

УДК 519.62

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕТОЧНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Г. В. Кривовичев¹

Рассмотрена задача об исследовании устойчивости решеточной кинетической схемы Больцмана, предназначенной для расчета плоских течений вязкой жидкости. Исследуется устойчивость в случае двух стационарных режимов течения в неограниченной области. Анализ устойчивости по начальным данным выполняется с помощью метода Неймана на основе линейного приближения. Построены и исследованы области устойчивости в пространстве входных параметров. Показано, что рассматриваемая схема является условно устойчивой.

Ключевые слова: кинетические схемы, решеточный метод Больцмана, устойчивость по начальным данным, метод Неймана, область устойчивости.

1. Введение. Вычислительные методики, основанные на использовании кинетических схем, в настоящее время широко применяются при численном решении задач механики жидкости, газа и плазмы [1–6]. При построении этих схем используются кинетические уравнения, которым удовлетворяют одночастичные функции распределения. При этом учитывается известная из кинетической теории (например, см. [7]) связь между кинетическим и гидродинамическим подходами к описанию динамики газов и жидкостей. В нашей стране прогресс в этой области связан с работами Б. Н. Четверушкина и его коллег, которые посвящены построению кинетически согласованных разностных схем [1–3]. За рубежом преобладает другой подход, основанный на использовании решеточных схем Больцмана (lattice Boltzmann) [4–6]. Следует отметить, что отечественный и зарубежный подходы имеют ряд общих особенностей, их сравнительный анализ проведен в работе [8].

Широкое применение решеточных схем Больцмана связано с такими их достоинствами, как алгоритмическая простота, существенно облегчающая их программную реализацию, и легкость распараллеливания вычислительных алгоритмов [9–11].

Настоящая статья посвящена анализу устойчивости решеточной схемы Больцмана для случаев стационарных плоских течений в неограниченной области.

2. Решеточная схема Больцмана для расчета плоских течений. В этом разделе мы кратко рассмотрим один из возможных подходов к построению решеточных схем Больцмана. При их построении, как правило, рассматривается кинетическое уравнение Бхатнагара–Гросса–Крука [4]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{X}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{1}{\lambda} (f - f^{(\text{eq})}), \quad (1)$$

где $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — одночастичная функция распределения, t — время, $\mathbf{r}$ — вектор пространственных переменных, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, m — масса частицы, $\mathbf{X}$ — вектор массовых сил, λ — параметр релаксации, $f^{(\text{eq})}$ — равновесная функция распределения, в качестве которой выступает локальная максвелловская функция распределения, при этом $f^{(\text{eq})} = f^{(\text{eq})}(f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}))$.

Рассмотрим уравнение (1) при отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\lambda} (f - f^{(\text{eq})}). \quad (2)$$

Дискретизация уравнения (2) производится в два этапа — на первом этапе осуществляется дискретизация в пространстве скоростей, а на втором этапе осуществляется дискретизация по времени и пространственным переменным.

Для дискретизации в пространстве скоростей применяется подход, по идее близкий к методу дискретных скоростей [13, 14]. В пространстве скоростей задается конечная совокупность векторов $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$,

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики — процессов управления, Университетский просп., д. 35, Петергоф, 198504, Санкт-Петербург; ст. препод., e-mail: gera1983k@bk.ru

каждому вектору из которой ставится в соответствие функция распределения $f_i = f_i(t, \mathbf{r}) = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_i)$, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, уравнение (2) сводится к системе уравнений в частных производных относительно $f_i(t, \mathbf{r})$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\lambda} (f_i - f_i^{(\text{eq})}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

При построении решеточных схем Больцмана набор $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ носит название решетки (lattice) [4]. Для каждой решетки вводится обозначение вида $DpQn$, где обозначение Dp относится к размерности физического пространства, а через Qn ($n \in N$) обозначается число возможных скоростей. Например, для моделирования плоских течений часто используется решетка $D2Q9$ со следующим набором возможных скоростей: $\mathbf{v}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_5 = (0, -1)$, $\mathbf{v}_6 = (1, 1)$, $\mathbf{v}_7 = (-1, 1)$, $\mathbf{v}_8 = (-1, -1)$, $\mathbf{v}_9 = (1, -1)$. Для данной решетки такие макровеличины, как плотность $\rho(t, \mathbf{r})$ и скорость среды $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, вычисляются через функции распределения следующим образом [14]:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 f_i(t, \mathbf{r}), \quad \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{v}_i f_i(t, \mathbf{r}). \quad (4)$$

Для построения решеточных схем Больцмана можно воспользоваться интегральным представлением вида

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\Delta t} \left(f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \zeta, t + \zeta)) \right) d\zeta, \quad (5)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. На основе (5) можно строить решеточные схемы Больцмана интегро-интерполяционным методом — например, если аппроксимировать интеграл в правой части (5) с помощью квадратурной формулы левых прямоугольников, то получим

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) - \frac{\Delta t}{\lambda} \left(f_i(\mathbf{r}, t) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)) \right). \quad (6)$$

Заметим, что в силу замены интеграла квадратурной формулой равенство (6) носит приближенный характер.

