

УДК 519.6

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОД НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАННОГО SPH-TVD ПОДХОДА

С. С. Храпов¹, А. В. Хоперсков¹, Н. М. Кузьмин¹, А. В. Писарев¹, И. А. Кобелев¹

Разработан новый численный алгоритм расчета динамики поверхностных вод, позволяющий проводить устойчивый сквозной счет на нерегулярном и/или разрывном рельефе дна для нестационарных границ “вода–сухое дно”. Метод основан на совместном использовании модифицированных SPH- и TVD-подходов для решения уравнений мелкой воды. Проведено тестирование на большом числе классических задач. Полученные результаты свидетельствуют о том, что разработанная численная схема cSPH-TVD консервативна, хорошо сбалансирована, имеет второй порядок точности для гладких решений и первый порядок точности в области разрывов и изломов профилей.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, численная схема, SPH, TVD, нерегулярный рельеф дна.

1. Введение. Постановка задачи. Уравнения мелкой воды [1] широко применяются для решения задач динамики поверхностных вод. Предложены их различные модификации, связанные с учетом адвективного переноса [2] и с многослойными моделями [3], а также с обобщениями без приближения гидростатического равновесия, допускающими эффективную численную реализацию [4, 5].

С формальной точки зрения при переходе от полной трехмерной системы уравнений гидродинамики к уравнениям мелкой воды следует ограничиться достаточно длинноволновыми движениями в отсутствие эффектов дисперсии. Однако боры и гидравлические прыжки иногда достаточно хорошо описываются условиями на разрыве, вытекающими из модели мелкой воды, что отмечалось еще в [6]. На достаточно приемлемое согласие указывает сравнительный анализ с прямыми результатами моделирования [7], а также сравнение с результатами натурных экспериментов [8].

Наибольшее развитие получили гидродинамические модели для описания различных физических процессов как в отдельных областях морей и океанов, так и для всего водоема в целом [3, 9, 10]. В рамках таких крупномасштабных моделей изучаются различного рода глобальные циркуляции [9], изменчивость уровня, динамика солености [11] и ледяных заторов [12], волновые движения [13], цунами [14], аварийные ситуации [15]. Близкими являются задачи определения структуры течений в водохранилищах и равнинных реках для различных прикладных исследований [13, 16].

Выделим успешные попытки построения моделей озера Нойзидлер (Австрия) [17], водоемов некоторых прибрежных районов северо-западной Атлантики [18] и островов в районе Большого барьерного рифа с использованием неструктурированных сеток [19], а также Азовского моря [20]. Однако подчеркнем, что задание границы острова на основе неструктурированной сетки сразу теряет эффективность в случае описания затопления суши. При решении задачи динамики поверхностных вод по сухому дну (описание затопления территории [21]) возникают проблемы корректного моделирования границы “вода–сухое дно” [22, 23].

Использование уравнений Сен-Венана не ограничивается описанием только тонкого слоя несжимаемой жидкости на твердой поверхности. С большим успехом модель мелкой воды применяется для изучения динамики вихревых структур в атмосферах планет (например, Юпитера) [24], движения в вязко-эластичной трубке, волновых процессов и ауторегуляции при течении крови в сосудах [25], аккреционных астрофизических дисков в приближении гидростатического равновесия [26], включая динамику системы нестационарных ударных волн [27]. Уравнения мелкой воды лежат в основе ряда моделей при моделировании адвекции и диффузии загрязняющих веществ на мелководье [28, 29]. В рамках модели мелкой воды рассматриваются многофазные течения [30] и вращающиеся жидкости [31]. Популярными остаются модели динамики тайфунов [32].

¹ Волгоградский государственный университет, факультет математики и информационных технологий, пр. Университетский, 100, 400062, Волгоград; С. С. Храпов, доцент, e-mail: xss-ip@mail.ru; А. В. Хоперсков, профессор, e-mail: khoperskov@gmail.com; Н. М. Кузьмин, доцент, e-mail: nkuzmin@list.ru; А. В. Писарев, аспирант, e-mail: andrew_pisarev@mail.ru; И. А. Кобелев, магистрант, e-mail: ia-kobelev@yandex.ru

Отметим также, что уравнения мелкой воды являются удобной и распространенной моделью для тестирования и апробации численных схем перед рассмотрением системы полных газодинамических уравнений.

Численные схемы. К настоящему времени разработаны эффективные численные схемы для решения упрощенных гидродинамических уравнений типа Сен-Венана [33, 34], причем наиболее распространены сеточные методы численного интегрирования. Отметим подходы, основанные на применении дробных шагов, метода конечных элементов [1, 35], неконсервативного метода характеристик (МОС) [36] с использованием радиальных базисных функций (метод CSRBFs) [37], метода конечных объемов [32, 38] и хорошо сбалансированных схем [22]. Моделирование динамики фронта раздела между слоем воды и сухим дном по сложному рельефу предъявляет, по-видимому, наиболее сильные требования к численной схеме [39].

При обтекании тел и наличии границ используют специальные структурированные и неструктурированные сетки [40], однако в случае сложного нерегулярного рельефа такой подход оказывается малоэффективным. Только дополнительное применение особых численных алгоритмов приводит к успеху моделирования на нерегулярном рельефе [32] в случае отсутствия сухого дна.

Отметим направление, связанное с лагранжевым подходом в форме NEM (Natural Element Method), основанное на интерполяции функций (метод Галеркина) [41], а также лагранжево-эйлеров метод конечных элементов для моделирования течения при наличии движущихся границ [42]. Методы интерполяционных профилей, различающиеся способами построения интерполяционной функции, в ряде случаев оказываются эффективными; в этой связи отметим алгоритм CIP-CSL (Constrained Interpolation Profile/Conservative Semi-Lagrangian) [43].

Метод SPH (Smooth Particle Hydrodynamics, [44]) в гидродинамике получил особое развитие для моделирования астрофизического газа, поскольку наличие многосвязных областей раздела “газ-вакуум” (очень больших перепадов плотности) является типичным для межзвездной и межгалактической среды [45–47]. Метод SPH используется и для решения уравнений мелкой воды. Одним из вариантов является GPH-метод (Godunov-type Particle Hydrodynamics), отличающийся использованием решения задачи Римана. Важной явилась работа [48], в которой SPH-подход был применен для свободной поверхности несжимаемой жидкости. Авторы работы [49] модифицировали метод SPH для модели мелкой воды также с учетом решения задачи Римана. Положительные свойства различных численных схем проявляются в зависимости от значений чисел Фруда и Рейнольдса, коэффициента Шези, наличия и типа граничных условий.

Особые требования к численным моделям предъявляют задачи, связанные с гидродинамикой существенно нестационарных поверхностных вод (паводковые воды, разливы рек, различного рода затопления), поскольку требуют детального учета рельефа как на мелких масштабах (сотни километров), так и на крупных масштабах с разрешением существенно лучше километра (для практических приложений до ~ 20 м с учетом разрешения рельефа местности по данным дистанционного зондирования). В такого рода расчетах возникает необходимость корректного описания динамики многочисленных фронтов раздела между жидкостью и сухим дном на сложном нерегулярном рельефе.

На рис. 1 представлен характерный пример профиля поверхности суши по данным дистанционного зондирования Земли SRTM 3. Его особенностью является сильно немонотонный изрезанный (нерегулярный) вид рельефа в случае размера ячейки 50 м. Расчеты динамики поверхностных вод на реалистичном (нерегулярном) рельефе местности (рис. 1) с использованием численных алгоритмов DGM (Depth Gradient Method) и SGM (Surface Gradient Method) показали, что эти методы неприменимы в областях течения, содержащих разрывы и резкие перепады уровней рельефа [15, 21, 50]. Примеры таких течений — водопады и сложные движения жидкости в криволинейных каналах с вертикальными боковыми стенками при их переполнении. В этих случаях, т.е. в окрестностях особенностей рельефа дна, может происхо-

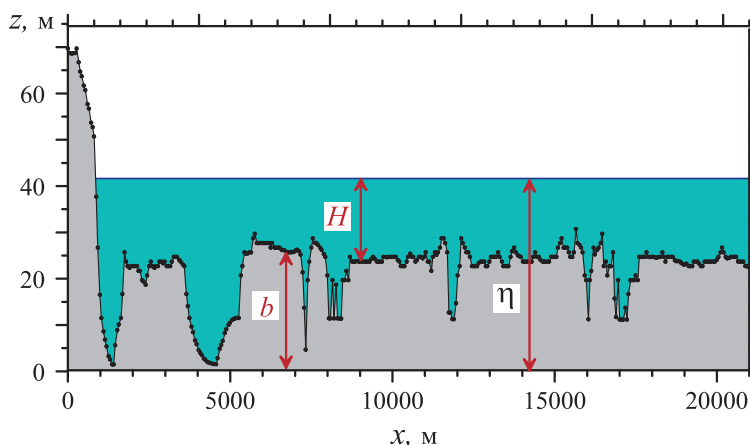


Рис. 1. Срез рельефа земной поверхности в области Волго-Ахтубинской поймы. Точки — значения высоты рельефа b в узлах ячеек

доть неконтролируемый рост скорости течения жидкости в ячейках с очень малой глубиной (например, при обмелении), появление существенных осцилляций в численном решении, а также может нарушаться позитивность либо консервативность метода. Это обусловлено тем, что рассматриваемые методы были разработаны в предположении непрерывного и гладкого рельефа дна.

Устранить перечисленные выше проблемы, возникающие при моделировании динамики поверхностных вод на реалистичном (нерегулярном) рельефе местности, можно следующими способами.

