

УДК 533.6:628.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ НА ОСНОВЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

О. А. Аверкова¹, И. Н. Логачев¹, К. И. Логачев¹

Разработан метод математического моделирования отрывных течений на входе во всасывающие отверстия в многосвязных областях с разрезами (тонкими козырьками), позволяющий строить свободные линии тока и поля скоростей, а также определять коэффициент местного сопротивления входа в такие каналы. Достоверность и адекватность разработанного метода демонстрируется сравнением с расчетами по методу Жуковского и опытными данными для задачи об отрывном течении на входе в плоский канал с козырьком. Выявлены закономерности изменения параметров отрывного потока на входе в плоский канал с двумя козырьками от их месторасположения и геометрических размеров.

Ключевые слова: отрывные течения, метод дискретных вихрей, коэффициент местного сопротивления.

Введение. Одной из задач теории струй идеальной несжимаемой жидкости [1, 2] является определение свободной линии тока, положение которой заранее неизвестно. Определение величины сжатия струи δ_∞ на входе во всасывающие каналы позволяет найти их аэродинамическое сопротивление [3–5]. Классически эта задача решается с использованием методов теории функций комплексного переменного [1–6], не применимых для многосвязных областей.

Использование метода дискретных вихрей в нестационарной постановке позволяет строить свободные линии тока [7, 8], но величина δ_∞ определяется достаточно грубо и пульсирует во времени.

Известно применение метода дискретных вихрей в стационарной постановке (СМДВ) для решения задачи об отрывном течении идеальной несжимаемой жидкости на входе в круглую полубесконечную трубу [9]. Задача решалась в осесимметричной постановке методом дискретных вихревых колец. При размещении на острой кромке свободного вихревого кольца можно было бы получить и более точную границу свободной поверхности тока.

Целью настоящей статьи является разработка численного метода математического моделирования отрывных течений на входе во всасывающие проемы щелевидных всасывающих отверстий в многосвязных областях на основе СМДВ.

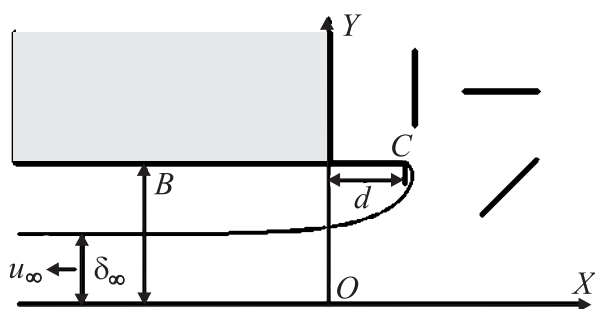


Рис. 1. К постановке задачи

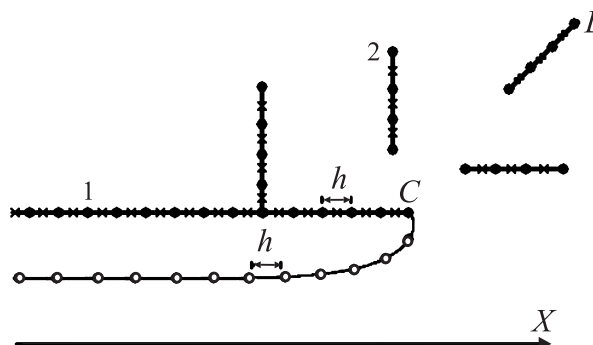


Рис. 2. Дискретизация границы области
(● — присоединенные вихри, ○ — свободные вихри, × — контрольные точки)

1. Вывод основных расчетных соотношений. Рассматривается плоская многосвязная область течения (рис. 1) на входе в плоский всасывающий канал, в спектре действия которого находится множество

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; О. А. Аверкова, доцент, e-mail: olga_19572004@mail.ru; И. Н. Логачев, профессор, e-mail: kilogachev@intbel.ru; К. И. Логачев, зав. кафедрой, профессор, e-mail: kilogachev@intbel.ru

тонких тел. С острой кромки C происходит срыв потока, и образуется свободная линия тока. Необходимо определить ее положение и скорость потока в любой заданной точке.

Математическая постановка задачи состоит в решении двумерного уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$ для потенциальной функции φ при заданных значениях граничной нормальной составляющей скорости $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = v_n(x) - U_n$, где x — точка границы S . Функция U_n выражает влияние свободных вихрей, находящихся на свободной линии тока, положение которой заранее неизвестно.