На следующем этапе производится дискретизация по времени и по пространственным переменным. Построим на каком-либо рассматриваемом временном промежутке $[t_0, T]$ равномерную сетку с шагом Δt : $\Omega_\tau = \{t_j | t_j = t_0 + j\Delta t, j = \overline{0, N}\}$, а в рассматриваемой пространственной области $\mathcal{D}$ построим $\Omega_{\mathbf{h}} = \{(x_k, y_l) | x_k = x_0 + kh_x, y_l = y_0 + lh_y, k = \overline{0, N_x}, l = \overline{0, N_y}\}$ — равномерную по каждой координате сетку с шагами h_x и h_y соответственно. Затем, рассматривая (6) на сетке $\Omega_{\tau\mathbf{h}} = \Omega_\tau \times \Omega_{\mathbf{h}}$, получим

$$f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) = f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - \frac{\Delta t}{\lambda} \left(f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{f}(\mathbf{r}_{kl}, t_j)) \right), \quad (7)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$.

Соотношение (7) представляет собой выражение для решеточной схемы Больцмана, применяемой для расчета течений нетеплопроводной несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости [4, 5]. Связь между схемой (7) и системой уравнений гидродинамики осуществляется за счет параметра $\tau = \frac{\lambda}{\Delta t}$. Получение зависимости τ от коэффициента кинематической вязкости ν осуществляется с помощью метода Энского-Чепмена. Для решетки $D2Q9$ эта зависимость имеет вид

$$\nu = \frac{\Delta t}{3} \left(\tau - \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

Процедура получения (8) является довольно громоздкой, и ознакомиться с ней можно, например, в [4] на с. 172–181. Следует также отметить, что при использовании схем, построенных интегро-интерполяционным методом, шаг по времени и шаги по пространственным переменным связаны между собой — эта связь определяется используемой решеткой. Например, для решетки $D2Q9$ эта связь имеет вид $h_x = h_y = \Delta t$.

Для упрощения проведения расчетов равновесные функции распределения $f_i^{(\text{eq})}$ аппроксимируются полиномиальными формами от ρ и $\mathbf{u}$. Если рассматривается решетка $D2Q9$, то эта аппроксимация имеет следующий вид (подробный вывод приведен в монографии [4] на с. 164–171):

$$f_i^{(\text{eq})} \approx W_i \rho \left(1 + 3(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2} (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right), \quad W_i = \begin{cases} 4/9, & i = 1, \\ 1/9, & i = \overline{2, 5}, \\ 1/36, & i = \overline{6, 9}. \end{cases} \quad (9)$$

В дальнейшем будет рассматриваться решеточная схема Больцмана для решетки $D2Q9$.

3. Постановка задачи об исследовании устойчивости. Поскольку схема (7) в силу (4) и (9) является нелинейной, то ее устойчивость, как правило [4, 12], исследуется в случаях простых режимов течения. В настоящей статье, по аналогии с [12], исследуется устойчивость только по начальным данным. Рассматриваются стационарные пространственно однородные режимы течения в неограниченной области, для которых ρ , U_x , U_y — постоянные величины. Значения равновесных функций распределения в этом случае являются постоянными: $f_i^{(eq)} = \bar{f}_i^{(eq)} = \text{const}$, а их совокупность представляет собой невозмущенное решение системы (7).

Если функции распределения не зависят от пространственных переменных, т.е. $f_i = f_i(t)$, то схема (7) сводится к линейной разностной системе вида $f_i(t_j + \Delta t) = f_i(t_j) - \frac{1}{\tau} (f_i(t_j) - \bar{f}_i^{(eq)})$, невозмущенное решение которой будет асимптотически устойчиво при условии

$$\tau > \frac{1}{2}. \quad (10)$$

В общем случае, когда учитывается зависимость функций распределения f_i и от времени и от пространственных переменных, устойчивость невозмущенного решения можно исследовать посредством анализа линейного приближения [12].

Итак, будем представлять возмущенное решение (7) в следующем виде:

$$f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) = \bar{f}_i^{(eq)} + \delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j), \quad (11)$$

где $\delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j)$ имеют смысл отклонений от невозмущенного решения.

Подставляя (11) в (7), получим

$$\delta f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) = \delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - \frac{1}{\tau} \left(\bar{f}_i^{(eq)} + \delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) - f_i^{(eq)} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} + \delta \mathbf{f}(\mathbf{r}_{kl}, t_j)) \right), \quad (12)$$

где $\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} = (\bar{f}_1^{(eq)}, \dots, \bar{f}_9^{(eq)})$, $\delta \mathbf{f} = (\delta f_1, \dots, \delta f_9)$.

Разложим в (12) нелинейный член $f_i^{(eq)} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} + \delta \mathbf{f}(\mathbf{r}_{kl}, t_j))$ в ряд Тейлора в окрестности невозмущенного решения, оставляя при этом только члены не выше первого порядка малости:

$$f_i^{(eq)} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)} + \delta \mathbf{f}(\mathbf{r}_{kl}, t_j)) = f_i^{(eq)} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) + \sum_{m=1}^9 \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) \delta f_m(\mathbf{r}_{kl}, t_j). \quad (13)$$

Отметим, что в (13) в силу того, что отброшены члены более высокого порядка, равенство носит приближенный характер. Поскольку $f_i^{(eq)} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) = \bar{f}_i^{(eq)}$, то, подставляя (13) в (12), получим

$$\delta f_i(\mathbf{r}_{kl} + \mathbf{v}_i \Delta t, t_j + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) + \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^9 \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) \delta f_m(\mathbf{r}_{kl}, t_j). \quad (14)$$

Для анализа устойчивости нулевого решения линейной системы (14) воспользуемся методом Неймана [15], согласно которому представим решение (14) в виде

$$\delta f_i(\mathbf{r}_{kl}, t_j) = F_i(t_j) \exp(i\mathbf{\Theta} \mathbf{r}_{kl}), \quad (15)$$

где $i^2 = -1$, $\mathbf{\Theta} = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_x \in [-\pi, \pi]$, $\theta_y \in [-\pi, \pi]$.