1. Провести сглаживание рельефа посредством усреднения или аппроксимации высот в окрестности разрывов и резких перепадов уровней, однако при этом могут исчезнуть характерные для данной местности мелкомасштабные особенности рельефа, оказывающие существенное влияние на течение воды. Сглаживание профиля требует использования более подробных и/или неструктурированных сеток, что приводит к усложнению алгоритма и сильному увеличению вычислительных затрат.

2. Решать обобщенную задачу Римана [23], лежащую в основе численных схем годовновского типа, на случай рельефа, содержащего разрывы и резкие перепады уровней. При этом существенно усложнятся расчетные формулы численного алгоритма, что скажется на увеличении вычислительных затрат.

3. Использовать комбинированный лагранжево-эйлеров метод на структурированной сетке. Использование на внутреннем этапе расчета SPH-подхода обеспечит устойчивый сквозной счет на разрывном рельефе для нестационарной границы “вода–сухое дно”, сохранив приемлемый уровень требуемых вычислительных ресурсов. В настоящей работе реализован такой подход.

Для эффективного решения описанных выше задач построена численная схема, обладающая следующими свойствами: консервативность; хорошая сбалансированность (well-balanced); второй порядок аппроксимации по временной и пространственным координатам; сквозной устойчивый расчет динамической границы “жидкость–сухое дно” при наличии неструктурированных мелкомасштабных неоднородностей у функции, описывающей строение дна. Построенную численную схему будем называть cSPH-TVD (combined SPH-TVD), где TVD означает Total Variation Diminishing.

Тестирование гидродинамического кода проведено посредством последовательного сравнения численной модели с аналитическими решениями и результатами моделирований, опубликованными другими авторами с использованием различных численных методов. Перечислим основные тестовые задачи: распад произвольного разрыва глубины и/или скорости течения (в случае наклонного дна задача может быть сведена к случаю плоского дна [51]); распад столба жидкости на сухом дне; распространение малых возмущений поверхностных гравитационных волн при наличии неоднородного дна; исследование процесса длительного распространения солитона, позволяющее оценить дисперсионные свойства численной схемы; расчет гидравлического прыжка; расчет стационарных и нестационарных течений на существенно неоднородном рельефе дна, включая разрывные профили; накат волн типа цунами на пологий берег; колебания уровня жидкости на параболическом дне; течение типа водопада; распад циркуляционной дамбы на нерегулярном рельефе.

2. Математическая модель и численная схема. Будем исходить из интегральных законов сохранения для однородной несжимаемой жидкости, ограничившись рассмотрением законов сохранения массы и импульса “жидких частиц” с плотностью $\rho = \text{const}$ и объемом $V(t)$, деформирующихся в процессе движения произвольным образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = Q, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{u} dV = - \int_{V(t)} \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) dV + \int_{V(t)} \mathbf{f} dV, \quad (2)$$

где $\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, p — изотропное давление, $\mathbf{f}$ — плотность внешних объемных сил, $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — скорость “жидких частиц”, $Q = Q(\mathbf{r}, t)$ — функция источников и стоков жидкости [м³/с].

I. Уравнения мелкой воды в интегральной форме. Представим уравнение (1) в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} dS \int_0^H dz = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} H dS = Q, \quad (3)$$

где $S(t)$ — площадь поперечного сечения “жидкой частицы” в плоскости (x, y) и $H = H(x, y, t)$ — расстояние от дна $z = b(x, y)$ до возмущенной поверхности жидкости $\eta(x, y, t) = b(x, y) + H(x, y, t)$. Аналогично для уравнения (2) при условии гидростатического равновесия в вертикальном направлении $p =$

$\rho g(\eta - z) + p_a$ и $\langle u_z \rangle_z \equiv \frac{1}{H} \int_0^H u_z dz = 0$ (p_a — атмосферное давление, $g = -f_z$ — ускорение свободного падения) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} HU dS = -g \int_{S(t)} H \nabla_{\perp} \eta dS + \int_{S(t)} H \mathbf{F} dS. \quad (4)$$

Здесь $\nabla_{\perp} \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$, $\mathbf{U} = (U_x, U_y) = \langle \mathbf{u}_{\perp} \rangle_z$ и $\mathbf{F} = (F_x, F_y) = \langle \mathbf{f}_{\perp} \rangle_z$ — средние по z -координате значения скорости и плотности объемных сил в плоскости (x, y) соответственно.

II. *Уравнения теории мелкой воды в дифференциальной форме.* Применим к уравнениям (3) и (4) правило дифференцирования по времени интегралов от произвольной тензорной функции $\varphi = \varphi(t, x, y)$: $\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi dS = \int_{S(t)} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla_{\perp}(\varphi \mathbf{U}) \right] dS$. В результате получим уравнения движения мелкой воды в дифференциальной форме (уравнения Сен-Венана):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla_{\perp}(H \mathbf{U}) = \sigma, \quad (5)$$

$$\frac{\partial(H \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla_{\perp}(H \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -g H \nabla_{\perp} \eta + H \mathbf{F}, \quad (6)$$

где $\sigma = Q/h^2$ — мощность поверхностных источников [м/с]. Суммарная плотность сил, действующих на жидкость, в рамках теории мелкой воды представима в виде суперпозиции сил Кориолиса, придонного трения, вязкости и ветра:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{cor}} + \mathbf{F}_{\text{diss}} + \mathbf{F}_{\nu} + \mathbf{F}_{\text{wind}}.$$

2.1. Комбинированный SPH-TVD метод для уравнений мелкой воды. Воспользуемся стандартными процедурами дискретизации сплошной среды, применяемыми в численных схемах, основанных на эйлеровом и лагранжевом подходах. Покроем расчетную область равномерной эйлеровой (неподвижной) сеткой с пространственным шагом h (по x и y) и поместим в центры эйлеровых ячеек лагранжевы (подвижные) “жидкие” частицы. Введем временные слои t_n с неравномерным шагом τ_n . Таким образом, после дискретизации любую величину, входящую в исходные гидродинамические уравнения, можно представить в виде $A(\mathbf{r}, t) \rightarrow A(\mathbf{r}_i, t_n) \equiv A_i^n$, где $\mathbf{i} = (i, j)$ — векторный пространственный индекс, n — индекс временного слоя. Радиус-векторы неподвижных центров эйлеровых ячеек обозначим через $\mathbf{r}_i^0 = (x_i^0, y_j^0)$. Число ячеек и частиц равно $N_p = N_x N_y$.

Лагранжевы “жидкие” частицы характеризуются объемом $V_i^n = \int_{S_i^n} H dS$, импульсом $\mathbf{P}_i^n = \int_{S_i^n} H \mathbf{U} dS$

и положением в пространстве $\mathbf{r}_i^n$, а также радиусом сглаживания h .

Определим основные этапы комбинированного алгоритма cSPH-TVD (рис. 2).

1. На первом этапе определяем изменение интегральных характеристик ($V_i^n, \mathbf{P}_i^n$) и положений ($\mathbf{r}_i^n$) “жидких” частиц, находящихся в начальный момент времени в центрах эйлеровых ячеек, обусловленное действием на них гидродинамических и внешних сил (придонное трение и др.). На данном этапе применяется модифицированный нами SPH-подход.

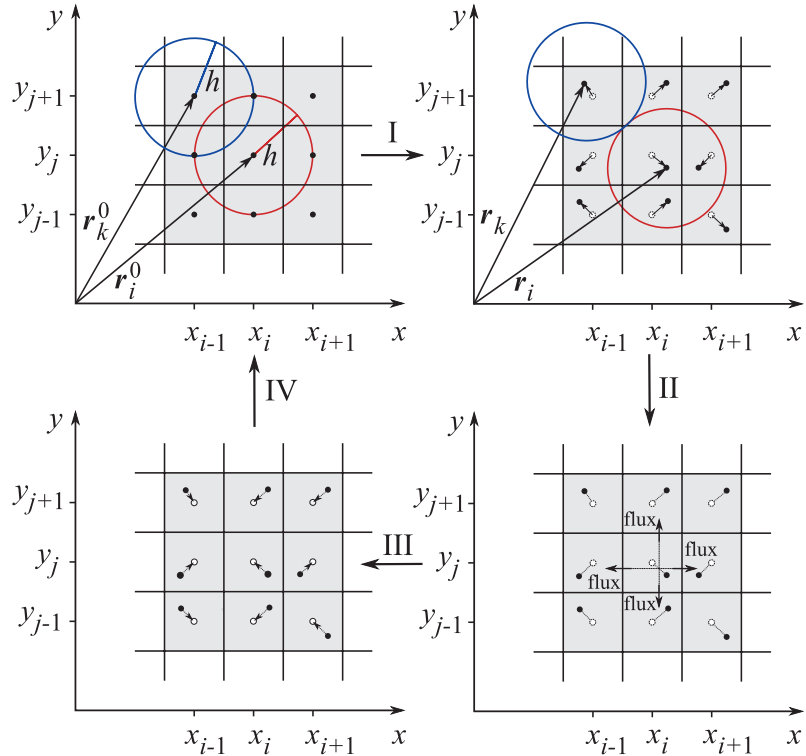


Рис. 2. Схема основных этапов метода cSPH-TVD
($\mathbf{i} = (i, j)$, $\mathbf{k} = (k, \ell)$)

2. На втором этапе вычисляем потоки массы и импульса через границы эйлеровых ячеек на временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ относительно положений частиц в этот же момент времени. На данном этапе используется модифицированный TVD-подход и решение задачи Римана.