Данное уравнение сводится к граничному сингулярному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$\int_S G(x, \xi) \Gamma(\xi) ds(\xi) = v_n(x) - \gamma \int_{\sigma} G(x, \xi) ds(\xi),$$

где $\Gamma(\xi)$ — циркуляция (интенсивность) присоединенного вихревого слоя; $\gamma = \text{const}$ — интенсивность свободного вихревого слоя, непрерывно размещенного на линии σ , образующейся при срыве потока с острой кромки; ξ — произвольная точка границы S . С физической точки зрения функция $G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - \xi_1)n_2 - (x_2 - \xi_2)n_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$ представляет собой скорость в точке $x(x_1, x_2)$ вдоль направления единичного вектора $\mathbf{n} = \{n_1, n_2\}$, вызываемую вихрем единичной циркуляции, расположенной в точке $\xi(\xi_1, \xi_2)$. С математической точки зрения интеграл по длине дуги от этой функции является решением двумерного уравнения Лапласа.

Дискретная математическая модель строится следующим образом (рис. 2). Пусть N_1 — количество присоединенных вихрей первой связной части границы, равное количеству контрольных точек; N_2 — количество присоединенных вихрей второй связной части границы, контрольных точек на 1 меньше; N_3 — количество присоединенных вихрей третьей связной части границы, контрольных точек на 1 меньше; ...; N_l — количество присоединенных вихрей l -й связной части границы, контрольных точек на 1 меньше.

Таким образом, $N = \sum_{l=1}^L N_l$ — общее количество присоединенных вихрей, а $(N - L + 1)$ — общее количество контрольных точек.

Вихрь, лежащий на острой кромке C козырька, считается свободным, что следует из теоремы, изложенной в работе [10]: интенсивность (циркуляция) присоединенного вихря в точке срыва потока равна нулю. Присоединенные вихри располагались также в точках изломов границы. Между присоединенными вихрями располагались контрольные точки. Точка $\xi^k(\xi_1, \xi_2)$ — точка расположения k -го присоединенного вихря, а $x^p(x_1, x_2)$ — p -я контрольная точка. Тогда скорость в точке x^p вдоль единичного направления $\mathbf{n}$, вызываемая действием вихря циркуляции $\Gamma(\xi^k)$, расположенного в точке ξ^k , определится из выражения $v_n(x^p) = G(x^p, \xi^k) \Gamma(\xi^k)$.

Для обеспечения непроницаемости оси OX отражаем симметрично нее все вихри; циркуляции симметричных вихрей должны быть противоположны: $\Gamma(\xi^k) = -\Gamma(\xi^{k+N})$, где $k = \overline{1, N}$. Выполнение этого условия автоматически приводит к условию бесциркуляционного течения (сумма циркуляций всех вихрей равна нулю). Полагалось, что на искомой свободной линии тока циркуляция вихрей постоянна и равна γ . Расстояние между свободными вихрями есть величина постоянная и равная h . Первое приближение для свободной линии тока выбиралось следующим образом. Первые три вихря располагались параллельно оси OY и ниже точки срыва, начиная с острой кромки, остальные параллельно оси OX и левее этой точки.

Суммарное воздействие всех вихрей на контрольную точку x^p вдоль направления внешней нормали имеет вид

$$\begin{aligned} v_n(x^p) &= \sum_{q=1}^N G(x^p, \xi^q) \Gamma(\xi^q) - \sum_{q=N+1}^{2N} G(x^p, \xi^q) \Gamma(\xi^{q-N}) + \gamma \sum_{k=1}^{N_S} G(x^p, \zeta^k) - \gamma \sum_{k=N_S+1}^{2N_S} G(x^p, \zeta^k) = \\ &= \sum_{q=1}^N \left(G(x^p, \xi^q) - G(x^p, \xi^{q+N}) \right) \Gamma(\xi^q) + \gamma \sum_{k=1}^{N_S} \left(G(x^p, \zeta^k) - G(x^p, \zeta^{k+N_S}) \right), \end{aligned}$$

где ζ^k — точка расположения свободного вихря.