Подставляя (15) в (14), получим линейную разностную систему относительно F_i :

$$F_i(t_j + \Delta t) = \sum_{m=1}^9 G_{im} F_m(t_j), \quad G_{im} = \begin{cases} \left(\left(1 - \frac{1}{\tau} \right) + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) \right) \exp(-i\mathbf{\Theta} \mathbf{v}_i \Delta t), & m = i, \\ \frac{1}{\tau} \frac{\partial f_i^{(eq)}}{\partial f_m} (\bar{\mathbf{f}}^{(eq)}) \exp(-i\mathbf{\Theta} \mathbf{v}_i \Delta t), & m \neq i. \end{cases} \quad (16)$$

Решение (16) будет устойчиво, если все собственные значения матрицы $G = \{G_{im}\}_{i,m=1,9}$ по модулю не будут превосходить единицы. Отметим, что матрица G является комплексной и имеет комплексные

собственные значения, являющиеся функциями семи переменных $\lambda_i = \lambda_i(\theta_x, \theta_y, U_x, U_y, \rho, \Delta t, \nu)$. При этом $U_x, U_y, \rho, \Delta t, \nu$ играют роль входных параметров — через U_x, U_y и ρ , согласно (9), вычисляются $\bar{f}_i^{(eq)}$, а через ν и Δt при использовании (8) вычисляется параметр τ .

В настоящей статье анализ устойчивости производится посредством построения и исследования областей устойчивости на плоскости (θ_x, θ_y) и в пространстве входных параметров, которые варьируются в определенных пределах. Параметры, по аналогии с работой [12], задаются в условных единицах.

Подобная задача для случая решетки $D2Q9$ решалась и в [12], но в ней предполагалось, что векторы $\mathbf{u}$ и Θ сонаправлены; более того, в [12] рассматривался только случай, когда $\mathbf{u}$ и Θ сонаправлены с $\mathbf{v}_2$ — т.е. параллельны оси абсцисс. В настоящей работе подобного ограничения не ставится, компоненты вектора Θ предполагаются изменяющимися во всей своей области определения.

При исследовании устойчивости введем ряд упрощающих предположений, позволяющих сократить число параметров. Во-первых, в дальнейшем будет рассматриваться случай $\rho = 1$ — как видно из (9), равновесные функции распределения линейно зависят от этого параметра. Во-вторых, ограничимся анализом устойчивости только двух режимов течения: $U_x = U \neq 0, U_y = 0$ (режим 1) и $U_x = U_y = U \neq 0$ (режим 2). Отметим, что последний режим течения в [12] не рассматривался. При введенных предположениях число входных параметров уменьшено до трех: U, ν и Δt .

Задача на собственные значения для матрицы G в общем случае может быть решена только численно. Для ее численного решения в настоящей работе использовались написанные на языке FORTRAN-90 процедуры пакета EISPACK, реализующие QR-алгоритм [16].

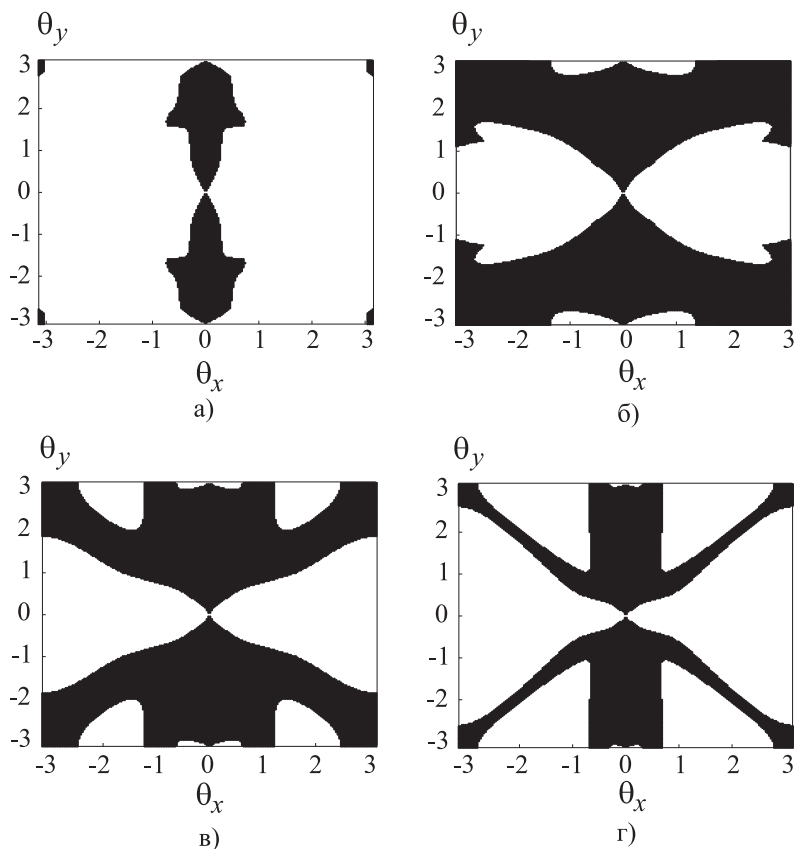


Рис. 1. Форма области устойчивости для случая режима 1 при $\Delta t = 1$, $U = 1$: а) $\nu = 0.05$; б) $\nu = 0.25$; в) $\nu = 0.5$; г) $\nu = 1$