3. На третьем этапе определяем изменение интегральных характеристик “жидких” частиц, обусловленное их потоками через границы эйлеровых ячеек.

4. Наконец, помещаем эти частицы в исходное положение — в центры ячеек.

Подробно опишем алгоритмы вычислений на каждом из этапов.

1) *Лагранжесв этап — SPH-подход*. Будем исходить из интегральных уравнений движения мелкой воды (3) и (4). Записывая эти уравнения для i -й ячейки, которая содержит i -ю жидкую частицу с площадью поперечного сечения S_i , и вводя средние значения величин $\varphi = (H, HU)$ внутри ячейки по формуле $\langle \varphi \rangle_i = \frac{1}{h^2} \int_{S_i(t)} \varphi dS$, получим

$$\frac{d\langle H \rangle_i}{dt} = \frac{Q_i}{h^2}, \quad (7)$$

$$\frac{d\langle HU \rangle_i}{dt} = -g\langle H \rangle_i \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \Big|_i + \langle H \rangle_i \mathbf{F}_i, \quad (8)$$

где $\langle H \rangle_i = \frac{V_i(t)}{h^2}$ и $\langle HU \rangle_i = \frac{\mathbf{P}_i(t)}{h^2}$. Для радиус-вектора i -й частицы имеем следующее уравнение:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\langle HU \rangle_i}{\langle H \rangle_i}. \quad (9)$$

В соответствии с SPH-методом [44], любую характеристику среды $A(\mathbf{r}, t)$ и ее производные $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} A(\mathbf{r}, t)$ в нашем плоском случае можно заменить следующими сглаженными значениями:

$$A(\mathbf{r}, t) = \int_{S(t)} A(\mathbf{r}', t) W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) dS', \quad \frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \int_{S(t)} A(\mathbf{r}', t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, h) dS', \quad (10)$$

где W — функция ядра интегрального преобразования (10), h — носитель функции W , или сглаживающая длина. Для конечного числа частиц $N_p = N_x N_y$ интегрирование в (10) можно заменить суммированием:

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}=1}^{N_p} B(\mathbf{r}_{\mathbf{k}}, t) W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{k}}|, h), \quad \frac{\partial A(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{N_p} B(\mathbf{r}_{\mathbf{k}}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{k}}|, h), \quad (11)$$

где

$$B(\mathbf{r}_{\mathbf{k}}, t) = \int_{S_{\mathbf{k}}(t)} A(\mathbf{r}', t) dS'. \quad (12)$$

Ядро W , сглаживающее локальные флуктуации и удовлетворяющее условию нормировки $2\pi \int_0^\infty s W(s) ds = 1$,

$s = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\mathbf{k}}|}{h}$, было выбрано в виде кубического сплайна Монагана [48].

С учетом соотношений (11) выражение для $\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \Big|_i$, входящее в уравнение (8), примет вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \Big|_i = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \langle H \rangle_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \widehat{W}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\mathbf{k}}|) + \langle b \rangle_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \widehat{W}(|\mathbf{r}_i^0 - \mathbf{r}_{\mathbf{k}}^0|) \right\}, \quad (13)$$

где $\widehat{W} = h^2 W$. Будем полагать, что i -частица взаимодействует только с частицами, находящимися в соседних ячейках. Тогда суммирование по векторному индексу $\mathbf{k} = (k, \ell)$ в соотношении (13) ведется в пределах от $i - 1$ до $i + 1$, т.е. $i - 1 \leq k \leq i + 1$, $j - 1 \leq \ell \leq j + 1$.

Аппроксимация гидродинамической силы в уравнении (8) по формуле (13) обеспечивает консервативность данного метода на лагранжевом этапе, а также выполнение условия равновесия $\frac{dHU}{dt} = 0$ в двух

случаях: 1) $\eta = \text{const}$, $\mathbf{U} = 0$, $b \neq \text{const}$; 2) $\eta = \text{const}$, $\mathbf{U} \neq 0$, $b = \text{const}$. Используемая здесь модификация SPH-алгоритма заключается в обобщении выражения для $B(\mathbf{r}_k, t)$ в формулах (11). Обычно в формулах типа (11) вместо (12) применяется выражение $B(\mathbf{r}_k, t) = \frac{V_k}{H(\mathbf{r}_k, t)} A(\mathbf{r}_k, t)$.

При вычислении гидродинамических сил, действующих на частицы, в окрестности вертикальных стенок или разрывов рельефа (течения типа “водопад”), необходимо корректно производить расчет по формуле (13) посредством введения “виртуальных” частиц ($\mathbf{k}$ -частицы в сумме), чтобы избежать описанных в разделе 1 проблем, связанных с описанием динамики границы “вода–сухое дно” (рис. 3). Как видно из этого рисунка при расчете сил на разрывах рельефа для i -й ячейки в правой части формулы (13) вместо частиц с η_k вводим “виртуальные” частицы с $\hat{\eta}_k$, для которых в случае кусочно-постоянных функций b и η выполняется

$$\hat{\eta}_k = \begin{cases} \eta_i, & \eta_i < b_k; \\ b_i, & \eta_k < b_i; \\ \eta_k, & \text{else.} \end{cases}$$

Аналогично можно записать правило и для кусочно-линейных функций b и η .

Таким образом, применение SPH-подхода к векторному уравнению (8) позволяет представить пространственные производные величины η в виде конечных сумм, которые содержат аналитически вычисляемые производные от сглаживающего ядра W . Тем самым исходное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Аппроксимация гидродинамических сил $\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}}$ сглаживающим ядром W имеет второй порядок точности по пространственным координатам.

Для численного интегрирования системы уравнений (7)–(9) с учетом соотношения (13) можно применить схему “предиктор–корректор”, имеющую второй порядок точности по времени.

Предиктор. Вычисляем значения $\langle H \rangle_i$, $\langle HU \rangle_i$ и $\mathbf{r}_i$ в момент времени $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$:

$$\langle H \rangle_i^{n+1/2} = \langle H \rangle_i^n + \frac{\tau_n}{2} \frac{Q_i^n}{h^2}, \quad (14)$$

$$\langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1/2} = \langle HU \rangle_i^n - \frac{\tau_n}{2} g \langle H \rangle_i^n \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \Big|_i^n, \quad (15)$$

$$\langle HU \rangle_i^{n+1/2} = \langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1/2} + \frac{\tau_n}{2} \mathbf{F} \left(\langle \widehat{H} \rangle_i, \langle \widehat{HU} \rangle_i \right), \quad (16)$$

где $\langle \widehat{H} \rangle_i = \frac{\langle H \rangle_i^n + \langle H \rangle_i^{n+1/2}}{2}$, $\langle \widehat{HU} \rangle_i = \frac{\langle HU \rangle_i^n + \langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1/2}}{2}$. Представленный в формулах (15) и (16) алгоритм расчета $\langle HU \rangle$ позволяет избежать существенного уменьшения шага по времени в случае, когда $\tau_H \gg \tau_F$, где $\tau_H = \min \left(\frac{h}{|\mathbf{U}| + \sqrt{gH}}, \sqrt{\frac{h}{gH|\partial \eta / \partial \mathbf{r}|}} \right)$, $\tau_F = \sqrt{\frac{h}{|\mathbf{F}|}}$. При вычислениях по формуле (16) необходимо следить, чтобы вектор скорости не менял направления за время интегрирования τ_n . Если в результате расчета векторы $\langle HU \rangle_i^{n+1/2}$ и $\langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1/2}$ оказываются противоположно направленными, то необходимо принять $\langle HU \rangle_i^{n+1/2} = 0$.

Новые положения частиц внутри эйлеровых ячеек в момент времени $t_{n+1/2}$ определяются формулами

$$\mathbf{r}_i^{n+1/2} = \mathbf{r}_i^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\langle HU \rangle_i^{n+1/2}}{\langle H \rangle_i^{n+1/2}} + \frac{\langle HU \rangle_i^n}{\langle H \rangle_i^n} \right) \frac{\tau_n}{2}.$$

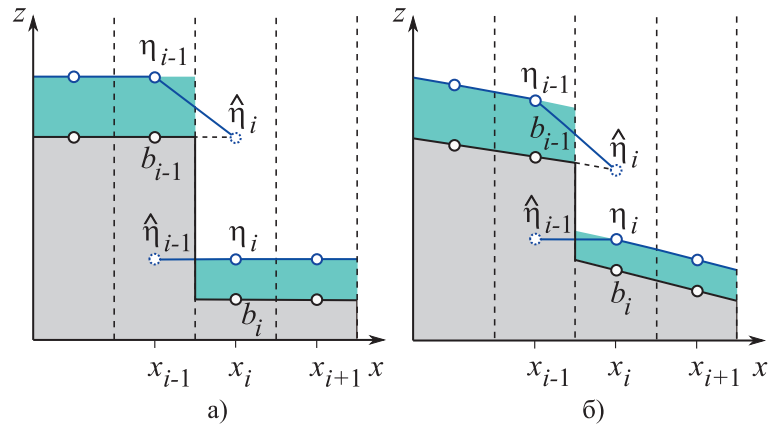


Рис. 3. Схема расположения “виртуальных” частиц $\hat{\eta}$ (голубые штриховые кружки): а) для кусочно-постоянных функций $b(x, y)$ и $\eta(x, y)$ внутри ячеек, б) для кусочно-линейных

