УДК 532.529

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В КАМЕРЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ЗАКРУТКИ ТУРБИНЫ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

## K. H. Волков<sup>1</sup>

Рассматривается моделирование турбулентного течения вязкого сжимаемого газа в камере предварительной закрутки турбины высокого давления газотурбинного двигателя. Для расчетов используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса, замкнутые при помощи уравнений  $k-\varepsilon$  модели турбулентности, которые учитывают поправки на вращение, кривизну линий тока и сжимаемость. Газодинамические расчеты выполняются на детализированной модели каверны, ограниченной ротором и статором, что позволяет учесть влияние некоторых конструктивных особенностей на общую структуру течения. Обсуждаются детали вычислительной процедуры и результаты численного моделирования.

**Ключевые слова:** численное моделирование, камера предварительной закрутки, газовая турбина, турбулентность, вращение.

1. Введение. При создании современных газотурбинных двигателей практически невозможно обойтись без использования численных методов расчета внутренних турбулентных течений и теплообмена вязкого сжимаемого газа в областях сложной геометрической конфигурации. Вопросы, связанные с расчетами течений в газотурбинных двигателях, включают в себя моделирование турбулентного теплообмена в условиях влияния благоприятного и неблагоприятного градиентов давления, свободной турбулентности, течений с учетом кривизны линий тока и закрутки потока, взаимодействия вихревых структур с поверхностью и многие другие.

Стремление к повышению показателей производительности газовых турбин обусловливает увеличение температуры и давления на входе в межлопаточный канал, что приводит к необходимости обеспечения надлежащего охлаждения обтекаемых поверхностей. Диск турбины высокого давления представляет собой наиболее теплонагруженный компонент конструкции, поскольку он напрямую подвержен воздействию горячих газов, поступающих из камеры сгорания.

Технология охлаждения компонентов газовых турбин при помощи внутренних конвективных течений прошла много стадий, начиная с каналов простой формы и заканчивая конструкциями, включающими в себя каверны сложной геометрической конфигурации, ограниченные подвижными и неподвижными стенками, в которых возникают сложные вихревые течения [1–3].

Внутренняя воздуховодная система (internal air system) газотурбинного двигателя выполняет функции охлаждения обтекаемых поверхностей, их защиты от воздействия горячего газа и вентиляции внутренних полостей двигателя. Воздух, отбираемый для этих целей из потока в межлопаточном канале компрессора (порядка 20–30% от полного расхода), не вносит вклада в коэффициент полезного действия и отрицательным образом сказывается на показателях эффективности, но обеспечивает защиту внутренних поверхностей несмотря на усложнение конструкции и связанные с этим финансовые затраты. Использование средств численного моделирования позволяет избежать постановки сложных натурных экспериментов и предотвратить появление зон локального повышения температуры.

В то время как реализация охлаждения лопаток соплового направляющего аппарата (Nozzle Guide Vane, NGV) представляется достаточно простой, внутреннее охлаждение лопаток ротора является более сложной задачей, поскольку поток подается к вращающейся системе. Для этого используются сопла предварительной закрутки потока (pre-swirl nozzle), расположенные на поверхности статора и установленные под некоторым углом к оси вращения ротора. Ускоряясь и расширяясь в сопле, газ получает ненулевую скорость в окружном направлении и поступает в каверну (pre-swirl chamber), образованную стенками статора и ротора, что приводит к уменьшению относительной полной температуры рабочего тела перед его подачей к лопаткам через ряд отверстий в роторе (receiver hole). Сопла предварительной закрутки обычно располагаются ниже по радиусу, чем отверстия в турбинном диске.

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д. Ф. Устинова, физико-механический факультет, 1-я Красноармейская ул., 1, 190005, Санкт-Петербург; доцент, e-mail: dsci@mail.ru (c) Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова В настоящей статье рассматривается моделирование турбулентного течения вязкого сжимаемого газа в камере предварительной закрутки турбины высокого давления трехвального газотурбинного двигателя (three-shaft engine). В трехвальном двигателе имеются три последовательно расположенные турбины, каждая из которых приводит в действие свой вал. Турбина высокого давления (High Pressure Turbine, HPT), которая располагается после камеры сгорания, приводит в действие компрессор двигателя, а турбины промежуточного давления (Intermediate Pressure Turbine, IPT) и низкого давления (Low Pressure Turbine, LPT) приводят как внешнюю нагрузку, так и дополнительные компрессоры двигателя, расположенные перед основным. В компрессорной системе используются три компрессора — компрессор низкого давления (вентилятор), компрессор промежуточного давления и компрессор высокого давления.



Рис. 1. Осесимметричная модель двигателя

Полномасштабная твердотельная осесимметричная модель газотурбинного двигателя и его основные компоненты показаны на рис. 1. Компрессор высокого давления состоит из 6 ступеней, но для простоты на рисунке показаны только последние 2 ступени. Длина двигателя составляет 5.30 м, а диаметр вентилятора — 2.79 м. Максимальная тяга достигает 310–370 кH, а полная степень повышения давления и степень двухконтурности — 41.1 и 8.15 соответственно. Удельный расход топлива составляет 0.557 кг/ч. Камера предварительной закрутки состоит из двух сегментов, разделенных лабиринтным уплотнением, и включает сопла на поверхности статора и приемные отверстия на поверхности ротора.

Газодинамические расчеты выполняются на детализированной модели каверны, что позволяет учесть влияние некоторых ее конструктивных особенностей (протечки через радиальные зазоры, вдув охлаждающего воздуха, галтели, уступы) на общую структуру течения во внутреннем тракте.