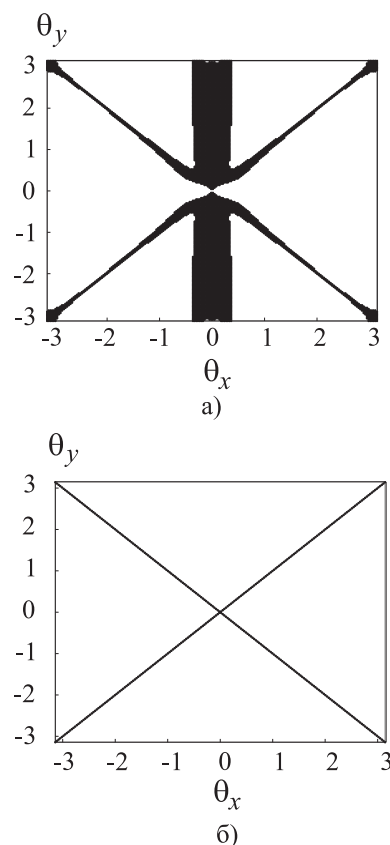


Рис. 2. Форма области устойчивости для случая режима 1 при $\Delta t = 1$, $U = 1$: а) $\nu = 2$; б) $\nu = 50$

4. Области устойчивости на плоскости (θ_x, θ_y) . При построении областей устойчивости в этом случае фиксировалось значение параметра U (предполагалось, что $U = 1$). Значения параметров ν и Δt , а следовательно, и τ , варьировались. Представленные ниже результаты приведены для случая, когда расчеты проводились при разбиении области изменения (θ_x, θ_y) — прямоугольника $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ равномерной сеткой из 200×200 узлов. Для каждого узла сетки решалась задача на собственные значения для матрицы G . Если максимальное собственное значение по модулю не превосходило единицы, то данный

узел считался относящимся к области устойчивости и на рисунке обозначался точкой. Численные расчеты производились также на сетках из 500×500 и 750×750 узлов, и существенных отличий от случая сетки из 200×200 узлов выявлено не было.

Отметим, что в случае $\nu = 0$ область устойчивости является пустой. В силу (8) равенство нулю параметра ν соответствует ситуации, когда $\tau = 1/2$, т.е. нарушается условие (10), полученное в случае отсутствия зависимости от пространственных переменных.

4.1. Случай режима 1. На рис. 1 и 2 представлена форма области устойчивости в случае фиксированного значения параметра Δt (полагалось $\Delta t = 1$) и изменения значения параметра ν .

Влияние изменения ν сказывается следующим образом: в случае малых ν область устойчивости является достаточно узкой (минимальные по модулю собственные значения находятся на прямой $\theta_x = 0$). При возрастании ν она расширяется (наибольшее число узлов, входящих в нее, было выявлено в случае $\nu = 0.25$), причем минимальные по модулю собственные значения тоже лежат на прямой $\theta_x = 0$. Затем, при $\nu > 0.3$, область устойчивости вновь сужается, при больших значениях ν сводясь к множеству, образованному объединением точек прямых $\theta_y = \theta_x$ и $\theta_y = -\theta_x$ (рис. 2б).

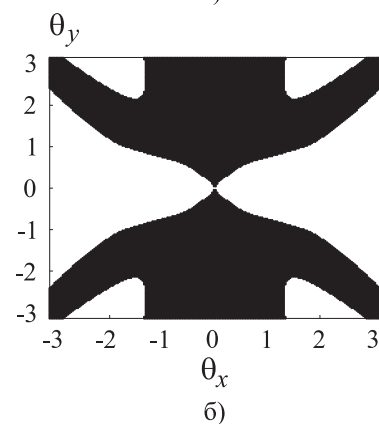
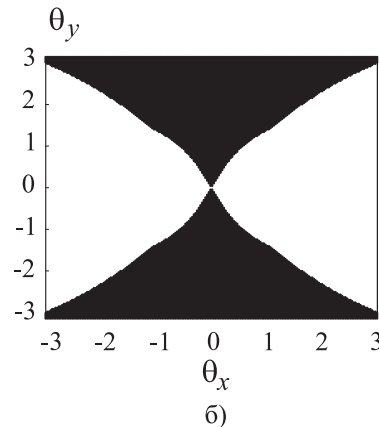
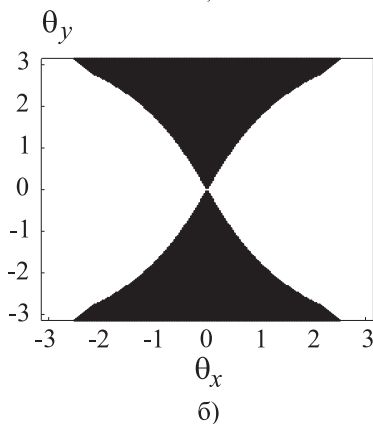
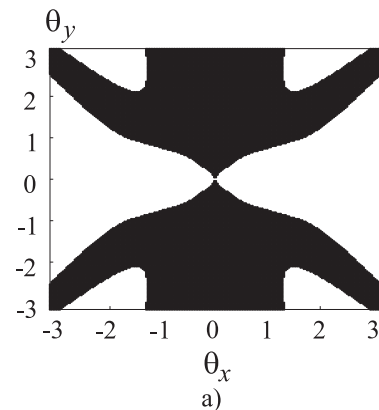
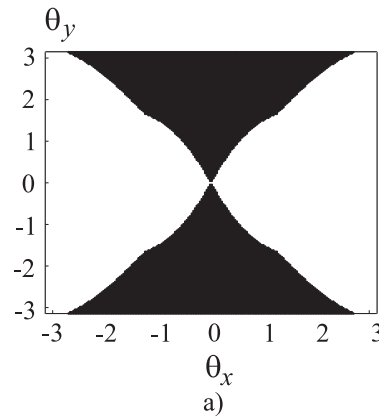
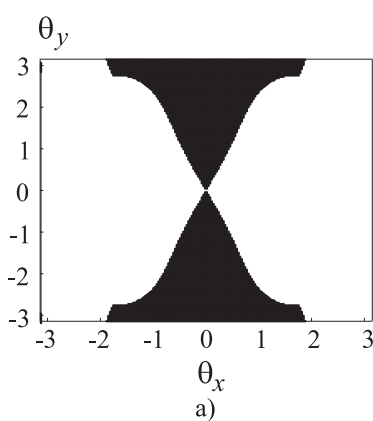