Корректор. Значения $\langle H \rangle_i$, $\langle HU \rangle_i$ и $\mathbf{r}_i$ вычисляем в момент времени $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ с учетом рассчитанных ранее значений этих величин на временном слое $t_{n+1/2}$:

$$\langle H \rangle_i^{n+1} = \langle H \rangle_i^n + \tau_N \frac{Q_i^{n+1/2}}{h^2}, \quad (17)$$

$$\langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1} = \langle HU \rangle_i^n - \tau_N g \langle H \rangle_i^{n+1/2} \left. \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{r}} \right|_i^{n+1/2}, \quad (18)$$

$$\langle HU \rangle_i^{n+1} = \langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1} + \tau_n \mathbf{F} \left(\langle \widehat{H} \rangle_i, \langle \widehat{HU} \rangle_i \right), \quad (19)$$

где $\langle \widehat{H} \rangle_i = \frac{\langle H \rangle_i^n + \langle H \rangle_i^{n+1}}{2}$ и $\langle \widehat{HU} \rangle_i = \frac{\langle HU \rangle_i^n + \langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1}}{2}$. Как и в случае шага “предиктор”, если в результате вычислений по формуле (19) векторы $\langle HU \rangle_i^{n+1}$ и $\langle \widehat{HU} \rangle_i^{n+1}$ оказываются противоположно направленными, то полагаем $\langle HU \rangle_i^{n+1} = 0$. В итоге имеем новые положения SPH-частиц:

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \tau_n \frac{1}{2} \left(\frac{\langle HU \rangle_i^{n+1}}{\langle H \rangle_i^{n+1}} + \frac{\langle HU \rangle_i^n}{\langle H \rangle_i^n} \right). \quad (20)$$

2) *Эйлеров этап — TVD-подход.* Запишем уравнения (5) и (6) в форме, удобной для дальнейшего рассмотрения:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{D}, \quad (21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} H \\ HU_x \\ HU_y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} HU_x \\ HU_x^2 \\ HU_x U_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} HU_y \\ HU_x U_y \\ HU_y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} Q/h^2 \\ H[F_x - g \partial \eta / \partial x] \\ H[F_y - g \partial \eta / \partial y] \end{pmatrix}.$$

Применяя стандартную процедуру конечно-разностной аппроксимации к уравнению (21) [34, 50, 52], используемую при построении схем годуновского типа, получим для i -й ячейки следующее соотношение:

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1} - \frac{\tau_n}{h} \left(\mathcal{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2} + \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right), \quad (22)$$

где $\mathcal{F}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2} = \mathcal{F}(\mathbf{q}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2})$, $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{G}(\mathbf{q}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2})$, а значения $\langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1}$ вычисляются по формулам (17)–(19). Полуцелые нижние индексы относятся к значениям функций на границах ячеек. Величины с полуцелыми пространственными (нижними) индексами $\mathbf{q}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2}$ и $\mathbf{q}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2}$ находятся из решения соответствующих задач Римана. Таким образом, для построения численного решения следует решать задачу Римана на каждой из границ дискретных ячеек. Значения потоков на этих границах $\mathcal{F}_{i\pm 1/2,j}^{n+1/2}$ и $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}^{n+1/2}$ могут вычисляться как с использованием точного решения задачи Римана, так и приближенного. Для точного решения задачи Римана необходимо решать систему нелинейных алгебраических уравнений, что требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому наибольшее распространение получили методы, основанные на приближенном решении задачи Римана, такие как, например, методы Лакса–Фридрихса и Хартена–Лакса–ван Лира (HLL, HLLC) [53, 54].

Численная схема (22) второго (эйлерова) этапа имеет второй порядок точности по времени. Это обусловлено тем, что потоки, входящие в правую часть соотношения (22), вычисляются на $t_{n+1/2}$ временном слое от уже известных величин, рассчитанных на первом лагранжевом этапе с применением алгоритма “предиктор–корректор”: выполняется $\mathbf{q}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{q} \rangle_i^n + \langle \mathbf{q} \rangle_i^{n+1})$. Для того чтобы данная схема обладала вторым порядком точности и по пространству, необходимо использовать кусочно-линейную аппроксимацию реконструируемых внутри дискретных ячеек функций.

При решении задачи Римана необходимо вычислять значения консервативных переменных $\mathbf{q}$ слева (L) и справа (R) от границ ячеек.

Для этого применяется кусочно-линейная реконструкция сеточных функций относительно центров масс частиц $\mathbf{r}_i^{n+1/2} = (\mathbf{r}_i^n + \mathbf{r}_i^{n+1})/2$, находящихся внутри дискретных ячеек. Значение $\mathbf{r}_i^{n+1}$ рассчитывается по формуле (20). Отметим также, что в рамках рассматриваемого метода cSPH-TVD значение $\mathbf{r}_i^n$ в каждый момент времени совпадает с центрами неподвижных ячеек $\mathbf{r}_i^0$.

Пусть $\mathcal{L}$ — функция-ограничитель, предназначенная для подавления нефизичных осцилляций и обеспечения монотонности профилей сеточных величин.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta x_i^{n+1/2} = x_i^{n+1/2} - x_i^0,$$

$$\Delta y_j^{n+1/2} = y_j^{n+1/2} - y_j^0,$$

$$\Delta_x \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} = h \mathcal{L} \left(\frac{\mathbf{q}_{i+1,j}^{n+1/2} - \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2}}{x_{i+1}^{n+1/2} - x_i^{n+1/2}}, \frac{\mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} - \mathbf{q}_{i-1,j}^{n+1/2}}{x_i^{n+1/2} - x_{i-1}^{n+1/2}} \right), \Delta_y \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} = h \mathcal{L} \left(\frac{\mathbf{q}_{i,j+1}^{n+1/2} - \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2}}{y_{j+1}^{n+1/2} - y_j^{n+1/2}}, \frac{\mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} - \mathbf{q}_{i,j-1}^{n+1/2}}{y_j^{n+1/2} - y_{j-1}^{n+1/2}} \right).$$

Запишем для границ модифицированные выражения с учетом смещения частиц внутри эйлеровой ячейки (рис. 4):

$$\mathbf{q}_{i+1/2,j}^L = \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta x_i^{n+1/2}}{h} \right) \Delta_x \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2}, \quad \mathbf{q}_{i+1/2,j}^R = \mathbf{q}_{i+1,j}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta x_{i+1}^{n+1/2}}{h} \right) \Delta_x \mathbf{q}_{i+1,j}^{n+1/2}, \quad (23)$$

$$\mathbf{q}_{i,j+1/2}^L = \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta y_j^{n+1/2}}{h} \right) \Delta_y \mathbf{q}_{i,j}^{n+1/2}, \quad \mathbf{q}_{i,j+1/2}^R = \mathbf{q}_{i,j+1}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta y_{j+1}^{n+1/2}}{h} \right) \Delta_y \mathbf{q}_{i,j+1}^{n+1/2}. \quad (24)$$

В качестве ограничителей могут выбираться различные функции, например ограничитель “minmod” [55]

$$\mathcal{L}(a, b) = \frac{\text{sign } a + \text{sign } b}{2} \min(|a|, |b|), \quad (25)$$

который сохраняет монотонность реконструируемых по формулам (23) и (24) функций и TVD-свойство разностной схемы (22), которое соответствует условию невозрастания полной вариации численного решения [56].

Таким образом, решения задачи Римана с учетом (23) и (24) дают нам значения потоков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ через границы дискретных ячеек. Подставляя последние в (22), находим значения консервативных переменных $\mathbf{q}$ в момент времени t_{n+1} в центрах ячеек. Далее определяем новые значения интегральных характеристик частиц, помещаемых в центры ячеек, для следующего шага по времени: $V_i^n = H_i^{n+1} h^2$, $\mathbf{P}_i^n = (H \mathbf{U})_i^{n+1} h^2$.

Временной шаг τ_n для схемы cSPH-TVD должен определяться исходя из условия устойчивости

$$\tau_n = K \min \left(\frac{h}{2U_p}, \frac{h}{U_s} \right), \quad (26)$$

где $0 < K < 1$ — число Куранта,

$$U_p = \max_i \left(|U_{xi}^{n+1/2}|, |U_{yi}^{n+1/2}| \right), \quad U_s = \max_i \left(|U_{xi}^{n+1/2}| + \sqrt{g H_i^{n+1/2}}, |U_{yi}^{n+1/2}| + \sqrt{g H_i^{n+1/2}} \right).$$

Отношение $h/2U_p$ в условии (26) гарантирует, что за время τ_n частицы не достигнут границ ячеек (в условии устойчивости эйлеровых схем данное отношение отсутствует). Второе отношение h/U_s в (26) означает, что возмущения за это же время не распространятся на расстояние, большее чем h .

3. Результаты тестовых расчетов. В настоящей работе при проведении тестовых расчетов были использованы ограничитель “minmod” (25) и метод Хартена–Лакса–ван Лира (HLL) для решения задачи Римана.