**2.** Структура течения. Режим течения во вращающейся системе с осевым подводом рабочей среды определяется линейным и вращательным числами Рейнольдса  $\operatorname{Re}_r = \frac{2\rho Ur}{\mu}$  и  $\operatorname{Re}_{\omega} = \frac{\rho \omega r^2}{\mu}$ , где r – локальный радиус, U – линейная скорость и  $\omega$  – угловая скорость вращения.

Структура течения в каверне в существенной степени зависит от параметра турбулентности (turbulent flow parameter)  $\lambda_t = C_W \operatorname{Re}_{\omega}^{-0.8}$ , где  $C_W = \frac{\dot{m}}{\mu b}$  — безразмерный массовый расход (flow Reynolds number),  $\dot{m}$  — массовый расход и b — радиус диска.

Относительная скорость закрутки потока во входном сечении (inlet swirl fraction) определяется соотношением  $\beta = \frac{v_{\theta b}}{\omega b}$ , где  $v_{\theta b}$  — тангенциальная скорость при r = b.

Показателем эффективности камеры предварительной закрутки является степень уменьшения температуры воздуха, поступающего к лопаткам ротора, а также коэффициенты потерь сопел предварительной закрутки и отверстий в диске турбины [1–3].

Относительная скорость закрутки (swirl ratio) определяется как отношение тангенциальной скорости охлаждающего газа  $v_{\rm is,1}$  к тангенциальной скорости ротора  $U = \omega r$ , вычисленной при значении радиальной координаты, соответствующей положению выходного сечения сопла  $S = \frac{v_p \cos \alpha}{U} = \frac{v_{\rm is,1}}{\omega r}$ , где  $v_p$  — средняя скорость в выходном сечении сопла,  $\alpha$  — угол установки сопла.

Эффективность закрутки (pre-swirl velocity efficiency) определяется как отношение действительной скорости в выходном сечении сопла к скорости, соответствующей течению без потерь (изэнтропические условия)  $E = \frac{v_{pa}}{v_{pi}} = \frac{v_{\theta,2}}{v_{is,1}}$ , где  $v_{pa}$  и  $v_{pi}$  — действительная и идеальная скорости охлаждающего газа в выходном сечении сопла, рассчитанные исходя из температуры в приемном отверстии и перепада давления вдоль сопла. Скорости  $v_{pa}$  и  $v_{pi}$  находятся из соотношений

$$v_{pa} = \frac{2c_p (T_{01} - T_{03,r}) + U^2}{2U \cos \alpha}, \quad v_{pi} = M (\gamma R T_{2i})^{1/2},$$

где М — число Маха,  $T_{01}$  — полная температура во входном сечении сопла,  $T_{02}$  — полная температура в выходном сечении сопла,  $T_{03,r}$  — относительная полная температура в приемном отверстии и  $T_{2i}$  — идеальная статическая температура в выходном сечении сопла.

Адиабатическая эффективность (adiabatic efficiency) определяется как безразмерное изменение полной температуры между соплом предварительной закрутки в неподвижной системе координат и приемными отверстиями во вращающейся системе координат. Теоретические соотношения получаются на основе первого закона термодинамики. Расчеты для различных конфигураций камеры предварительной закрутки приводятся в работах [4, 5].

Результаты расчетов обрабатываются в виде разности

$$\Delta T_{a} = \frac{2c_{p} \left(T_{0, \text{abs1}} - T_{0, \text{rel2}}\right)}{(\omega r)^{2}} = \frac{2c_{p} \Delta T}{(\omega r)^{2}}$$

где  $T_{0,abs1}$  — полная температура во входном сечении сопла, измеренная в неподвижной системе координат, и  $T_{0,rel2}$  — полная температура во входном сечении приемного отверстия, измеренная в системе координат, вращающейся с угловой скоростью вращения ротора.

С помощью условия теплового баланса разность температур связывается с моментом сопротивления статора:

$$\frac{2c_p\Delta T}{(\omega r)^2} = \frac{2D}{\omega r^2 \dot{m}} - \left(1 - \frac{2v_{\theta,\mathrm{in}}}{\omega r}\right).$$

В идеализированных условиях имеем D = 0. В неподвижной системе координат, если пренебречь разницей в радиальном положении сопел и приемных отверстий, уравнение сохранения момента количества движения приводит к соотношению [6]  $\dot{m}r(v_{\theta,\text{mix}} - v_{\theta,\text{in}}) = M + D$ , где  $v_{\theta,\text{mix}}$  — тангенциальная скорость при условии полного смешения потоков.

Для расчета моментов сопротивления статора и ротора используются соотношения [6]

$$D = -A_s r c_p \, \frac{\rho v_{\theta,\text{mix}}^2}{2} \,, \quad M = A_r r c_p \, \frac{\rho \left|\omega r - v_{\theta,\text{mix}}\right| \left(\omega r - v_{\theta,\text{mix}}\right)}{2} \,,$$

где A — площадь поверхности. Индексы *s* и *r* соответствуют статору и ротору. Для простоты расчетов полагается, что  $C_f = 0.0534 \,\mathrm{Re}_{\omega}^{-0.2}$ . Приведенные соотношения позволяют определить M, D и  $v_{\theta,\mathrm{mix}}$ , на основе которых рассчитывается степень повышения температуры в системе.

Коэффициент потерь (discharge coefficient) определяется как отношение идеальной тангенциальной относительной скорости охлаждающего газа  $v_{\theta 1,is}$ , полученной для течения без потерь в сопле и каверне, к идеальной скорости в выходном сечении приемного отверстия  $v_{x2,is}$ . Действительная скорость меньше идеальной скорости, рассчитанной в условиях изэнтропического расширения газа в каверне.

Коэффициент потерь рассчитывается как отношение действительного массового расхода через приемные отверстия к массовому расходу в изэнтропических условиях [7]:  $C_d = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_i} = \frac{\dot{m}}{\rho_{3i} v_{3i} A_3}$ .