Поскольку $v_n(x^p) = 0$ во всех контрольных точках, т.е. выполняется условие непроницаемости, изменяя $p = 1, 2, \dots, N - L + 1$ и добавляя условие бесциркуляционного обтекания для каждого из замкнутых козырьков, получим следующую систему для определения неизвестных циркуляций присоединенных вихрей $\Gamma(\xi^1), \Gamma(\xi^2), \dots, \Gamma(\xi^N)$:

$$\begin{cases} \sum_{q=1}^N (G(x^p, \xi^q) - G(x^p, \xi^{q+N})) \Gamma(\xi^q) = -\gamma \sum_{k=1}^{N_s} (G(x^p, \zeta^k) - G(x^p, \zeta^{k+N_s})), \\ \sum_{i=1}^{N_l} \Gamma(\xi^{N_1+N_2+\dots+N_{l-1}+i}) = 0, \quad l = \overline{2, L}. \end{cases} \quad (1)$$

После определения неизвестных циркуляций присоединенных вихрей скорость в любой точке $x(x_1, x_2)$ области вдоль любого заданного направления вычисляется по формуле

$$v_n(x) = \sum_{q=1}^N (G(x, \xi^q) - G(x, \xi^{q+N})) \Gamma(\xi^q) + \gamma \sum_{k=1}^{N_s} (G(x, \zeta^k) - G(x, \zeta^{k+N_s})). \quad (2)$$

Если расстояние от точки x до вихря, расположенного в точке ξ , меньше $h/2$, то величина $G(x, \xi)$ вычисляется следующим образом: $G(x, \xi) = \frac{r}{\pi h} \frac{(S_1 - \xi_1)n_2 - (S_2 - \xi_2)n_1}{(S_1 - \xi_1)^2 + (S_2 - \xi_2)^2}$, где $S_1 = \frac{h}{2r}(x_1 - \xi_1) + \xi_1$, $S_2 = \frac{h}{2r}(x_2 - \xi_2) + \xi_2$ и $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$.

Второе приближение для свободной линии тока строится следующим образом. С острой кромки C в найденном поле скоростей строится линия тока с использованием формул $x = x' + v_x \Delta t$, $y = y' + v_y \Delta t$, где Δt — шаг во времени, выбираемый достаточно малым (например, $\Delta t = 0.0001$); (x', y') — предыдущее положение точки на линии тока; (x, y) — последующая точка; v_x и v_y находятся из выражения (2) при $\mathbf{n} = \{1; 0\}$ для v_x и $\mathbf{n} = \{0; 1\}$ для v_y . Как только расстояние между точкой (x, y) и острой кромкой становится равной h (например, с точностью до 0.000001), то в эту точку помещается свободный вихрь, т.е. это будет второе приближение для этой точки свободной линии тока. Далее опять строится линия тока, пока снова расстояние между (x, y) и предыдущим положением свободного вихря не станет равным h . В эту точку помещается свободный вихрь и т.д.