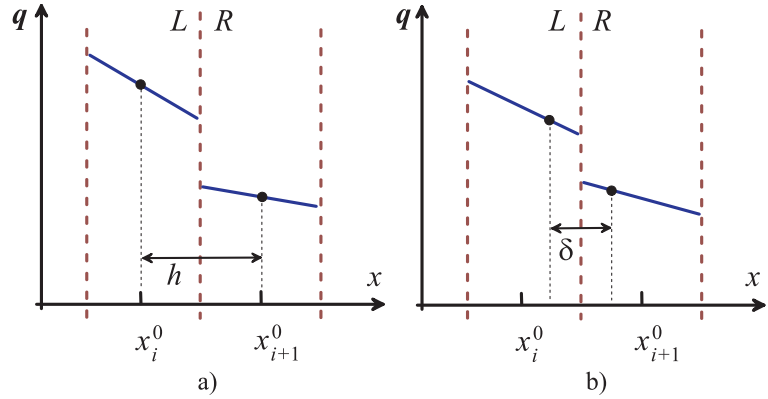


Рис. 4. Кусочно-линейное распределение функций $\mathbf{q}$ внутри дискретной ячейки: а) для эйлеровых схем годуновского типа, б) для метода cSPH-TVD; $\delta = x_{i+1}^{n+1/2} - x_i^{n+1/2}$ — расстояние между лагранжевыми частицами в момент времени $t_{n+1/2}$; x_i^0, x_{i+1}^0 — координаты центров неподвижных эйлеровых ячеек

Для удобства в расчетах будем x и y измерять в километрах, H , z и η — в метрах, горизонтальную скорость $U \equiv U_x$ — в м/с, время t — в с, а для ускорения свободного падения примем $g = 9.81$ м/с².

Рассмотрим часть описанных в разделе 1 классических тестов с целью определения качества построенной численной схемы. Эти тесты можно разделить на три группы, которые условно назовем так: модель А (одномерные расчеты на плоском дне ($b = 0$)); модель В (одномерные модели на гладком неоднородном дне и на дне, содержащем разрывы и изломы); модель С (двумерная модель на сложном нерегулярном дне).

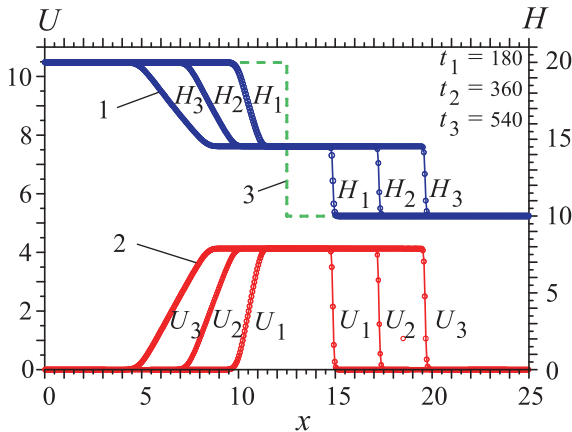


Рис. 5. Динамика распада начального разрыва глубины H в модели с $N_x = 500$, $H^L = 20$, $H^R = 10$: распределения $H(x)$ (голубые линии 1) и скорости $U(x)$ (красные линии 2) в различные моменты времени; $H(x, t = 0)$ (зеленая штриховая линия 3)

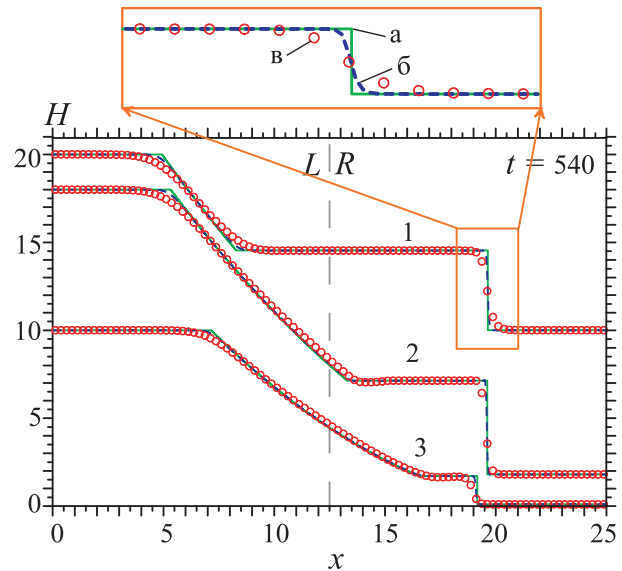


Рис. 6. Профили глубины при различных значениях N_x , H^L , H^R : а) точное решение (сплошная зеленая линия), б) $N_x = 500$ (голубая штриховая), в) $N_x = 100$ (красные кружки). Модели: 1) $H^L/H^R = 20/10$, 2) $H^L/H^R = 18/1.8$, 3) $H^L/H^R = 10/0.1$. На врезке изображена структура гидравлического скачка

Модель А.

Тест 1. Рассмотрим распад начального разрыва глубины (рис. 5, 6):

$$H(x) = \begin{cases} H^L, & x \leq 12.5; \\ H^R, & x > 12.5 \end{cases} \quad (27)$$

для неподвижной жидкости $U(t = 0) = 0$. При распаде данного разрыва формируются гидравлический скачок, распространяющийся вправо с постоянной скоростью, и волна разрежения, движущаяся влево. Область разрыва на рис. 5 описывается 5–6 ячейками, что характерно для ограничителя “minmod” (25), используемого в данной реализации численной схемы. С увеличением N_x ширина разрыва уменьшается пропорционально $h \sim 1/N_x$, что соответствует первому порядку точности на скачке, вне которого имеем второй порядок точности и квадратичную сходимость к точному решению (в области гладких профилей). В окрестности изломов (границы волны разрежения) имеем линейную по h скорость сходимости численного решения к точному. С увеличением интенсивности начального скачка (с ростом отношения H^L/H^R) количество ячеек, приходящихся на разрыв, уменьшается на 1–2 ячейки (рис. 6).

Относительное отклонение $\Delta H/H$ численного решения от точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва в области гладких профилей составляет (рис. 6, кривая 1) 0.0015% ($N_x = 500$) и 0.033% ($N_x = 100$) в точке $x = 13$; 0.0048% ($N_x = 500$) и 0.17% ($N_x = 100$) в точке $x = 6.4$.

Тест 2. Рассмотрим односторонний распад столба жидкости на сухом дне, соответствующий начальным условиям (27) при $H^R = 0$ (рис. 7). В этом случае происходит распространение жидкости по первоначально сухому дну в виде волны разрежения. Численное решение стремится к точному со скоростью, пропорциональной h в окрестности границ волны разрежения, и пропорционально h^2 в области

гладкого течения. В таком расчете особое значение имеют положения точки перегиба (так называемое аналитическое решение Ритера) и точки соприкосновения жидкости с сухим дном [22, 34].

Относительное отклонение $\Delta H/H$ численного решения от точного решения Ритера в точке перегиба профилей ($x = 12.5$, рис. 7) составляет 0.14% ($N_x = 500$) и 1.7% ($N_x = 100$) в момент времени $t = 180$; 0.054% ($N_x = 500$) и 0.76% ($N_x = 100$) в момент времени $t = 360$; 0.031% ($N_x = 500$) и 0.48% ($N_x = 100$) в момент времени $t = 540$.

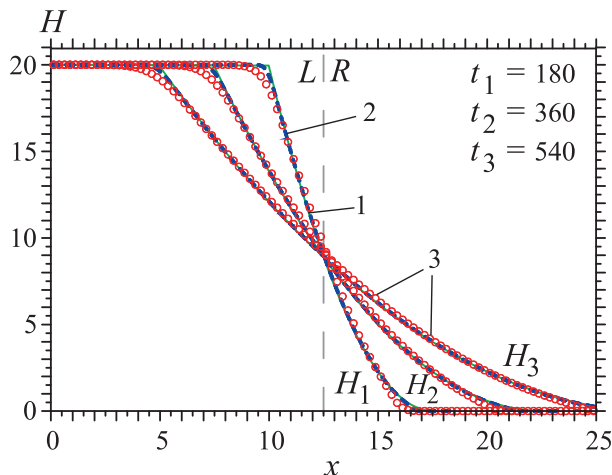


Рис. 7. Односторонний распад столба жидкости на сухом дне. Профили глубины в различные моменты времени при различных значениях N_x : точное решение (сплошная зеленая линия 1), $N_x = 500$ (голубая штриховая 2), $N_x = 100$ (красные кружки 3)

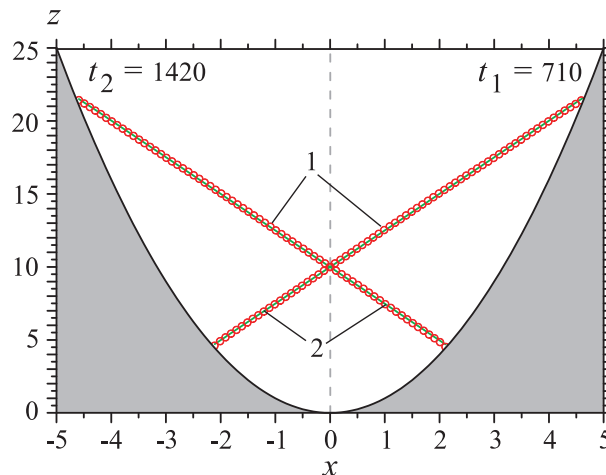


Рис. 8. Колебания уровня жидкости на параболическом дне. Профили уровня свободной поверхности в два разных момента времени: численное решение при $N_x = 100$ (красные кружки 1), точное решение (зеленая линия 2)

Модель В.

Тест 3. Для определения качества хорошо сбалансированной схемы используется решение задачи о колебаниях уровня жидкости на параболическом дне [22]. На рис. 8 показаны профили уровня свободной поверхности жидкости, которая в каждый момент времени имеет плоский вид. Относительное максимальное отклонение численного решения от точного не превышает 0.4% даже на грубой сетке с $N_x = 100$. С увеличением N_x погрешность уменьшается пропорционально $1/N_x^2$.

Тест 4. Стационарные течения жидкости на неоднородном дне, содержащем ступеньки и изломы (рис. 9–11).