Рис. 3. Форма области устойчивости для случая режима 1 при $\nu = 0.05$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

Рис. 4. Форма области устойчивости для случая режима 1 при $\nu = 0.1$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

Рис. 5. Форма области устойчивости для случая режима 1 при $\nu = 0.5$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

Для исследования влияния изменения параметра Δt на форму области устойчивости его значение варьировалось при условии неизменности значения ν . На рис. 3–5 приведены формы области устойчивости в случае $\nu = 0.05$, $\nu = 0.1$ и $\nu = 0.5$ соответственно. Следует заметить, что при уменьшении Δt область устойчивости расширяется (максимальное число узлов для рассмотренных случаев имеет место при $\Delta t = 0.001$), но при последующем уменьшении Δt уже не меняется. В случае больших значений ν ($\nu \geq 10$) уменьшение Δt на форму области устойчивости уже никак не влияет.

4.2. Случай режима 2. Изображения области устойчивости для случая этого режима при $\Delta t = 1$ представлены на рис. 6 и 7 при различных значениях параметра ν . При увеличении значения ν ситуация аналогична той, которая имеет место в случае режима 1 — при увеличении ν до 0.3 область устойчивости расширяется, а затем она начинает сужаться, и при больших значениях ν она представляет собой отрезок

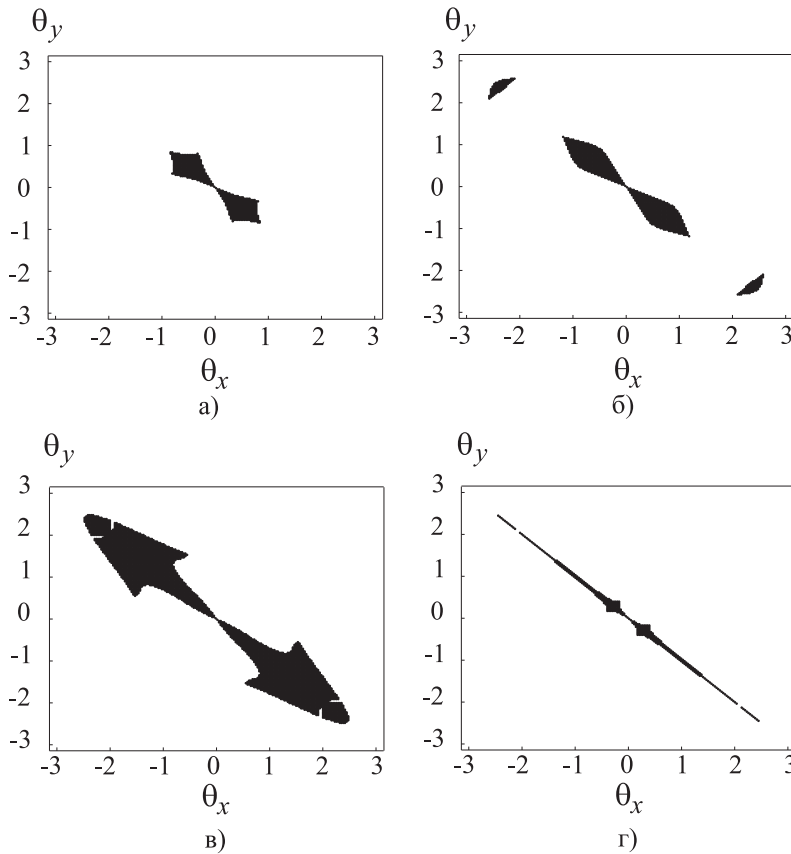


Рис. 6. Форма области устойчивости для случая режима 2 при $\Delta t = 1$, $U = 1$: а) $\nu = 0.05$; б) $\nu = 0.1$; в) $\nu = 0.25$; г) $\nu = 1$