Плотность и скорость газа в выходном сечении приемного отверстия находятся из соотношений

$$\rho_{3i} = \frac{p_3}{RT_{02}} \left(\frac{p_{02}}{p_3}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \quad v_{3i} = \left[\frac{2\gamma RT_{02}}{\gamma-1} \left(1-\frac{p_3}{p_{02}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}.$$

Здесь  $\dot{m}$  — расход через приемное отверстие (полный расход, деленный на число приемных отверстий),  $A_3$  — площадь поперечного сечения приемного отверстия,  $p_{01}$  — полное давление на входе в сопло,  $p_{02}$  полное давление в выходном сечении сопла,  $p_2$  — статическое давление в каверне,  $p_3$  — статическое давление в выходном сечении приемного отверстия. Для простоты обычно полагается, что  $p_{02} = p_{01}$ .

Теоретические соотношения для расчета коэффициента потерь выводятся в работе [8] с использованием уравнения теплового баланса.

**3.** Теоретические основы. На показатели эффективности камеры предварительной закрутки существенное влияние оказывает горячий газ, поступающий в каверну через зазоры между статором и ротором. Для предотвращения поступления в систему горячего воздуха из межлопаточного канала, имеющего низкую тангенциальную скорость и высокую относительную полную температуру, а также перетекания воздуха внутри каверны из ее нижнего сегмента в верхний, используются лабиринтные уплотнения. Увеличение относительной полной температуры воздуха на 10 ÷ 20 К достаточно для того, чтобы уменьшить жизненный цикл компонентов турбины примерно на 50%.

В зависимости от конструкции турбины высокого давления используется два типа камеры предварительной закрутки (тип "direct-transfer" и тип "cover-plate").

Течения и теплообмен в камере предварительной закрутки, в которой сопла и отверстия во вращающемся диске располагаются при одном и том же значении радиальной координаты, изучаются в работах [9, 10]. Имеется полное смешение потоков, поступающих через сопла предварительной закрутки, с радиальным течением в каверне, что приводит к существенным потерям полного давления. Осесимметричная постановка задачи дает приемлемые результаты в сегменте каверны, расположенном ниже сопел предварительной закрутки, но не позволяет исследовать трехмерные особенности течения, связанные с взаимодействием сопловых струй [10].

Измерения скорости, давления и температуры, а также характеристики эффективности (коэффициенты потерь в сопле и приемном отверстии) камеры предварительной закрутки типа "direct-transfer" проводятся в работе [11], а камеры типа "cover-plate" — в работе [4]. Для анализа течения используется модель свободного вихря, показывающая, что имеется оптимальный угол установки сопла, при котором среднее число Нуссельта на поверхности вращающегося диска является минимальным.

Измерения статического и полного давления, а также коэффициента теплоотдачи приводятся в работе [8] для камеры предварительной закрутки, имеющей 24 сопла, наклоненных под углом 20° к оси вращения, и 60 приемных отверстий в турбинном диске, ось которых параллельна оси вращения ротора. Трехмерные расчеты для идеализированной конфигурации каверны проводятся при

$$0.78 < \frac{\text{Re}_{\omega}}{10^6} < 1.2, \quad 0.6 < \frac{C_W}{10^4} < 2.8, \quad 0.5 < \beta_i < 3.0, \quad 0.11 < \lambda_t < 0.36.$$

Структура течения в камере предварительной закрутки имеет черты той, которая наблюдается в системах, образованных неподвижным и вращающимся дисками [1, 2]. Течение в каверне определяется степенью закрутки потока и параметром турбулентности. Потери полного давления, обусловленные смешением потоков, поступающих из сопел, и рециркуляционного течения в каверне, возникают между входным сечением сопла и серединным сечением каверны, возрастая при увеличении степени закрутки потока. Распределение теплового потока по поверхности ротора является практически осесимметричным, за исключением малой области в окрестности приемных отверстий, что соответствует результатам работы [12], в которой минимум теплового потока наблюдается в области взаимодействия сопловой струи с поверхностью диска.

Измерения и расчеты, проведенные в работе [13], показывают наличие малой теплонапряженной области, расположенной около приемных отверстий, что связывается с взаимодействием потоков из сопел с радиальным течением в каверне. Адиабатическая эффективность, полученная по результатам численных расчетов, достаточно хорошо согласуется с теоретическим значением, а коэффициент потерь приемных отверстий достигает максимума при некоторой критической степени закрутки потока.

Измерения эффективности закрутки и коэффициента потерь проводятся в работе [7]. Эффективность системы возрастает при увеличении степени закрутки, приводя к уменьшению температуры газа, поступающего к лопаткам ротора. Увеличение расхода газа, поступающего в каверну через лабиринтные уплотнения, приводит к уменьшению эффективности. Коэффициент потерь возрастает при увеличении степени закрутки потока и уменьшается при увеличении расхода рабочего тела через лабиринтное уплотнение.

Теоретические модели развиваются в работах [6, 14, 15]. Точность одномерной модели [14] является неудовлетворительной (приемлемые результаты получаются только в отношении перепада давлений во входном и выходном сечениях). В модели [6] используется условие баланса момента количества движения при условии полного смешения потоков в каверне. Модель [15] разрабатывается на основе метода интегральных соотношений и аналогии Рейнольдса и предназначается для расчета температуры газа в приемных отверстиях (учитывается как течение в каверне, так и течение, индуцированное вдувом из сопел предварительной закрутки).

Численные расчеты на основе трехмерной модели, проведенные в работах [16, 17], находятся в хорошем согласовании с результатами измерений [9].