Рассмотрим сначала стационарные течения на неоднородном дне [23], для которых выполняется закон сохранения энергии, представимый в следующем виде:

$$H_{tot} = H(x) + \frac{U^2(x)}{2g} + b(x) = \text{const.} \quad (28)$$

В данном случае точные (аналитические) решения могут быть найдены из уравнения

$$\left(\frac{H}{H_s}\right)^3 - \left(\frac{H}{H_s}\right)^2 + \frac{\mu^2}{2gH_s^3} = 0, \quad (29)$$

где $\mu = HU = \text{const}$ и $H_s(x) = H_{tot} - b(x)$.

Сравнение численных решений для установившихся ($t \geq 20000$) течений с точными решениями, полученными из уравнения (29), представлены на рис. 9 и 10. Как видно из рисунков, структура течения сильно зависит от числа Фруда ($\text{Fr} = U/\sqrt{gH}$). При докритическом режиме течения ($\text{Fr} < 1$) с увеличением высоты рельефа дна b скорость жидкости U возрастает, а глубина H убывает. Это, в свою очередь, приводит к росту числа Фруда Fr , достигающего своего максимального значения в области наибольших высот дна. Характер течения в данном случае обусловлен эффектом Бернулли. При сверхкритическом режиме течения ($\text{Fr} > 1$) реализуется обратная ситуация, т.е. с ростом высоты дна скорость течения и число Фруда убывают, а глубина жидкости возрастает. На данных рисунках приведены значения чисел Фруда, соответствующих точным решениям уравнения (29).

Относительное отклонение $\Delta H/H$ численного решения при $N_x = 500$ от точного на правой границе не превышает 0.7% и 2% для сверхкритического и докритического течений на ступенчатом дне соответственно (рис. 9); 0.1% и 0.04% для сверхкритического и докритического течений при наличии на горизонтальном дне треугольного препятствия (рис. 10) соответственно. С увеличением N_x погрешность уменьшается пропорционально $1/N_x^2$, что свидетельствует о квадратичной скорости сходимости.

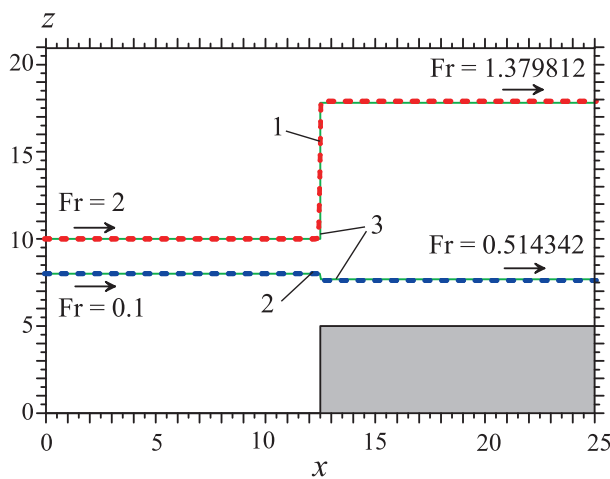


Рис. 9. Установившееся течение на ступенчатом дне для докритического (число Фруда $Fr < 1$) и сверхкритического режимов ($Fr > 1$). Профили уровня свободной поверхности: численное решение при $Fr = 2$ и $N_x = 500$ (красная штриховая линия 1), численное решение при $Fr = 0.1$ и $N_x = 500$ (голубая штриховая линия 2), точное решение (зеленая сплошная линия 3)

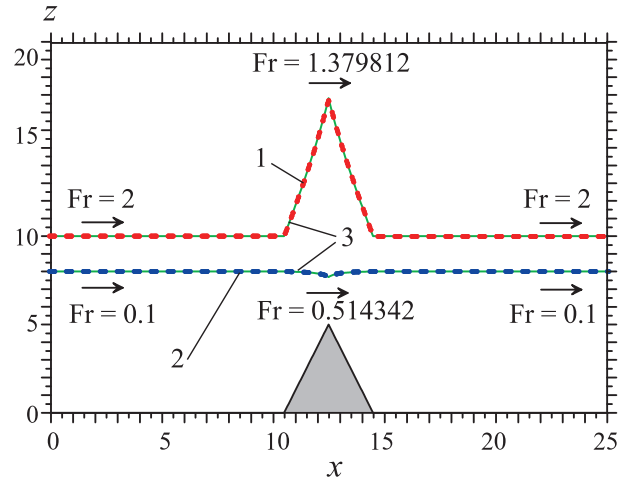


Рис. 10. Установившееся течение при наличии на горизонтальном дне треугольного препятствия для докритического ($Fr < 1$) и сверхкритического режимов ($Fr > 1$). Профили уровня свободной поверхности: численное решение при $Fr = 2$ и $N_x = 500$ (красная штриховая линия 1), численное решение при $Fr = 0.1$ и $N_x = 500$ (голубая штриховая линия 2), точное решение (зеленая сплошная линия 3)

Существенно бóльшая погрешность вычислений на ступенчатом дне обусловлена более высокой диссипацией энергии на разрывах, являющейся следствием применения в численной схеме TVD-принципа, который приводит к нарушению условия (28), т.е. к уменьшению энергии течения.

Для устранения возникающей при расчете рассматриваемых течений большой погрешности можно вместо уравнения движения в консервативном виде $\frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(HU^2 + g \frac{H^2}{2} \right) = -g \frac{\partial b}{\partial x}$ решать уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g(H + b) + \frac{U^2}{2} \right] = 0$, которое обеспечит выполнение условия (28).

Отметим также, что относительное отклонение $\Delta(HU)/HU$ численного решения от точного на правой границе (рис. 9–11) не превышает 10^{-14} при работе с данными типа “double” (8 байт). Это следствие консервативности используемого метода.

Характерной особенностью рассмотренных выше установившихся (стационарных) течений является постоянство энергии жидкости и отсутствие критических точек ($Fr = 1$ — точки перехода “докритический режим $\leftrightarrow$ сверхкритический режим”) вдоль линий тока. Однако такие течения на неоднородном рельефе дна не являются единственно возможными. На рис. 11 представлены характерные профили двух течений, содержащих критические точки $Fr = 1$, в которых происходит переход от одного режима к другому. Красной линией 1 показано численное решение, соответствующее течению, при котором происходит монотонное возрастание скорости жидкости в области треугольного препятствия. Точка максимального значения высоты дна соответствует критической точке $Fr = 1$, в которой осуществляется переход от докритического режима течения к сверхкритическому. Аналогом рассматриваемого решения в газодинамике является ускорения газа в сопле Лаваля при истечении в вакуум.

Численное решение, показанное на рис. 11 голубой линией 2, соответствует течению с двумя критическими точками $Fr = 1$. Сначала жидкость, как и в предыдущем случае, ускоряется и в точке максимального значения высоты дна докритический режим течения сменяется сверхкритическим. Далее скорость течения продолжает расти, пока не достигнет своего максимального значения в некоторой точке (вторая критическая точка) на тыльной стороне препятствия, в которой формируется гидравлический скачок

(бор). За гидравлическим скачком течение жидкости снова становится докритическим. Аналогом рассматриваемого решения в газодинамике могут быть ускорение газа в сопле Лаваля при истечении в достаточно плотную среду или стационарные ударные волны в газе, находящемся в гравитационной потенциальной яме (галактические ударные волны, формирующиеся в газе в виде спиральных рукавов) [57].

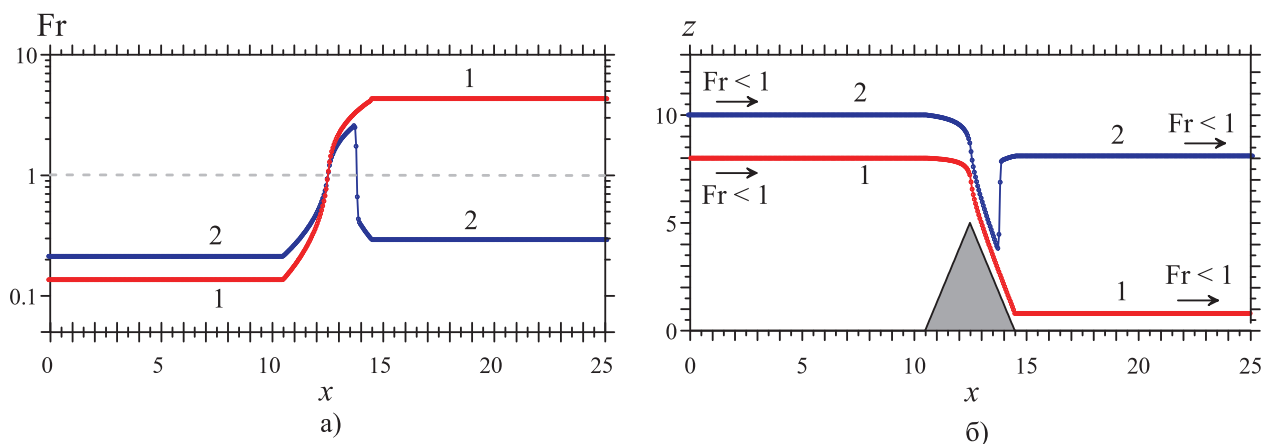


Рис. 11. Профили числа Фруда (а) и уровня свободной поверхности (б) для переходных (докритическое $\leftrightarrow$ сверхкритическое) установившихся течений, содержащих одну (красная линия 1) и две (голубая линия 2) критические точки $Fr = 1$, при наличии на горизонтальном дне треугольного препятствия

Модель С.