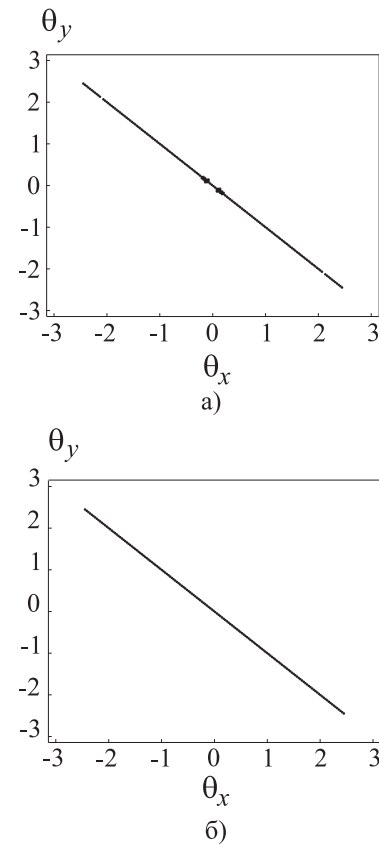


Рис. 7. Форма области устойчивости для случая режима 2 при $\Delta t = 1$, $U = 1$: а) $\nu = 2.5$; б) $\nu = 50$

прямой $\theta_y = -\theta_x$. При этом минимальные по модулю собственные значения оказались лежащими на прямой $\theta_y = -\theta_x$.

Форма области устойчивости для случая фиксированных значений ν при изменении значений Δt представлена на рис. 8–10 при $\nu = 0.05$, $\nu = 0.1$ и $\nu = 1$ соответственно.

Для этого режима при малых значениях ν уменьшение Δt приводит к расширению области устойчивости (после $\Delta t = 0.001$ форма области устойчивости уже неизменна). В случае больших значений ν ($\nu \geq 10$) уменьшение Δt на форму области устойчивости не влияет.

Сравнивая рассмотренные случаи двух режимов, можно сделать вывод о том, что изменение входных параметров влияет на изменение формы области устойчивости сходным образом. При этом необходимо отметить, что для обоих режимов наиболее неблагоприятная в плане устойчивости ситуация имеет место тогда, когда Θ и u сонаправлены: узлы, лежащие на этой прямой, не попадали в область устойчивости ни при одном значении параметров, а максимальные по модулю собственные значения, соответствующие этим узлам, всегда были больше единицы, и именно на этой прямой лежали собственные значения, максимальные по модулю из всех собственных значений для всех узлов сетки.

5. Области устойчивости на плоскости (τ, U) . При построении областей устойчивости в этом случае расчет производился при условии фиксирования значения параметра Δt и изменении значений ν и U . Параметр τ , вычисляемый по формуле (8) через Δt и ν и линейно зависящий от последнего, рассматривался в связи с тем, что в работе [12], с которой сравниваются результаты настоящей работы, представлены сведения о связи именно τ и U . Производилось разбиение области изменения τ и U — прямоугольника $[0, 2] \times [0, 1]$ равномерной сеткой из 100×100 узлов. Именно такой диапазон изменения параметров был выбран просто из соображений наглядности. Заметим, что в случае более широких областей изменения этих параметров ситуация остается аналогичной. Точка (τ_i, U_j) считалась входящей в область устойчивости на этой плоскости, если при таких значениях параметров τ и U максимальные по модулю собственные значения матрицы G по модулю не превосходили единицы для всех узлов сетки, построенной в прямоугольнике $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ на плоскости (θ_x, θ_y) .

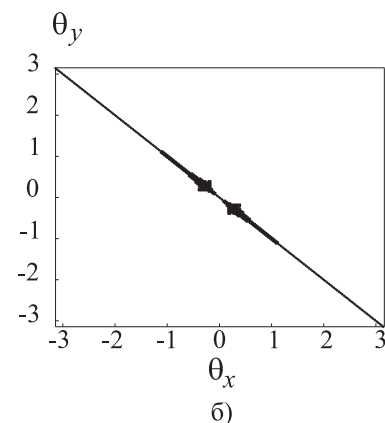
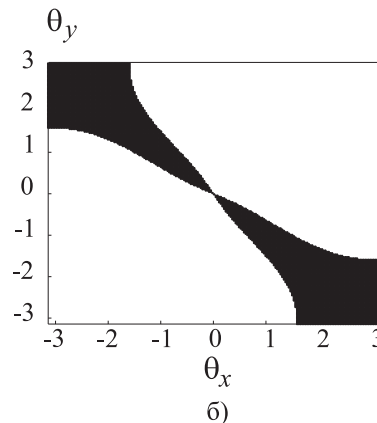
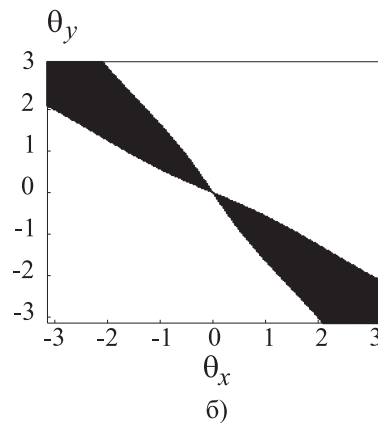
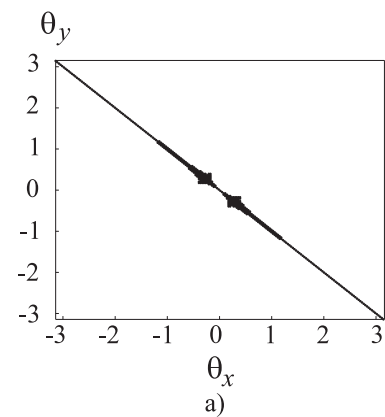
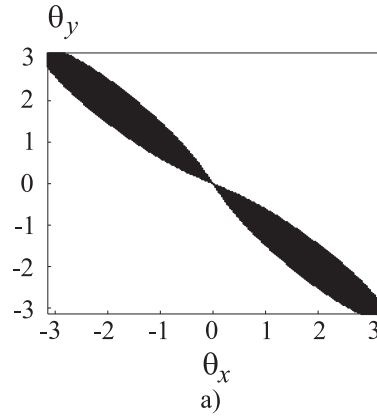
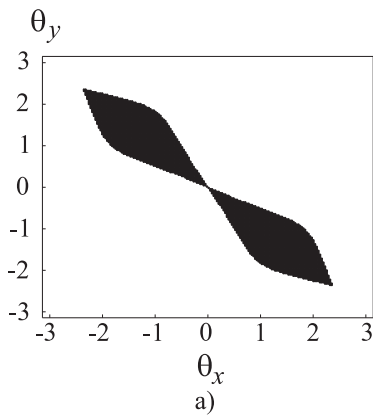