В работе [5] исследуется влияние радиального расположения сопел предварительной закрутки на показатели эффективности (тип "direct-transfer") при использовании трехмерной модели течения и SST-модели турбулентности (Shear-Stress Transport model of turbulence). Расчеты проводятся в стационарной постановке при  $\frac{r_i}{r_o} = 0.8, 0.9$  и 1.0 (под  $r_i$  и  $r_o$  понимаются радиальные координаты, соответствующие положению входного сечения сопла и выходного сечения приемного отверстия),  $0.5 < \beta < 2.0$  и  $0.12 < \lambda_t < 0.36$ . Вращательное число Рейнольдса поддерживается постоянным ( $\text{Re}_{\omega} = 10^6$ ). Коэффициент потерь достигает максимума, когда ядро потока вращается с той же угловой скоростью, что и приемные отверстия. Условие реализуется при увеличении  $\frac{r_i}{r_o}$  и малых относительных скоростях закрут-

ки. Зависимость адиабатической эффективности системы от относительной скорости закрутки является практически линейной и слабо зависит от угловой скорости вращения невязкого ядра. При фиксированной относительной скорости закрутки адиабатическая эффективность возрастает при увеличении отношения радиусов.

Результаты расчетов в нестационарной постановке на основе модели Спаларта–Аллмареса приводятся в работе [18] (тип "direct transfer") и сравниваются с имеющимися экспериментальными данными по коэффициентам потерь в сопле и приемных отверстиях.

Новая конфигурация камеры предварительной закрутки, основанная на результатах вычислительного эксперимента, предлагается в работе [19], позволяя получить выигрыш в относительной полной температуре рабочего тела (до 20 градусов), достигающего поверхности турбинного диска.

**4. Взаимодействие неподвижных и подвижных компонентов.** Характерной чертой газовых турбин и компрессоров является вращение роторных элементов проточной части относительно статорных элементов, что приводит к изменению геометрии расчетной области, требуя учета взаимного влияния вращающихся и неподвижных компонентов конструкции.

При подготовке технической документации обычно приводится твердотельная модель металлических деталей, составляющих конструкцию. Для выполнения газодинамических расчетов подготавливается твердотельная геометрическая модель области, занятой жидкостью. Геометрия неподвижных и вращающихся элементов готовится по отдельности с их последующей стыковкой.

При использовании подвижной системы координат (Single Reference Frame, SRF) течение является нестационарным в инерциальной системе координат (системе координат, фиксированной относительно лабораторной системы отсчета), поскольку ротор вращается. При отсутствии статора расчеты проводятся в области, которая перемещается вместе с ротором, так что течение становится стационарным по отношению к вращающейся (неинерциальной) системе координат (границы перемещаются с той же скоростью, что и система координат).

Для моделирования течения в неподвижных компонентах используется стационарная система координат, а течения во вращающихся компонентах — вращающаяся система координат. Подход используется для моделирования течений в изолированных компонентах и является наиболее экономичным с вычислительной точки зрения. Взаимодействие между неподвижными и подвижными компонентами не учитывается.

При наличии статора и ротора невозможно выбрать систему координат, в которой течение является стационарным. Для моделирования взаимодействия статора и ротора используются различные подходы.

1. Расчетная область разбивается на ряд подобластей, каждая из которых перемещается по отношению к лабораторной системе отсчета, а смешения потоков на границе стыковки подобластей не происходит. Уравнения в каждой подобласти записываются в системе координат, соответствующей этой подобласти (Multiple Reference Frame, MRF). Геометрические модели неподвижных и подвижных компонентов готовятся отдельно друг от друга. Границы раздела подобластей ориентируются таким образом, чтобы скорость перемещения системы координат по нормали к границе равнялась нулю. На границе раздела подобластей для абсолютной скорости используется условие непрерывности. Подход используется для расчета средних по времени характеристик потока или для получения начального приближения, которое используется для расчетов в полной постановке.

2. Течение в каждой подобласти считается стационарным, а взаимодействие статора и ротора учитывается приближенным способом при помощи поверхности смешения (mixing plane). Находятся решения в каждой подобласти. Параметры потока на границе раздела подобластей (на выходной границе неподвижной подобласти и входной границе подвижной подобласти или наоборот, порядок следования подобластей не является принципиальным) осредняются в окружном направлении. В результате осреднения получаются профили параметров потока для обновления граничных условий на границе раздела. Подход применяется в случае, когда взаимодействие статора и ротора является относительно слабым, а на границе раздела подобластей не возникает возвратного течения. В численных расчетах возвратное течение обычно возникает на начальном этапе счета. Для избежания проблем со сходимостью получают начальные приближения решения в каждой подобласти с использованием фиксированных граничных условий на границе раздела.

3. Течение считается нестационарным и взаимодействие статора и ротора учитывается в полной мере при помощи поверхности скольжения (sliding plane). Расчет течения в неподвижных компонентах проточной части выполняется в неподвижной системе координат, а течения во вращающихся компонентах — в системе координат, вращающейся вместе с деталью. В уравнениях математической модели фигурируют скорости относительного движения. Переход между неподвижной и вращающейся системами координат происходит на границе стыковки компонентов модели. Положение скользящей поверхности задается пользователем на стадии подготовки геометрии расчетной области. Форма и площадь состыкуемых скользящих поверхностей являются одинаковыми (допустимая разница обычно не превосходит 1%).

Течение в камере предварительной закрутки моделируется в стационарной постановке, поэтому для учета взаимодействия ротора и статора используется приближенный подход, основанный на введении плоскости смешения.

5. Расчетная область. Часть газотур-



Рис. 2. Камера предварительной закрутки

бинного двигателя, включающая в себя камеру предварительной закрутки потока (сопло предварительной закрутки, приемные отверстия и каверна, ограниченная статором и ротором турбины высокого давления), показана на рис. 2. Конструкция турбины высокого давления содержит 38 сопел предварительной закрутки и 152 приемных отверстий. Угловая скорость вращения диска турбины высокого давления составляет 1139 1/с. Канал подвода газа к лопаткам ротора (bucket groove) изображается в упрощенном виде.