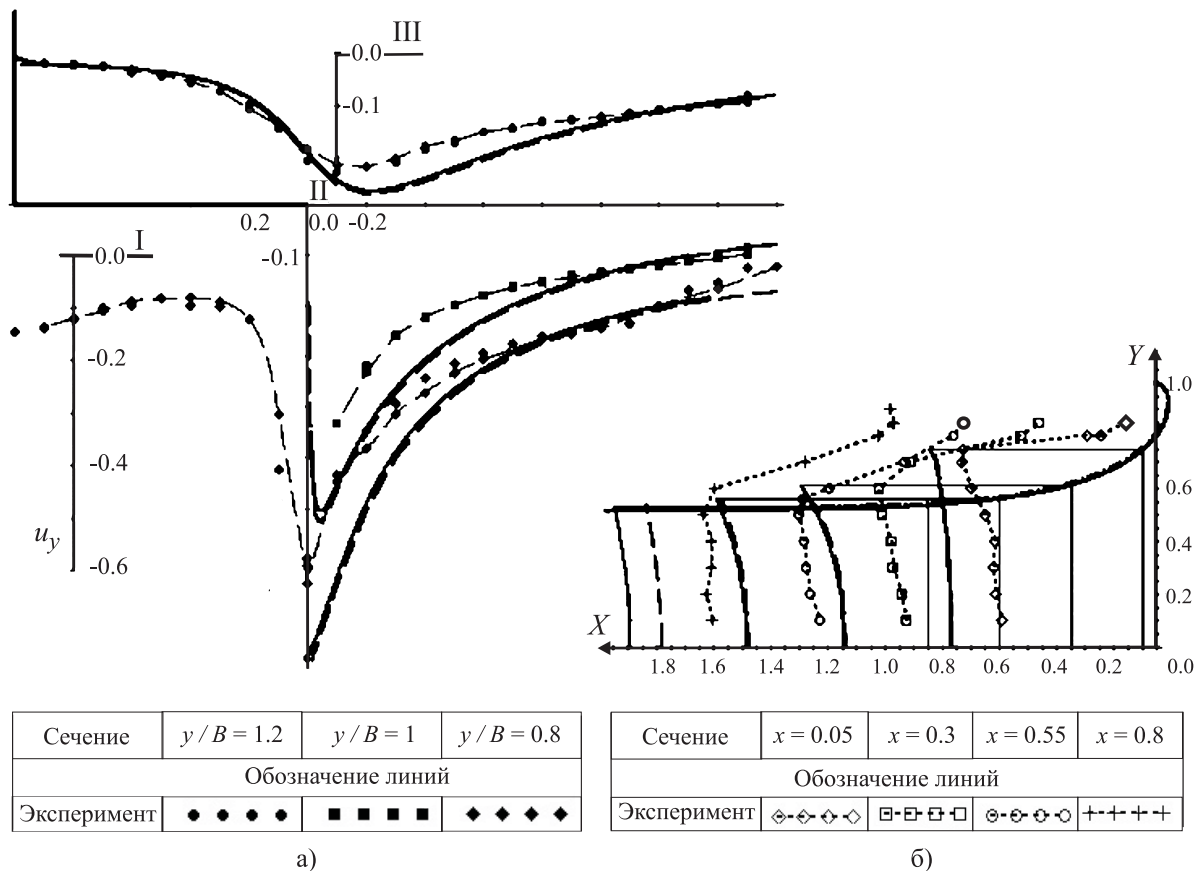


Рис. 3. Профили составляющих скорости: а) вертикальной; б) горизонтальной

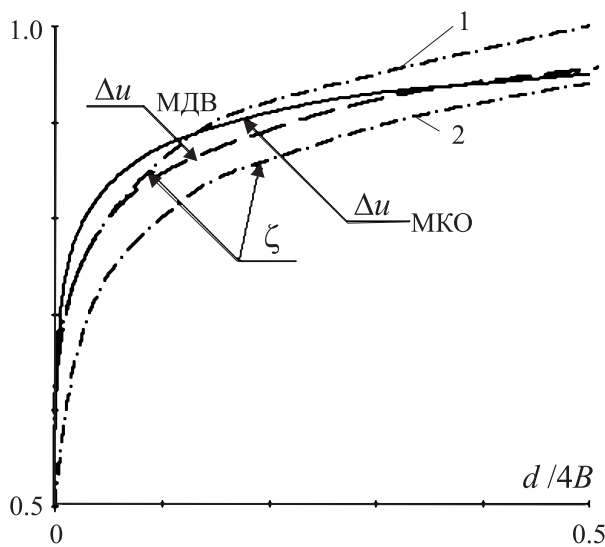


Рис. 4. Изменение коэффициента местного сопротивления ζ при входе в плоскую трубу и скорости срыва струи Δu с увеличением длины выступа $d/4B$

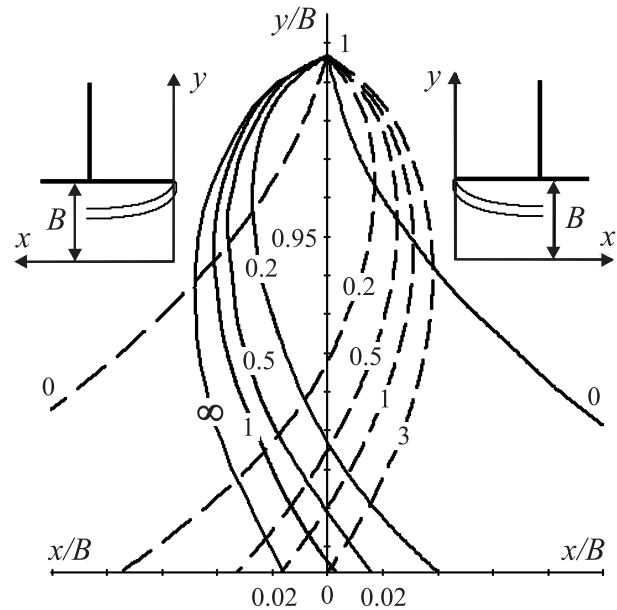


Рис. 5. Кривые отрыва струйного течения вблизи вытяжного отверстия при изменении длины выступа d/B