Тест 5. Рассмотрим распад циркуляционной дамбы на нерегулярном рельефе (рис. 12). В качестве модели дна $b(x, y)$ воспользуемся участком рельефа местности Волго-Ахтубинской поймы, построенного по данным дистанционного зондирования (SRTM — Shuttle Radar Topography Mission). Используемый рельеф является нерегулярным, содержит значительное число резких перепадов уровней и изломов дна. Данный тестовый расчет представляется хорошей проверкой численной схемы на устойчивость и консервативность, поскольку в процессе распада дамбы в расчетной области формируются различные существенно нелинейные гидродинамические течения и волны (течения типа водопадов, вихри, тангенциальные течения на различных уровнях в окрестности вертикальных стенок, боры, волны разрежения и волны типа цунами), а также области обмеления.

Закон сохранения массы во всех тестовых расчетах выполняется с погрешностью, не превышающей (при работе с данными типа “double” — 8 байт) $\sim 10^{-15}$ — на гладком рельефе дна и $\sim 10^{-13}$ — на нерегулярном дне, содержащем изломы и резкие перепады уровней.

Отметим, что при моделировании динамики поверхностных вод на нерегулярном рельефе дна с помощью численных алгоритмов, основанных на приближенном решении задачи Римана, в процессе вычислений могут появляться ячейки с отрицательной глубиной, т.е. может нарушаться позитивность схемы. Для таких ячеек применяется стандартная процедура регуляризации, используемая в большинстве случаев и возвращающая схеме позитивность, но лишающая ее весьма важного свойства — консервативности. Отсутствие консервативности приводит к нарушению законов сохранения и, как следствие, к неконтролируемому накоплению погрешности вычислений, которая, в свою очередь, сказывается на адекватности численного решения. В связи с этим хотелось бы заметить, что необходимо очень аккуратно применять процедуру регуляризации, чтобы сохранить свойство консервативности метода. Метод регуляризации, используемый в данной работе, обеспечивает позитивность и консервативность численной схемы за счет корректировки как значений H (в ячейке с $H < 0$), так и гидродинамических потоков из данной ячейки в соседние.

4. Заключение. Результаты численных расчетов с использованием описанного метода, основанного на использовании SPH- и TVD-подходов свидетельствуют о его эффективности и адекватности при моделировании сложных гидродинамических течений на неоднородном рельефе дна, содержащем изломы и резкие перепады уровней. Численная схема является хорошо сбалансированной, консервативной и позволяет проводить сквозной устойчивый расчет при наличии нестационарных границ “вода–сухое дно” на нерегулярном рельефе.

Отметим, что возможны различные варианты реализации предложенного алгоритма cSPH-TVD. В численной схеме можно использовать и другие сглаживающие ядра, TVD-ограничители (сохраняющие

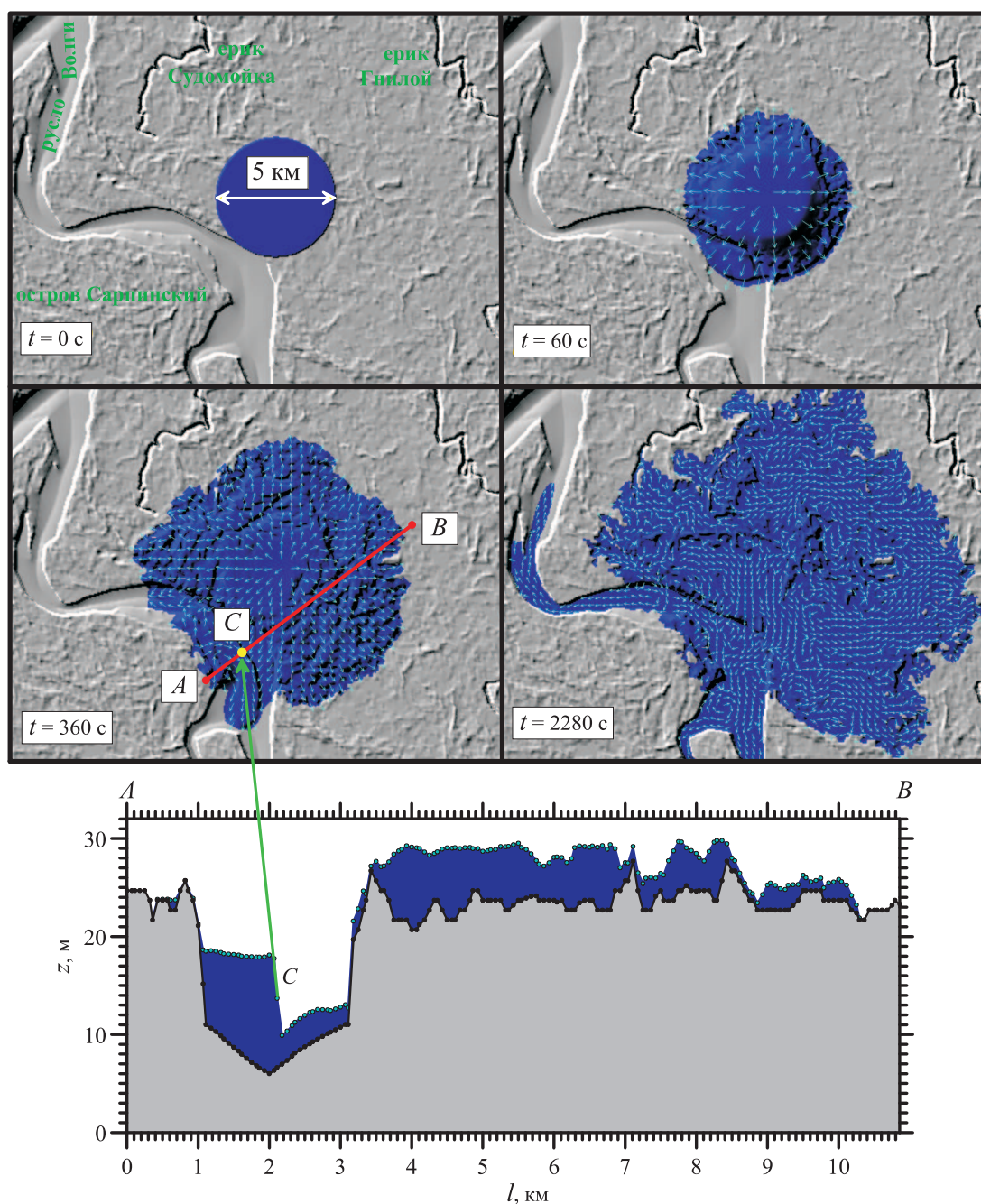


Рис. 12. Распад циркулярной водяной дамбы на нерегулярном рельефе реальной местности (максимальная высота дамбы над поверхностью дна в начальный момент времени составляет 35 м). Представлены распределения воды и направления течений на плоскости (x, y) в различные моменты времени, а также вертикальные профили уровня свободной поверхности воды и дна вдоль среза $A-B$ (точкой C обозначено положение гидравлического скачка)

TVD-свойство разностной схемы), методы решения задачи Римана, а также учитывать нестационарные источники/стоки воды $Q(x, y, t)$, внешние силы $\mathbf{F}(x, y, t)$ и нестационарность рельефа дна $b(x, y, t)$. Кроме того, данный алгоритм может быть обобщен на случай неравномерных сеток.

Преимуществом рассматриваемого метода cSPH-TVD в случае нерегулярного и/или разрывного рельефа является хорошая точность моделирования, сравнимая с точностью численных схем явского типа, основанных на точном решении обобщенной задачи Римана, при меньших вычислительных затратах и более простых расчетных формулах численного алгоритма. По сравнению с различными модификациями SPH-метода численная схема cSPH-TVD имеет более высокую точность, является менее диссипативной

и существенно лучше сбалансированной, а также обладает большей вычислительной скоростью при равном количестве частиц. Данные особенности рассматриваемого алгоритма позволяют применять его для моделирования динамики поверхностных вод на значительных территориях с хорошим пространственным разрешением, что необходимо для решения широкого круга задач динамики поверхностных вод, связанных с сезонными затоплениями, проведением экспертиз гидротехнических сооружений, проблемами загрязнения водоемов [15, 16, 21].

В рамках предложенного комбинированного cSPH-TVD метода (после незначительных изменений и дополнений) возможен расчет сложных трехмерных гидродинамических течений при наличии в расчетной области препятствий в виде непроницаемых для воды границ (задача обтекания твердых тел произвольной формы [58]) без существенного усложнения численного алгоритма.