В расчетах используется трехмерная модель области, занятой жидкостью (рис. 3), представляющая собой 1/38 полной модели (сектор с углом 9.47°) и содержащая 1 сопло и 4 приемных отверстия. Взаимодействие подвижных и неподвижных компонентов учитывается при помощи поверхности смешения, расположенной немного выше по радиусу, чем выходное сечение сопла. Конфигурацию трехмерных деталей модели (сопло и приемные отверстия) поясняет рис. 4.

Геометрия камеры предварительной закрутки характеризуется внутренним и внешним радиусами (a = 215.90 мм, b = 296.45 мм, a/b = 0.7283). Каверна состоит из двух сегментов, разделенных внутренним лабиринтным уплотнением. Максимальная ширина нижнего сегмента расчетной области составляет 17.94 мм, а ее верхнего сегмента — 22.30 мм. Входное сечение сопла имеет круглую форму поперечного сечения в плане с радиусом 3.5 мм, а его выходное сечение — эллиптическую форму поперечного сечения. Для создания надлежащей закрутки потока сопло наклонено под углом  $\alpha = 65^{\circ}$  к оси вращения диска. Диаметр поперечного сечения приемного отверстия равняется 7 мм. Отношение длины приемного отверстия к его диаметру составляет 0.6208. Центр выходного сечения сопла располагается при r/b = 0.9216, а центр входного сечения приемного отверстия — при r/b = 0.9795.



Тангенциальная скорость газа на выходе из сопла составляет 300.70 м/с, а тангенциальная скорость ротора при значении радиальной координаты, соответствующей положению входного сечения приемного отверстия, равняется 311.29 м/с (относительная скорость закрутки составляет 0.966). Линейное число Рейнольдса, вычисленное по диаметру и скорости в выходном сечении сопла, равняется  $1.45 \times 10^6$ , а вращательное число Рейнольдса, вычисленное по диаметру и скорости во входном сечении приемных отверстий —  $2.27 \times 10^7$  (турбулентный режим течения).

**6. Основные уравнения.** В декартовой системе координат (*x*, *y*, *z*) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается уравнением

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = H.$$
(1)

Уравнение (1) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[ e - \frac{1}{2} \left( v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \omega^2 r^2 \right) \right].$$

Неинерциальность системы отсчета учитывается при помощи введения в источниковый член H кориолисовой и центробежной сил. Ниже представлены источниковый член H, вектор консервативных переменных Q и векторы потоков  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$ :

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \omega(y \,\omega + 2v_z) \\ \rho \omega(z \,\omega - 2v_y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_y \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p)v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p)v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p)v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\tau_{ij} = \mu_e \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Здесь t — время;  $\rho$  — плотность; r — радиус;  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z соответственно;  $\omega$  — угловая скорость вращения; p — давление; e — полная энергия единицы массы; T — температура;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей.

Уравнение (1) пригодно для описания как ламинарных, так и турбулентных течений. При моделировании турбулентных течений уравнение (1) дополняется уравнениями модели турбулентности. Эффективная вязкость  $\mu_e$  вычисляется как сумма молекулярной  $\mu$  и турбулентной  $\mu_t$  вязкости, а эффективная теплопроводность  $\lambda_e$  выражается через вязкость и число Прандтля:  $\mu_e = \mu + \mu_t$ ,  $\lambda_e = c_p \left(\frac{\mu}{\Pr} + \frac{\mu_t}{\Pr_t}\right)$ , где  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении. Молекулярному и турбулентному числам Прандтля присваиваются постоянные значения (для воздуха  $\Pr = 0.72$  и  $\Pr_t = 0.9$ ).

Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*}\right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0},$$

где  $\mu_* = 1.68 \times 10^{-5}$  кг/(м·c),  $T_* = 273$  К и  $S_0 = 110.5$  К для воздуха.

**7.** Модель турбулентности. В двухпараметрической  $k-\varepsilon$  модели турбулентности в дополнение к осредненным по Рейнольдсу уравнениям Навье–Стокса, записанным в виде (1), решаются уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации [20]:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \left(\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) k = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho \varepsilon; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \left(\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla\right) \varepsilon = \nabla \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} \left( c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \right). \tag{3}$$

Слагаемое *P* в правых частях уравнений (2) и (3) учитывает генерацию турбулентности. Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля  $\mu_t = \frac{c_\mu \rho k^2}{\varepsilon}$ . Постоянным модели присваиваются следующие значения:  $c_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_{\varepsilon} = 1.3$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2}^{\varepsilon} = 1.92$ .

Для расширения границ применимости  $k-\varepsilon$  модели вводится поправка Като–Лаундера [21] к слагаемому, описывающему порождение турбулентности, поправка на кривизну линий тока [22] и поправка на сжимаемость [23]. Учет влияния сил плавучести производится при помощи включения в уравнения (2) и (3) дополнительных слагаемых градиентного типа.

Член производства турбулентности находится из соотношения [21]:  $P = \mu_t |S|^{1/2} |\Omega|^{1/2}$ . Инварианты тензора скоростей деформаций и тензора вращения имеют вид  $|S| = (2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$ ,  $|\Omega| = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}$ , где  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ ,  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ .

Модификация  $k - \varepsilon$  модели для течений с кривизной линий тока заключается в коррекции полуэмпирических постоянных путем их умножения на функции, зависящие от турбулентного числа Ричардсона [22].

Для учета сжимаемости в уравнениях (2) и (3) скорость диссипации кинетической энергии турбулентности представляется в виде суммы соленоидальной и сжимаемой составляющих [23]. Сжимаемая составляющая выражается в виде  $\varepsilon_c = 0.3\varepsilon M_t^4$ , где  $M_t = \frac{1}{c}k^{1/2}$  — турбулентное число Маха, c — скорость звука.