Рис. 8. Форма области устойчивости для случая режима 2 при $\nu = 0.05$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

Рис. 9. Форма области устойчивости для случая режима 2 при $\nu = 0.1$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

Рис. 10. Форма области устойчивости для случая режима 2 при $\nu = 1$, $U = 1$: а) $\Delta t = 0.5$; б) $\Delta t = 0.001$

5.1. Случай режима 1. На рис. 11 представлены формы области устойчивости в случае различных значений параметра Δt , а в табл. 1 приведены максимальные значения U и соответствующие им значения τ для заданных значений Δt . Отметим, что при $\Delta t \geq 2$ область устойчивости не изменяется.

По полученным результатам можно отметить, что при возрастании Δt область устойчивости сужается — максимальное число узлов входило в нее при $\Delta t = 0.05$, минимальное число узлов входило при $\Delta t = 2$ и выше. Максимально возможное значение $U_{\max} = 0.78$ имело место при $\Delta t = 0.05$, а минимальное $U_{\max} = 0.42$ — при $\Delta t \geq 1.25$. Необходимо отметить, что в работе [12], в которой варьировалось значение τ без учета изменения Δt , в качестве максимально возможного U , при котором имеет место устойчивость, указывается значение $U_{\max} = 0.42$, которое имеет место при $\tau \geq 0.68$.

5.2. Случай режима 2. На рис. 12 представлены формы области устойчивости в случае различных значений параметра Δt , а в табл. 2 приведены максимальные значения U и соответствующие им значения τ для заданных значений Δt . Отметим, что и в этом случае при $\Delta t \geq 2$ область устойчивости не изменяется.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при увеличении Δt область устойчивости заметно уменьшается — максимальное число узлов входило в нее при $\Delta t = 0.05$, минимальное число узлов входило при $\Delta t = 2$ и выше. Максимально возможное значение $U_{\max} = 0.43$ имело место при $\Delta t = 0.05$, а минимальное $U_{\max} = 0.32$ — при $\Delta t \geq 0.1$. Из представленных результатов становится понятно, что значение $U_{\max}$ при таком режиме течения меньше, чем при режиме 1, и области устойчивости, соответствующие тем же значениям параметров, значительно уже.

Как можно видеть, точки, соответствующие $\tau < \frac{1}{2}$, в область устойчивости не входят, что говорит о том, что условие (10) при рассмотрении таких режимов течения справедливо и в случае наличия зависимости от пространственных переменных.

6. Области устойчивости на плоскости $(\Delta t, \nu)$. При рассмотрении этого случая расчет производился при условии фиксирования значения параметра U и изменении значений Δt и ν . В качестве области изменения параметров, как и ранее, рассматривался прямоугольник $[0, 2] \times [0, 1]$, который разбивался рав-