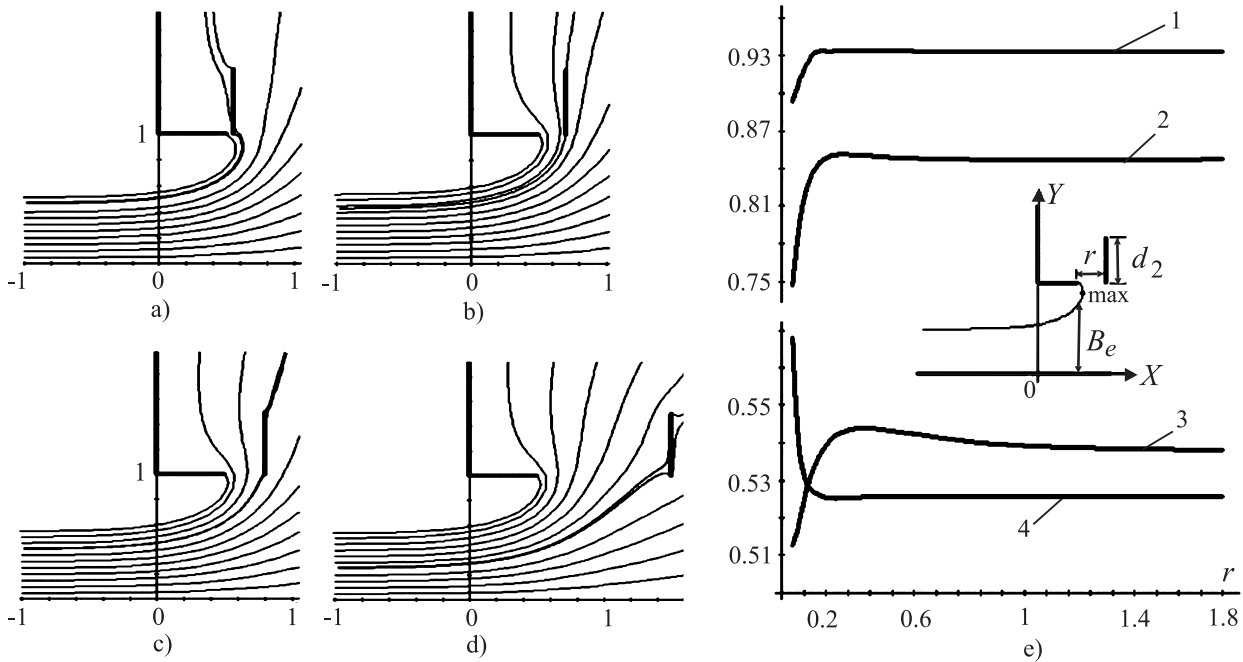


Рис. 6. Гидродинамическая картина течения при разном удалении вертикального козырька: а) $r = 0.05$; б) $r = 0.2$; в) $r = 0.3$; г) $r = 1$; е) зависимость параметров срыва струи при $d_2 = 0.5$ от расстояния r (1 — $y_{\max}$; 2 — B_e ; 3 — δ_{∞} ; 4 — $x_{\max}$)

После определения второго приближения для свободной линии тока необходимо снова решить систему уравнений (1) и определить циркуляции присоединенных вихрей. Затем строится третье приближение свободной линии тока и т.д. Данный итерационный процесс продолжается до тех пор, пока расстояние между последующим положением N_5 -го свободного вихря и предыдущим будет не больше заданной точности ε .

Поскольку границы области “обрываются” на некотором удалении от всасывающего проема, то возникает ситуация, когда свободная линия тока начинает подниматься вверх (рис. 2), т.е. ее ордината начинает

увеличиваться. Поэтому, в данном случае, для всех оставшихся точек ордината фиксируется и является равной ординате точки наибольшего снижения.

2. Модельная задача. В качестве модельной рассматривалась задача об отрывном течении на входе во всасывающее отверстие в плоской стенке с одним козырьком (рис. 1), решенная ранее с использованием теории функций комплексного переменного и метода Жуковского и исследовавшаяся экспериментально [3].