8. Численный метод. Для дискретизации уравнений Навье–Стокса (1) и уравнений модели турбулентности (2) и (3) используется метод конечных объемов. Для дискретизации по времени применяется пятишаговый метод Рунге–Кутта, а для дискретизации по пространству — схема MUSCL (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) для невязких потоков и схема CDS (Central Difference Scheme) 2-го порядка для вязких потоков. Детали дискретизации приводятся в работе [24]. Для решения системы разностных уравнений используется многосеточный метод [25], для ускорения сходимости которого применяется обобщенный метод взвешенных невязок (Generalized Minimal Residual, GMRES).

Устойчивость вычислительной процедуры при моделировании низкоскоростных течений обеспечивается при помощи блочного метода предобусловливания Якоби (block-Jacobi preconditioning) и неявной двойной схемы интегрирования по времени (implicit dual time-stepping) [26]. Использование неявной схемы позволяет выбирать шаг интегрирования по времени из физических соображений, а не из соображений устойчивости разностной схемы.

9. Граничные условия. Модель имеет две входных (лабиринтное уплотнение в нижнем сегменте каверны, сопло предварительной закрутки) и три выходных границы (лабиринтное уплотнение в верхнем сегменте, кольцевой зазор с радиальным вытеканием рабочего тела, каналы подачи охлаждающего воздуха к лопаткам ротора). Характеристики потока на входных и выходных границах задаются в соответствии с данными сетевой модели [27]. Для расчета кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации на поверхности ротора и статора используется метод пристеночных функций. В окружном направлении задаются периодические граничные условия (условия повторения течения).

Во входном сечении сопла предварительной закрутки потока (граница 1) и входном сечении лабиринтного уплотнения в нижнем сегменте модели (граница 2) фиксируются массовый расход, полная температура и углы, определяющие направление потока. Кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации на обеих входных границах полагаются равными  $10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и  $10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>.

На границе 1 массовый расход полагается равными 10  $^{-}$  м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> и 10<sup>-2</sup> м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup>. На границе 1 массовый расход полагается равным  $\frac{5.718}{38} = 0.150474$  кг/с. Полная температура и избыточное давление равняются 899 К и 4.125 × 10<sup>6</sup> Па. Направление потока на входной границе характеризуется углами  $\frac{v_x}{v} = \cos \alpha, \frac{v_y}{v} = 0, \frac{v_z}{v} = -\sin \alpha,$  где  $\alpha = 65^{\circ}$  — угол между вектором скорости и осью x на границе 1 (угол наклона сопла).

На границе 2 массовый расход полагается равным  $\frac{0.911}{38} = 0.023974$  кг/с. Полная температура и избыточное давление равняются 924 К и  $3.559 \times 10^6$  Па. Направление потока на входной границе характеризуется углами  $\frac{v_x}{v} = \cos\beta, \frac{v_y}{v} = 0, \frac{v_z}{v} = -\sin\beta$ , где  $\beta = 64^\circ$  — угол между вектором скорости и осью x на границе 2.

В выходном сечении лабиринтного уплотнения в верхнем сегменте модели (граница 4) и выходном сечении кольцевого зазора (граница 5) фиксируются массовый расход и полная температура, а на границе 3 (канал подачи газа к лопаткам турбины) задается статическое давление. Статическое давление на границе 3 выбирается таким образом, чтобы через эту границу покидало приблизительно 76% рабочего тела от его общего расхода ( $p = 2.651 \times 10^6$  Па). Течение на выходе считается по нормали к границе. Массовый расход на границе 4 равняется  $\frac{0.734008}{38} = 0.019316$  кг/с, а полная температура и избыточное давление — 909 К и  $2.807 \times 10^6$  Па. Массовый расход на границе 5 равняется  $\frac{0.350}{38} = 0.009210$  кг/с, а полная температура и избыточное давление — 926 К и  $2.696 \times 10^6$  Па.

10. Сетка. В области, занятой жидко-

стью, блочно-структурированная сетка содержит 2778455 узлов и 2661415 ячеек и разделяется на два сегмента плоскостью смешения, параллельной оси вращения и расположенной выше сопла предварительной закрутки. Нижний и верхний сегменты содержат по 1037012 и 1624403 ячеек соответственно. Некоторые детали сетки в меридиональном сечении расчетной области, проходящем через приемное отверстие, показаны на рис. 5.

Поверхности ротора и статора содержат по 80 479 и 39 470 граней, а поверхности сопла предварительной закрутки и приемных отверстий — по 2304 и 4304 граней (в модель включается 1 сопло и 4 приемных отверстия). На входных границах каверны размещается 312 (лабиринтное уплотнение в нижнем сегменте) и 864 (входное сечение сопла) граней. Границы, через которые газ



Рис. 5. Детали сетки, соответствующие лабиринтному уплотнению между нижним и верхним сегментами модели (а) и приемному отверстию (б)

покидает расчетную область, содержат 762 (лабиринтное уплотнение в верхнем сегменте) и 1456 (выходные сечения каналов для подачи охлаждающего воздуха к лопаткам ротора) граней. Периодические границы модели содержат по 30072 граней.