Авторы выражают благодарность М. А. Еремину за обсуждения и полезные замечания. Работа выполнена в рамках ФЦП “Старт-11 Н1 — Информационные технологии, программные продукты и телекоммуникационные системы” (проект № 8861р/14383), грантов РФФИ (коды проектов 10-07-97017-р-поволжье-а, 11-07-97025-р-поволжье-а), частично поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (№ 02.740.11.5198), грантом РФФИ (код проекта 11-05-97044-р-поволжье-а) и НИР № 1.3.10, выполняемой в рамках тематического плана ВолГУ по заданию Министерства образования и науки РФ. Часть расчетов проводилась на суперкомпьютере “Ломоносов”, установленном в Научно-исследовательском вычислительном центре МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agoshkov V.I., Ambrosi D., Pennati V., Quarteroni A., Saleri F. Mathematical and numerical modelling of shallow water flow // *Computational Mechanics*. 1993. **11**, N 5–6. 280–299.
2. Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations // *Fluid Dynamics Research*. 2006. **38**, N 5. 339–358.
3. Чикин А.Л., Бирюков П.А. Расчет ветровых течений в Керченском проливе с помощью двухслойной математической модели // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки*. 2010. № 5. 12–16.
4. Bristeau M.-O., Goutal N., Sainte-Marie J. Numerical simulations of a non-hydrostatic shallow water model // *Computers & Fluids*. 2011 (in print).
5. Wang K.-H., Li W., Lee H. Propagation and transformation of periodic nonlinear shallow-water waves in basins with selected breakwater systems // *Computers & Fluids*. 2008. **37**, N 8. 931–942.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Bonometti T., Balachandar S. Slumping of non-Boussinesq density currents of various initial fractional depths: A comparison between direct numerical simulations and a recent shallow-water model // *Computers & Fluids*. 2010. **39**, N 4. 729–734.
8. Dewals B.J., Kantoush S.A., Erpicum S., Piroton M., Schleiss A.J. Experimental and numerical analysis of flow instabilities in rectangular shallow basins // *Environmental Fluid Mechanics*. 2008. **8**. 31–54.
9. Аверкиев А.С., Клеванный К.А. Определение траекторий и скоростей циклонов, приводящих к максимальным подъемам воды в Финском заливе // *Метеорология и гидрология*. 2007. № 8. 55–63.
10. Будинова Е.В., Носов В.Н., Терехин А.Т. Моделирование течений Северного Каспия. Теоретическая экология. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.
11. Фомин В.В. Применение схем TVD для численного моделирования фронтальных зон солености в мелком море // *Метеорология и гидрология*. 2006. № 2. 59–68.
12. Дебольский В.К., Дебольская Е.И., Масликова О.Я. Модель деформаций дна в нижнем бьефе гидроузла с учетом ледовых затруднений // *Журнал Университета водных коммуникаций*. 2010. **2**. 55а–57.
13. Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С., Остапенко В.В. Математическое моделирование трансформации волн паводков в руслах с поймами // *Метеорология и гидрология*. 2008. № 3. 88–95.
14. Заibo Н., Пелиновский Б.Н., Храмушин В.Н. Моделирование цунами на Малых Антильских островах // *Известия Академии инженерных наук РФ*. 2001. **2**. 68–84.
15. Еремин М.А., Хоперсков А.В. Компьютерная модель прорыва волжской плотины // *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика*. 2006. **10**. 139–142.
16. Смирнов Е.Д., Хоперсков А.В. Моделирование динамики загрязнений в бассейне Волгоградского водохранилища // *Поволжский экологический вестник*. 1997. **4**. 83–87.
17. Kramer T., Jozsa J.J. Solution-adaptivity in modelling complex shallow flows // *Computers & Fluids*. 2007. **36**, N 3. 562–577.
18. Parrish D.M., Hagen S.C. Incorporating spatially variable bottom stress and Coriolis force into 2D, a posteriori, unstructured mesh generation for shallow water models // *Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2009. **60**, N 3. 237–261.

19. Bernard P.-E., Remacle J.-F., Legat V. Boundary discretization for high-order discontinuous Galerkin computations of tidal flows around shallow water islands // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2009. **59**, N 5. 535–557.
20. Крукиер Л.А., Чикин А.Л., Шабас И.Н. Трехмерная модель гидродинамики Азовского моря и ее численная реализация // Среда, биота и моделирование экологических процессов в Азовском море. Апатиты: Изд-во КНЦ РАН, 2001. 282–297.
21. Храпов С.С., Хонерсков А.В., Еремин М.А., Гусаров Д.В., Пляжин А.В., Филиппов О.В., Золотарев Д.В., Кузьмин Н.М. Электронная модель затопления Волго-Ахтубинской поймы при различных гидрографах специального весеннего пропуска Волжской ГЭС и водоснабжении рукава Ахтуба на основе технологий геоинформационных систем // Вестник ВолГУ. Сер.1. Математика. Физика. 2008. **11**. 201–207.
22. Kesserwani G., Liang Q. Well-balanced RKDG2 solutions to the shallow water equations over irregular domains with wetting and drying // Computers & Fluids. 2010. **39**, N 10. 2040–2050.
23. Alcrudo F., Benkhaldoun F. Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step // Computers & Fluids. 2001. **30**, N 6. 643–671.
24. Незлин М.В., Снежский Е.Н. Вихри Россби и спиральные структуры: астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука, 1990.
25. Grotberg J.B., Jensen O.E. Biofluid mechanics in flexible tubes // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. **36**, N 1. 121–147.
26. Shakura N.I., Sunyaev R.A. Black holes in binary systems. Observational appearance // Astron. Astrophys. 1973. **24**. 337–355.
27. Khoperskov A.V., Khrapov S.S., Nedugova E.A. Dissipative-acoustic instability in accretion disks at a nonlinear stage // Astronomy Letters. 2003. **29**, N 4. 246–257.
28. Charles W.M., Heemink A.W., van den Berg E. Coloured noise for dispersion of contaminants in shallow waters // Applied Mathematical Modelling. 2009. **33**, N 2. 1158–1172.
29. Cai L., Xie W.-X., Feng J.-H., Zhou J. Computations of transport of pollutant in shallow water // Applied Mathematical Modelling. 2007. **31**, N 3. 490–498.
30. Benkhaldoun F., Quivy L. A nonhomogeneous Riemann solver for shallow water and two phase flows // Flow, Turbulence and Combustion. 2006. **76**, N 4. 391–402.
31. Kalashnik M.V. Vortex funnel formation by a mass sink within the shallow-water model // Fluid Dynamics. 2004. **39**, N 2. 275–285.
32. Lai J.-S., Guo W.-D., Lin G.-F., Tan Y.-C. A well-balanced upstream flux-splitting finite-volume scheme for shallow-water flow simulations with irregular bed topography // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2010. **62**, N 8. 927–944.
33. Noelle S., Pankratz N., Puppo G., and Natvig J.R. Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows // J. Comput. Phys. 2006. **213**, N 2. 474–499.
34. Евстигнеев Н.М. Конечно-объемная TVD-схема для решения 2D эволюционных уравнений мелкой воды // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 1. 112–116.
35. Kashiwata K., Ohba Y., Takagi T., Behr M., Tezduyar T. Parallel finite element method utilizing the mode splitting and sigma coordinate for shallow water flows // Computational Mechanics. 1999. **23**, N 2. 144–150.
36. Mohammadian A., Le Roux D.Y., Tajrishi M. A conservative extension of the method of characteristics for 1D shallow flows // Applied Mathematical Modelling. 2007. **31**, N 2. 332–348.
37. Wong S.M., Hon Y.C., Golberg M.A. Compactly supported radial basis functions for shallow water equations // Applied Mathematics and Computation. 2002. **127**, N 1. 79–101.
38. Fernandez-Nieto E.D., Marin J., Monnier J. Coupling superposed 1D and 2D shallow-water models: Source terms in finite volume schemes // Computers & Fluids. 2010. **39**, N 6. 1070–1082.
39. Liang Q., Borthwick A.G.L. Adaptive quadtree simulation of shallow flows with wet-dry fronts over complex topography // Computers & Fluids. 2009. **38**, N 2. 221–234.
40. Comblen R., Lambrechts J., Remacle J.F., Legat V. Practical evaluation of five partly discontinuous finite element pairs for the non-conservative shallow water equations // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2010. **63**, N 6. 701–724.
41. Ata R., Soulaïmani A., Chinesta F. The natural volume method (NVM): Presentation and application to shallow water inviscid flows // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2009. **59**. 19–45.
42. Birknes J., Pedersen G. A particle finite element method applied to long wave run-up // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2006. **52**. 237–261.
43. Yabe T., Ogata Y. Conservative semi-Lagrangian CIP technique for the shallow water equations // Computational Mechanics. 2010. **46**, N 1. 125–134.
44. Monaghan J.J. Particle methods for hydrodynamics // Computer Physics Reports. 1985. **3**, N 2. 71–124.
45. Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics // Ann. Rev. Astron. and Astrophysics. 1992. **30**. 543–574.
46. Hubber D.A., Batty C.P., McLeod A., Whitworth A.P. SEREN — a new SPH code for star and planet formation simulations. Algorithms and tests // Astronomy & Astrophysics. 2011. **529**. A27.
47. Алиев А.В. Применение метода сглаженных частиц для решения задач физической газовой динамики // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 44–51.

48. *Monaghan J.J.* Simulating free surface flows with SPH // *Journal of Computational Physics*. 1994. **110**, N 2. 399–406.
49. *Ata R., Soulaïmani A.* A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows // *Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2005. **47**. 139–159.
50. *Храпов С.С., Хоперсков А.В., Еремин М.А.* Моделирование динамики поверхностных вод. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2010.
51. *Karelsky K.V., Papkov V.V., Petrosyan A.S.* The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes // *Physics Letters A*. 2000. **271**, N 5–6. 349–357.
52. *Еремин М.А., Хоперсков А.В., Хоперсков С.А.* Конечно-объемная схема интегрирования уравнений гидродинамики // *Известия ВолГТУ. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики*. 2010. **6**, № 8. 24–27.
53. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstreaming differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.* 1983. **25**. 35.
54. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 2010.
55. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1972. **3**, № 6. 68–77.
56. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
57. *Хоперсков С.А., Хоперсков А.В., Еремин М.А., Бутенко М.А.* Полигональные структуры в газовом диске: численные эксперименты // *Письма в Астроном. Журнал*. 2011. **37**, № 8. 614–627.
58. *Тарнавский Г.А., Алиев А.В.* Особенности аэродинамики высокоскоростного полета: компьютерное моделирование гиперзвукового обтекания головной части объекта // *Вычислительные методы и программирование*. 2008. **9**, № 2. 185–208.

Поступила в редакцию
22.05.2011
