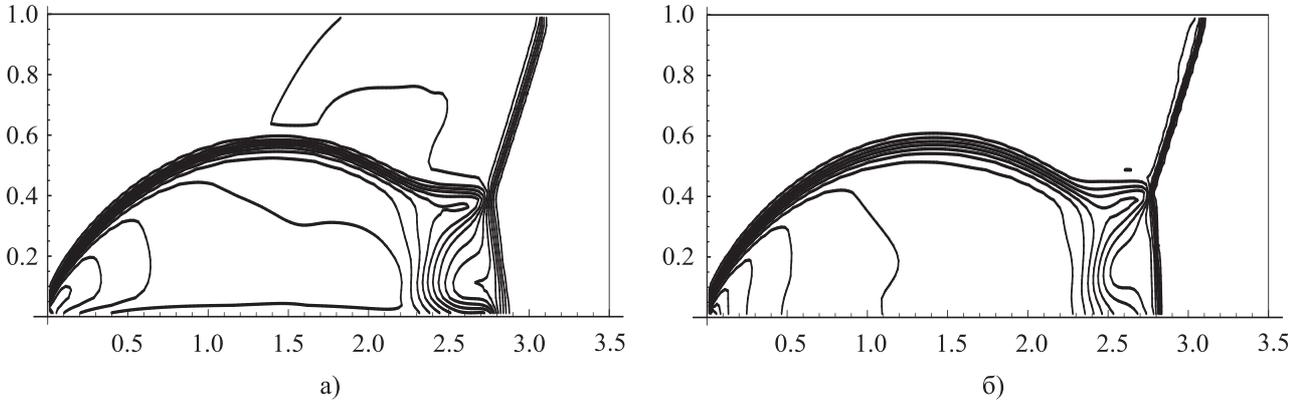


Рис. 7. Линии постоянной плотности в задаче о двойном маховском отражении ударной волны от клина при $t = 0.2$: а) схема третьего порядка точности (42), (32)–(39); б) схема (23)–(28)

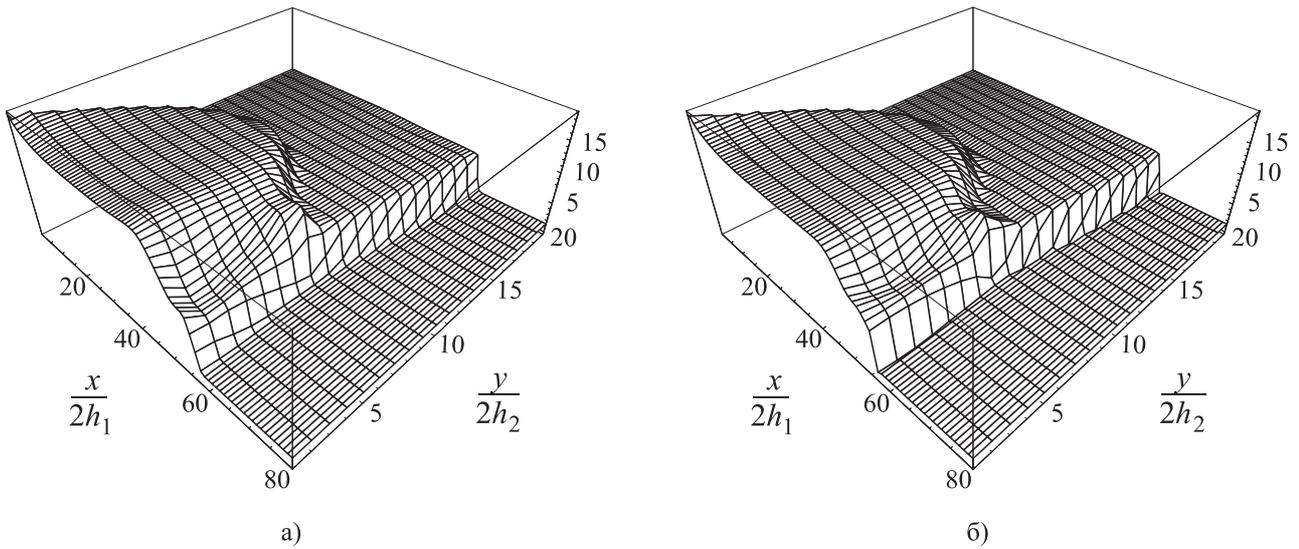


Рис. 8. Поверхность $\rho = \rho(x, y, t)$ в задаче о двойном маховском отражении ударной волны от клина при $t = 0.2$: а) схема третьего порядка точности (42), (32)–(39); б) схема (23)–(28)