Для условий работы турбины, характеризуемых максимальной угловой скоростью вращения ротора, универсальная пристеночная координата изменяется от 20 до 500 на поверхности ротора и от 12 до 450 на поверхности статора. Координата  $y^+$  имеет практически равномерное распределение на поверхности ротора в нижнем сегменте модели ( $y^+ \sim 80$ ) и почти равномерное распределение в ее верхнем сегменте  $(y^+ \sim 100)$ , увеличиваясь до  $y^+ \sim 130$  вблизи выходного сечения каверны, сформированного лабиринтным уплотнением. На боковой поверхности приемного отверстия  $y^+ \sim 180$ . На поверхности статора  $y^+ \sim 90$ , за исключением участка поверхности, примыкающего к верхнему лабиринтному уплотнению, где универсальная пристеночная координата увеличивается до 160. Максимальные значения координаты  $y^+$ достигаются на боковых стенках каналов, служащих для подачи охлаждающего воздуха к лопаткам ротора, и боковой поверхности сопла. Применение грубой сетки в этих областях (координата  $y^+$  находится за пределами диапазона, допустимого для использования метода пристеночных функций) обусловливается тем, что основное внимание уделяется структуре течения в каверне.

11. Результаты расчетов. Струя газа, вытекающая из сопла предварительной закрутки, расширяется в каверне, образованной зазором между ротором и статором. Скорость струи, максимум которой имеет место в выходном сечении сопла, уменьшается по мере проникновения струи в каверну, а ее направление изменяется вследствие смешения струи с течением, индуцированным вращением диска. Области течения с низким уровнем тангенциальной скорости располагаются между выходными сечениями сопел закрутки.

В зависимости от ширины зазора между ротором и статором процесс смешения либо полностью завершается в каверне (случай 1), либо происходит взаимодействие струйного потока с пограничным слоем на вращающемся диске (случай 2). В случае 1 на входе в приемное отверстие формируется течение с приблизительно равномерным профилем скорости. В случае 2 некоторая часть струйного потока входит в приемные отверстия напрямую, а другая часть соударяется с противоположной стенкой каверны в промежутке между соседними приемными отверстиями и растекается по радиусу, взаимодействуя с пограничным слоем на роторе. Скорость вращения приемных отверстий превышает скорость вращения невязкого ядра, формирующегося в каверне, поэтому струя входит в приемные отверстия под острым углом, что приводит к отрыву потока вблизи передней кромки отверстия и созданию рециркуляционной зоны внутри него.

Структура течения и размер рециркуляционной зоны в приемном отверстии зависят от относительной скорости закрутки потока на выходе из сопла, определяемой разностью давлений в его входном и выходном сечениях и угловой скоростью вращения ротора. Малые отношения давлений (порядка 1.5) и скорости вращения ротора приводят к формированию рециркуляционных зон большого размера вследствие высоких относительных скоростей закрутки. При увеличении скорости вращения ротора относительная скорость закрутки уменьшается, приводя к сокращению размера рециркуляционной зоны внутри приемного отверстия. Дальнейшее увеличение скорости вращения приводит к полному исчезновению отрывной зоны.

Линии тока течения жидкости в плоскости, проходящей через прием-



сечений

ное отверстие, показаны на рис. 6. В нижнем сегменте модели рециркуляционная зона занимает практически весь объем каверны. Вторичный вихрь в нижнем сегменте формируется вблизи входного сечения. Структура течения в верхнем сегменте каверны является более сложной и содержит ряд вихревых структур различной интенсивности, находящихся вблизи внутреннего лабиринтного уплотнения каверны и ее выходного сечения.

Контрольные сечения, соответствующие различным значениям радиальной координаты, показаны на рис. 7 (в этих сечениях контролируются распределения скорости и давления).



Рис. 8. Распределения относительной тангенциальной скорости при 1) r = 221; 2) 234;3) 240; 4) 247; 5) 262; 6) 266; 7) 278; 8) 284 мм



Рис. 9. Распределения радиальной скорости при 1) <br/> r=221; 2) 234; 3) 240; 4) 247; 5) 262; 6) 266; 7) 278; 8) 284 мм

В нижней части каверны (ниже выходного сечения сопла) статическое давление является практически постоянным, а скорость потока равняется нулю (за исключением нижней входной границы, сформированной лабиринтным уплотнением). Течение в верхней части каверны характеризуется слабым радиальным градиентом давления. Градиент давления в окружном направлении отсутствует.

Уровень статического давления в каверне ненамного превосходит его уровень в выходном сечении приемного отверстия. Для уменьшения потерь суммарная площадь выходных сечений приемных отверстий делается намного большей, чем суммарная площадь выходных сечений сопел предварительной закрутки.



Рис. 10. Зависимость степени повышения температуры (a) и параметра эффективности (б) от относительной скорости закрутки потока во входном сечении сопла



Рис. 11. Зависимость момента ротора (а) и статора (б) от относительной скорости закрутки потока во входном сечении сопла

Поток, входящий в каверну через нижнее лабиринтное уплотнение и сопло предварительной закрутки, пересекает зазор, сформированный неподвижным и подвижным компонентами системы, и получает закрутку в направлении вращения ротора. Взаимодействие потока, поступающего в каверну через нижнее лабиринтное уплотнение, с потоком из сопла приводит к уменьшению скорости вращения невязкого ядра.

Распределения относительной тангенциальной скорости в контрольных сечениях приводятся на рис. 8 (0 соответствует отсутствию вращения жидкости, а 1 — вращению жидкости с угловой скоростью вращения ротора), а распределения радиальной скорости — на рис. 9. В нижнем сегменте каверны (рис. 8а) течение имеет структуру, соответствующую классическим вращающимся системам [1, 2]. В верхнем сегменте модели (рис. 8б) взаимодействие течения в каверне с потоком газа, поступающим из сопла, приводит к отклонению распределений тангенциальной скорости от распределений, соответствующих вынужденным вихревым течениям. Имеет место существенное уменьшение температуры ротора в верхнем сегменте каверны. Температура вблизи внутреннего и верхнего лабиринтных уплотнений увеличивается приблизительно на 65 K по сравнению с температурой газа, поступающего из сопла в каверну.