По разработанной компьютерной программе были произведены расчеты безразмерных профилей скоростей $\frac{u_x}{u_\infty}$, $\frac{u_y}{u_\infty}$ и координат свободной линии тока. Для удобства сравнения расчетов разными методами их представление дано в другой системе координат (рис. 3). На всех рисунках сплошными линиями изображены расчеты по методу Жуковского, пунктирными и штрихпунктирными линиями — расчеты по СМДВ. Из рисунков видно, что величина скорости и координаты свободной линии тока практически совпадают. Наибольшее различие для горизонтальной составляющей скорости наблюдается в сечении $x = 0.8$, но оно не превосходит 2% относительно расчетов по методу Жуковского. Шаг дискретности h в расчетах по СМДВ равен 0.0125, в качестве u_∞ бралась величина скорости на оси отсоса, удаленная на 2 калибра от всасывающего проема.

Длина вертикальной стенки и удаление последней точки свободной линии тока от всасывающего отверстия равна 8 калибрам ($8B$).

Отношением разности скорости u_∞ и средней скорости в щели $\frac{u_\infty \delta_\infty}{B}$ к этой средней является величина $\Delta u = \frac{B}{\delta_\infty} - 1$, которая в работе [7] предложена в качестве критерия для определения коэффициента местного сопротивления. Расчет величины Δu методом дискретных вихрей демонстрирует лучшее совпадение с экспериментальными данными для коэффициента местного сопротивления ζ , чем методом Жуковского. Это представлено на рис. 4: штрихпунктирные линии показывают экспериментальные данные И. Е. Идельчика [11] (кривая 1 — при относительной толщине стенки трубы $\delta/D_T = 0$; кривая 2 — при $\delta/D_T = 0.004$).

При значительном увеличении картины отрыва заметно небольшое отличие координат свободных линий тока, полученных разными методами (рис. 5) на начальном участке отрыва.

Таким образом, разработанная на основе СМДВ математическая модель отрывных течений позволяет получить адекватную картину течения, а ее использование даст возможность решить ряд новых задач аэродинамики отрывных течений.

3. Исследование отрывного течения на входе в плоский канал с двумя козырьками. Как было выяснено аналитически, численно и экспериментально [3, 8], наибольшее увеличение коэффициента местного сопротивления входа в плоский канал наблюдается при установке козырька длиной $d \approx 0.5B$ (рис. 1) перпендикулярно к плоскости всасывания. Представляет интерес определение влияния расположения второго замкнутого козырька и его длины на параметры отрывного течения, отнесенные к ширине всасывающего канала B : $(\bar{x}_{\max}, \bar{y}_{\max}) = \left(\frac{x_{\max}}{B}, \frac{y_{\max}}{B}\right)$ — координаты точки максимального выноса струи

(точка max на рис. 6); $\bar{B}_e = \frac{B_e}{B}$ — ширина эффективного всасывания на входе в канал; $\bar{\delta}_\infty = \frac{\delta_\infty}{B}$ — коэффициент сжатия струи на бесконечности. В дальнейшем изложении черточки над величинами опускаем, считая их безразмерными.

При фиксированном значении длины вертикального козырька d_2 и удалении его от горизонтального (рис. 6) наблюдаются экстремумы всех параметров в диапазоне $0.15 < r < 0.35$. В этом же диапазоне происходит наибольшее изменение этих параметров, дальнейшее их изменение не существенно. Величина

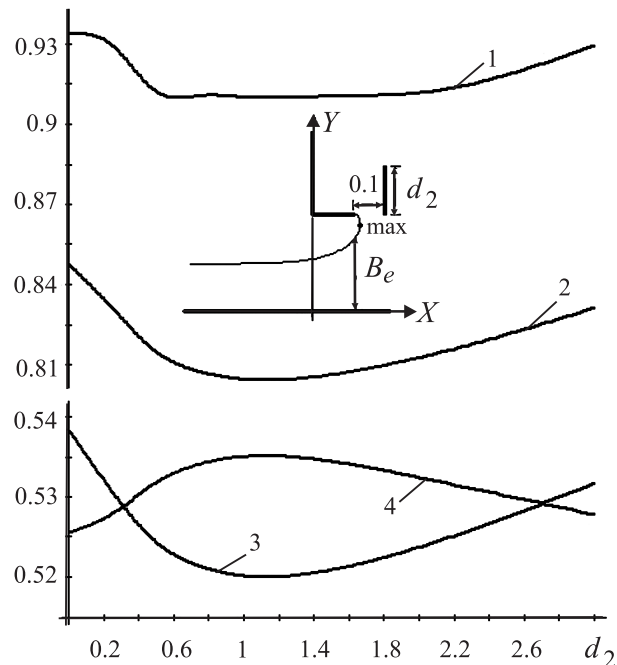


Рис. 7. Зависимость параметров срыва струи при расстоянии между козырьками $r = 0.1$ от длины вертикального козырька d_2 : 1 — $y_{\max}$; 2 — B_e ; 3 — δ_∞ ; 4 — $x_{\max}$