Двойное маховское отражение ударной волны от поверхности клина. Результаты расчета этой задачи приведены на рис. 7–9 для угла полураствора клина 30° ; число Маха падающей ударной волны равно 10. В случае рис. 7 и 8 расчет был выполнен на сравнительно грубой сетке из 160×40 ячеек. В случае новой схемы второго порядка точности по пространственным переменным (23)–(29) в (29) выбраны следующие значения параметров: $\beta_1 = 3.2$, $\beta_2 = \beta_3 = 3.0$, $\beta_4 = 3.3$. На рис. 7а, 8а и 9а представлены результаты расчета по TVD-методу третьего порядка точности во времени и в пространстве, в котором интегрирование во времени уравнений Эйлера осуществлялось по методу Рунге–Кутты третьего порядка точности [8, 10, 20]:

$$\begin{aligned}
 w^{(0)} &= w^n; & w^{(1)} &= w^{(0)} + \tau P_h(w^{(0)}); \\
 w^{(2)} &= \frac{3}{4} w^{(0)} + \frac{1}{4} w^{(1)} + \frac{1}{4} \tau P_h(w^{(1)}); & w^{(3)} &= \frac{1}{3} w^{(0)} + \frac{2}{3} w^{(2)} + \frac{2}{3} \tau P_h(w^{(2)}); & w^{n+1} &= w^{(3)},
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

где, по аналогии с (31), $P_h(w)$ — разностная аппроксимация оператора пространственного дифференцирования по методу [6]; $\phi = 1/3$ в (37), $\theta = 1.0$ в (39).

Во избежание зачернения большей части поверхности $\rho = \rho(x, y, t)$ из-за слишком большого количества линий этой поверхности, на рис. 8 показана лишь каждая вторая линия поверхности вдоль осей x, y . На рис. 8б видно, что осцилляции разностного решения за фронтом падающей ударной волны отсутствуют несмотря на то, что не применялись TVD-ограничители потоков.

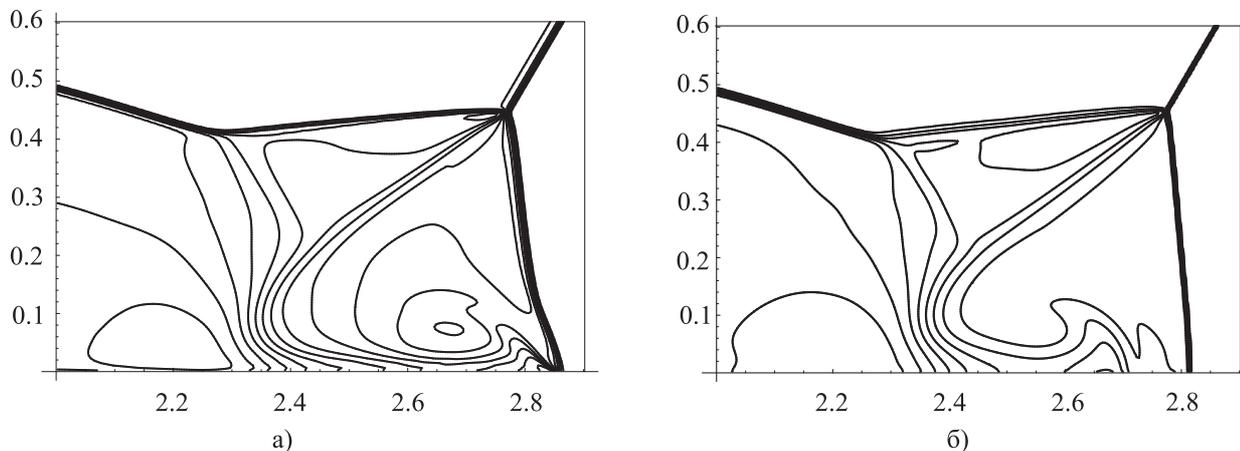


Рис. 9. Двойное маховское отражение. Линии постоянной плотности при $t = 0.2$: а) схема третьего порядка точности (42), (32)–(39); б) схема (23)–(28)