Влияние относительной скорости закрутки потока на степень повышения температуры и параметр эффективности камеры предварительной закрутки показывает рис. 10. Сплошная линия соответствует идеальной зависимости, символы □ — результатам расчетов, символы о — данным физического эксперимента [7], символы • и ■ — экспериментальным и расчетным данным [9]. Результаты расчетов имеют удовлетворительное согласование с данными [7]. Отличия от расчетных и экспериментальных данных, приведенных в работе [9], объясняются различиями в геометрических моделях и входных условиях задачи.

Моменты ротора и статора зависят от относительной скорости закрутки (рис. 11). Символы ∘ соответствуют результатам расчетов, символы • — расчетным данным [9], символы □ — расчетным данным [7], полученным на основе упрощенной геометрической модели. Имеется удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных, полученных при использовании различных моделей и подходов.

12. Заключение. Разработанные математические модели и численные методы реализованы в виде программного комплекса, который является инструментом расчета внутренних турбулентных течений и теплообмена в межлопаточных каналах и вращающихся кавернах газовых турбин, и допускают включение в состав систем автоматизированного проектирования. Полученные результаты имеют значение для повышения эффективности газотурбинных двигателей и их компонентов, а также последующего расчета напряженно-деформированного состояния и прочностного анализа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Owen J.M., Rogers R.H. Flow and heat transfer in rotating disc systems rotor-stator systems. Taunton: Research Studies Press, 1989.
- 2. Owen J.M., Rogers R.H. Flow and heat transfer in rotating disc systems rotating cavities. Taunton: Research Studies Press, 1995.
- 3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. Москва: Физматлит, 2010.
- Karabay H., Wilson M., Owen J.M. Predictions of effect of swirl on flow and heat transfer in a rotating cavity // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2001. 22, N 2. 143–155.
- 5. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen M. Effect of radial location of nozzles on performance of pre-swirl systems // ASME Paper. 2008. N GT2008-50295.
- Chew J.W., Hills N.J., Khalatov S., Scanlon T., Turner A.B. Measurement and analysis of flow in a pre-swirled cooling air delivery system // ASME Paper. 2003. N GT2003-38084.
- Peng Z., New P., Long C.A., Childs P.R.N. An experimental investigation of a high radius pre-swirl cooling system // Proc. of the 8th Int. Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows. July 2007. Lyon, 2003. N ISAIF8-004.
- Yan Y., Farzaneh-Gord M., Lock G.D., Wilson M., Owen J.M. Fluid dynamics of a pre-swirl rotor-stator system // J. of Turbomachinery. 2003. 125, N 4. 641–647.
- 9. Geis T., Dittmann M., Dullenkopf K. Cooling air temperature reduction in a direct transfer pre-swirl system // ASME Paper. 2003. N GT2003-38231.
- 10. Wilson M., Pilbrow R., Owen J.M. Flow and heat transfer in a pre-swirl rotor-stator system // J. of Turbomachinery. 1997. 119, N 3. 364–373.
- 11. Dittman M., Geis T., Schramm V., Kim S., Wittig S. Discharge coefficients of a pre-swirl system in secondary air systems // ASME Paper. 2001. N 2001-GT-0122.
- Pilbrow R., Karabay H., Wilson M., Owen J.M. Heat transfer in a cover-plate pre-swirl rotating-disc system // J. of Turbomachinery. 1999. 121, N 2. 249–256.
- 13. Lewis P., Wilson M., Lock G., Owen J.M. Physical interpretation of flow and heat transfer in pre-swirl systems // ASME Paper. 2006. N GT-2006-90132.
- 14. Benra F.-K., Dohmen H.J., Schneider O. Application of an enhanced 1D network model to calculate the flow properties of a pre-swirl secondary air system // ASME Paper. 2008. N GT2008-50442.
- El-Oun Z.B., Owen J.M. Pre-swirl blade-cooling effectiveness in an adiabatic rotor-stator system // J. of Turbomachinery. 1989. 111. 522–529.
- 16. Chew J. W., Ciampoli F., Hills N.J., Scanlon T. Pre-swirled cooling air delivery system performance // ASME Paper. 2005. N GT2005-68323.
- 17. Ciampoli F., Chew J.W., Shahpar S., Willoc E. Automatic optimization of pre-swirl nozzle design // ASME Paper. 2006. N GT2006-90249.
- Ciampoli F., Hills N.J., Chew J.W., Scanlon T. Unsteady numerical simulation of the flow in a direct transfer pre-swirl system // ASME Paper. 2008. N GT2008-51198.

- Snowsill G.D., Young C. Application of CFD to assess the performance of a novel pre-swirl configuration // ASME Paper. 2008. N GT2008-50684.
- 20. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. 3, N 2. 269–289.
- 21. Kato M., Launder B.E. The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders // Proc. of the 9th Symposium on Turbulent Shear Flows. 16–18 August 1993. Kyoto, 1993. 9. 10.4.1–10.4.6.
- 22. Leschziner M.A., Rodi W. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulent-model variations // J. of Fluids Engineering. 1981. 103. 353–360.
- Guezengar D., Francescatto J., Guillard H., Dussauge J.-P. Variations on a k-ε turbulence model for supersonic boundary layer computations // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 1999. 18, N 4. 713–738.
- 24. Волков К.Н. Дискретизация уравнений Навье–Стокса на неструктурированной сетке при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. **48**, № 7. 1250–1273.
- 25. Волков К.Н. Многосеточные технологии для решения задач газовой динамики на неструктурированных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. **50**, № 11. 1938–1952.
- 26. Волков К.Н. Блочное предобусловливание уравнений Эйлера и Навье–Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2009. **49**, № 10. 1868–1884.
- 27. Hallworth E. Trent 900 air system data transfer report. Entry into service standard // Rolls–Royce Technical Report. 2005. N FSG48011.

Поступила в редакцию 06.06.2011