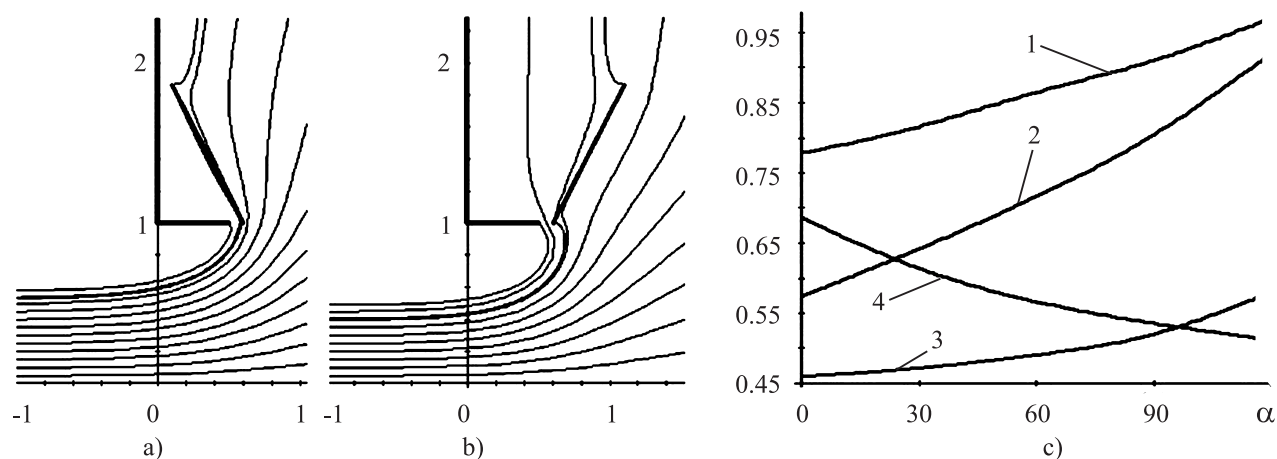


Рис. 8. Гидродинамическая картина течения при $r = 0.1$; $d_2 = 1$:
 а) $\alpha = 2\pi/3$; б) $\alpha = \pi/3$; в) зависимость параметров срыва струи от угла α° :
 1 — $y_{\max}$; 2 — B_e ; 3 — δ_∞ ; 4 — $x_{\max}$

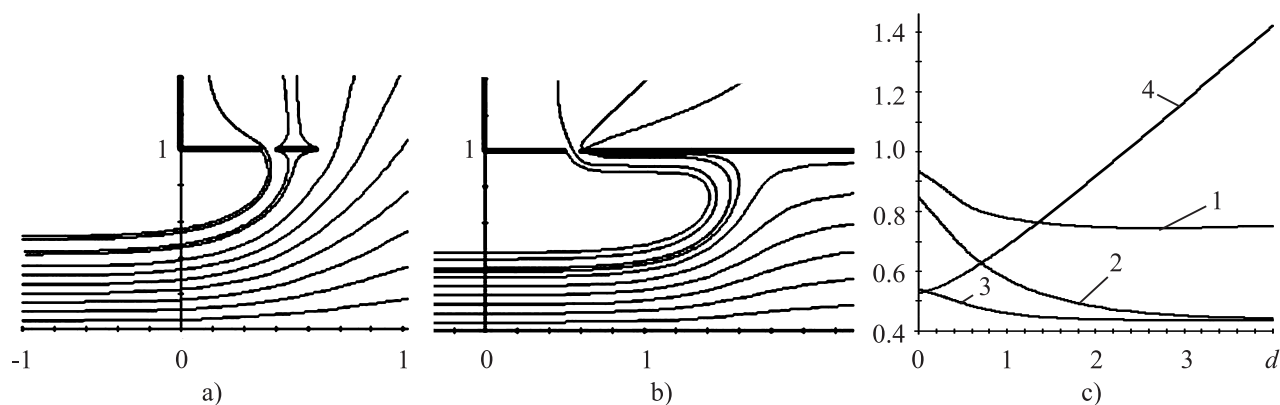


Рис. 9. Гидродинамическая картина течения при $r = 0.1$:
 а) $d_2 = 0.25$; б) $d_2 = 4$; в) зависимость от длины второго козырька:
 1 — $y_{\max}$; 2 — B_e ; 3 — δ_∞ ; 4 — $x_{\max}$