На рис. 9 представлены результаты расчета на сетке из 960×240 ячеек и показана окрестность маховской ударной волны. Видно, что при счете по TVD-методу фронт падающей ударной волны, а также основной маховский скачок размазываются по TVD-методу на большее количество ячеек сетки, чем в случае нового метода второго порядка точности по пространственным переменным. Это связано с тем, что в конструкцию TVD-метода заложено переключение схемы с высокого порядка аппроксимации на первый в областях сильных разрывов, см. выше обсуждение формулы (40). На рис. 9а также заметно некоторое выпучивание ножки Маха вблизи оси x , которое отсутствует на рис. 9б, а также в примерах расчета этой же задачи, приведенных в [8, 10]. Указанное выпучивание, возникающее при применении TVD-метода, вызывается более интенсивным размазыванием тангенциального разрыва, выходящего из тройной точки и закручивающегося за маховским скачком вблизи оси x .

6. Заключение. Выше показано, как можно обобщить идею применения формулы разложения Лагранжа–Бюрмана, впервые предложенную в [9], на случай построения разностных схем для двумерных гиперболических законов сохранения. Гибкость предложенного общего подхода состоит в том, что можно вводить в разностные аппроксимации несколько функций, по степеням которых разлагаются сеточные функции. За счет подбора вводимых функций можно добиваться нужных свойств, в частности, существенно уменьшать паразитические осцилляции численного решения в окрестностях сильных разрывов. Разумеется, формулу разложения Лагранжа–Бюрмана можно применять для построения новых численных методов и для других типов уравнений в частных производных математической физики и аэродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lax P.D., Wendroff B. Systems of conservation laws, III // Commun. Pure Appl. Math. 1960. **13**, N 2. 217–237.
2. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper. 1969. N 69-354.
3. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. **180**, № 6. 1303–1305.
4. Ворожцов Е.В., Яценко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. Новосибирск: Наука, 1985.
5. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. **49**, N 3. 357–393.
6. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. 1985. N 85-0363.
7. Shu C.-W. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws // Math. Comput. 1987. **49**, N 179. 105–121.
8. Bona C., Bona-Casas C., Terradas J. Linear high-resolution schemes for hyperbolic conservation laws: TVB numerical evidence // J. Comput. Phys. 2009. **228**, N 6. 2266–2281.

9. *Ворожцов Е.В.* Построение разностных схем для гиперболических законов сохранения с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана // Тр. Междунар. конф. по вычислительной математике / Ред. Г.А. Михайлов, В.П. Ильин, Ю.М. Лаевский. Часть I. Новосибирск: Прайс-куррьер, 2004. 443–448.
10. *Пинчук В.И., Шу Ч.-В.* Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН, 2000.
11. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
13. *Ворожцов Е.В.* Построение явных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью разложений Лагранжа–Бюрмана // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 2. 45–56.
14. *Vorozhtsov E.V.* Derivation of explicit difference schemes for ordinary differential equations with the aid of Lagrange–Burmman expansions // Lecture Notes in Computer Science. Volume 6244. Berlin: Springer, 2010. 250–266.
15. *van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V: A second-order sequel to Godunov’s method // J. Comput. Phys. 1979. **32**, N 1. 101–136.
16. *Anderson W.K., Thomas J.L., van Leer B.* Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. **24**, N 9. 1453–1460.
17. *Choi H., Liu J.-G.* The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculations // J. Comput. Phys. 1998. **144**, N 2. 237–256.
18. *Consul P.C., Fatoye F.* Lagrangian probability distributions. Berlin: Birkhäuser, 2006.
19. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И.* Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977.
20. *Shu C.-W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // J. Comput. Phys. 1988. **77**, N 2. 439–471.
21. *Daru V., Tenaud C.* High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations // J. Comput. Phys. 2004. **193**, N 2. 563–594.
22. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1999.
23. *Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N.* On some algorithms for shock wave recognition by shock-capturing computational results // Computers and Fluids. 1980. **8**, N 3. 313–326.
24. *Yee H.C., Warming R.F.* Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations // J. Comput. Phys. 1985. **57**. 327–360.
25. *LeVeque R.J.* Numerical methods for conservation laws. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992.

Поступила в редакцию
01.09.2011