$\Delta u = \frac{1}{\delta_\infty} - 1$ принимает наибольшее значение при $r = 0.05$. При изменении расстояния r направление обтекания вертикального козырька меняется (рис. 6а–6д). Когда $r \approx 0.2$, линия тока проходит через козырек (рис. 6б).

При фиксированном расстоянии r и увеличении длины d_2 вертикального козырька также наблюдаются экстремумы параметров срыва струи (рис. 7). Наименьшее значение коэффициента δ_∞ сжатия струи, а значит, наибольшее значение критерия $\Delta u = \frac{1}{\delta_\infty} - 1$ наблюдается при $d_2 \approx 1$.

При изменении угла наклона такого козырька к положительному направлению оси абсцисс (рис. 8) функции изменения параметров срыва потока монотонны. Наименьшее значение величины δ_∞ наблюдается при $\alpha = 0$. Увеличение длины второго козырька при $\alpha = 0$ (рис. 9) влечет за собой также монотонное изменение параметров срыва струи. Свободная линия тока смещается в правую сторону (рис. 9а, 9б). Коэффициент δ_∞ уменьшается наиболее значительно в диапазоне $0 < d < 1$ (рис. 9с).

В приведенных расчетах использовались следующие расчетные параметры: шаг построения линии тока равен 0.00001; шаг дискретности $h = 0.025$; циркуляция вихрей на свободной линии тока $\gamma = -0.1$; точность определения свободной линии тока $\varepsilon = 0.0001$. Удаление вертикальной стенки от начала координат равно 8; удаление последнего свободного вихря от начала координат также равно 8. Всего присоединенных вихрей в расчетах насчитывалось порядка $300 \div 461$, а свободных — порядка 340. Количество итераций для определения координат свободной линии тока составляло $10 \div 40$.

Выводы. Разработанный метод математического моделирования может использоваться для компьютерного и имитационного моделирования отрывных течений на входе во всасывающие каналы с множе-

ством козырьков, находящихся в спектре их действия.

Для увеличения аэродинамического сопротивления всасывающего канала с козырьком рекомендуется устанавливать второй горизонтальный козырек длиной в один калибр (ширина всасывающего отверстия) на одной прямой с первым и на расстоянии $0.05 \div 0.1$ калибра.

Установленный эффект отрыва струи может использоваться для снижения объемов среды, поступающей в замкнутую область, например в аспирационное укрытие либо в тоннель для проезда транспорта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматлит, 1961.
2. Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: Янус, 1997.
3. Логачев И.Н., Логачев К.И., Зоря В.Ю., Аверкова О.А. Моделирование отрывных течений вблизи всасывающей щели // Вычислительные методы и программирование. 2010. 11, № 1. 47–56.
4. Логачев И.Н., Логачев К.И., Аверкова О.А. Математическое моделирование отрывных течений при входе в экранированный плоский канал // Вычислительные методы и программирование. 2010. 11, № 1. 72–81.
5. Логачев И.Н., Логачев К.И., Аверкова О.А. Математическое моделирование струйного течения воздуха при входе в плоский канал с козырьком и непроницаемым экраном // Вычислительные методы и программирование. 2010. 11, № 2. 7–14.
6. Логачев И.Н., Логачев К.И. Аэродинамические основы аспирации. СПб: Химиздат, 2005.
7. Логачев К.И., Пузанок А.И., Посохин В.Н. Расчет течений на входе в отсосы-раструбы методом дискретных вихрей // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2004. № 7, 8. 61–69.
8. Аверкова О.А., Зоря В.Ю., Логачев И.Н., Логачев К.И. Численное моделирование воздушных течений на входе в щелевые неплотности аспирационных укрытий // Новые огнеупоры. 2010. № 5. 31–36.
9. Логачев К.И., Посохин В.Н. Расчет течения вблизи круглого всасывающего патрубка // Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. № 1. 29–32.
10. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995.
11. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила в редакцию
15.03.2011