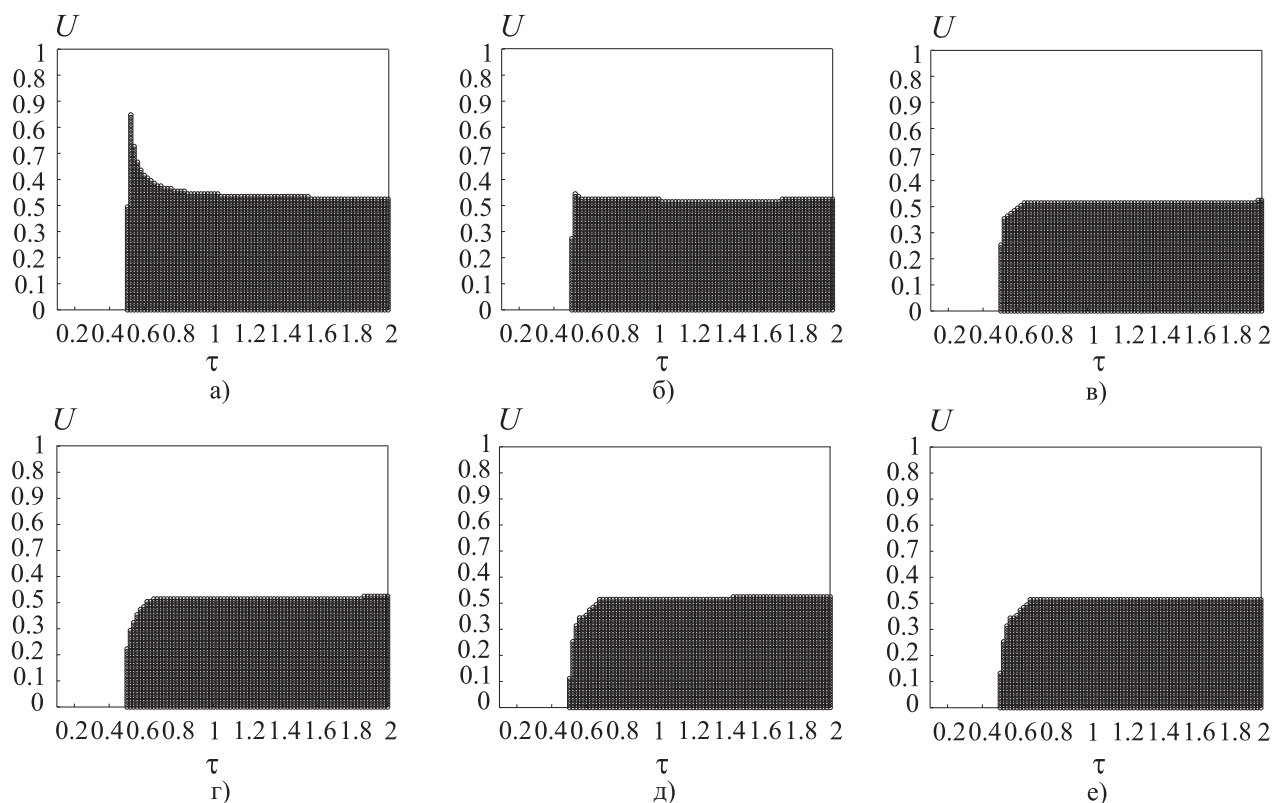


Рис. 11. Форма области устойчивости для случая режима 1 на плоскости (τ, U) при различных значениях Δt : а) $\Delta t = 0.05$; б) $\Delta t = 0.2$; в) $\Delta t = 0.3$; г) $\Delta t = 0.5$; д) $\Delta t = 1$; е) $\Delta t = 4$

Таблица 1
Связь Δt , максимальных значений U и соответствующих им значений τ для случая режима 1

Δt	$U_{\max}$	τ
$\Delta t = 0.05$	$U_{\max} = 0.78$	$\tau = 0.56$
$\Delta t = 0.1$	$U_{\max} = 0.53$	$\tau = 0.56$
$\Delta t = 0.2$	$U_{\max} = 0.45$	$\tau = 0.56$
$\Delta t = 0.25$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau \in [0.56, 0.71] \cup [1.96, 2]$
$\Delta t = 0.3$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau \in [1.98, 2]$
$\Delta t = 0.5$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau \in [1.82, 2]$
$\Delta t = 0.75$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau \in [1.61, 2]$
$\Delta t = 1$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau \in [1.42, 2]$
$\Delta t = 1.25$	$U_{\max} = 0.42$	$\tau \in [1.3, 2]$
$\Delta t = 1.5$	$U_{\max} = 0.42$	$\tau \in [1.21, 2]$
$\Delta t = 1.75$	$U_{\max} = 0.42$	$\tau \in [1.18, 2]$
$\Delta t = 2$	$U_{\max} = 0.42$	$\tau \in [0.63, 2]$

Таблица 2
Связь Δt , максимальных значений U и соответствующих им значений τ для случая режима 2

Δt	$U_{\max}$	τ
$\Delta t = 0.05$	$U_{\max} = 0.43$	$\tau = [0.56, 0.57]$
$\Delta t = 0.1$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [0.56, 0.57] \cup [1.22, 2]$
$\Delta t = 0.2$	$U_{\max} = 0.33$	$\tau \in [1.99, 2]$
$\Delta t = 0.25$	$U_{\max} = 0.33$	$\tau \in [1.98, 2]$
$\Delta t = 0.3$	$U_{\max} = 0.33$	$\tau \in [1.98, 2]$
$\Delta t = 0.5$	$U_{\max} = 0.33$	$\tau \in [1.22, 2]$
$\Delta t = 0.75$	$U_{\max} = 0.33$	$\tau \in [1.2, 2]$
$\Delta t = 1$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [1.91, 2]$
$\Delta t = 1.25$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [1.71, 2]$
$\Delta t = 1.5$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [1.84, 1.97]$
$\Delta t = 1.75$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [1.44, 2]$
$\Delta t = 2$	$U_{\max} = 0.32$	$\tau \in [1.68, 2]$

номерной сеткой из 100×100 узлов. Точка $(\Delta t_i, \nu_j)$ считалась входящей в области устойчивости, если при таких значениях параметров Δt и ν максимальные по модулю собственные значения матрицы G по модулю не превосходили единицы для всех узлов сетки, построенной в прямоугольнике $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ на плоскости (θ_x, θ_y) .

6.1. Случай режима 1. На рис. 13 приведены формы области устойчивости, полученные при раз-

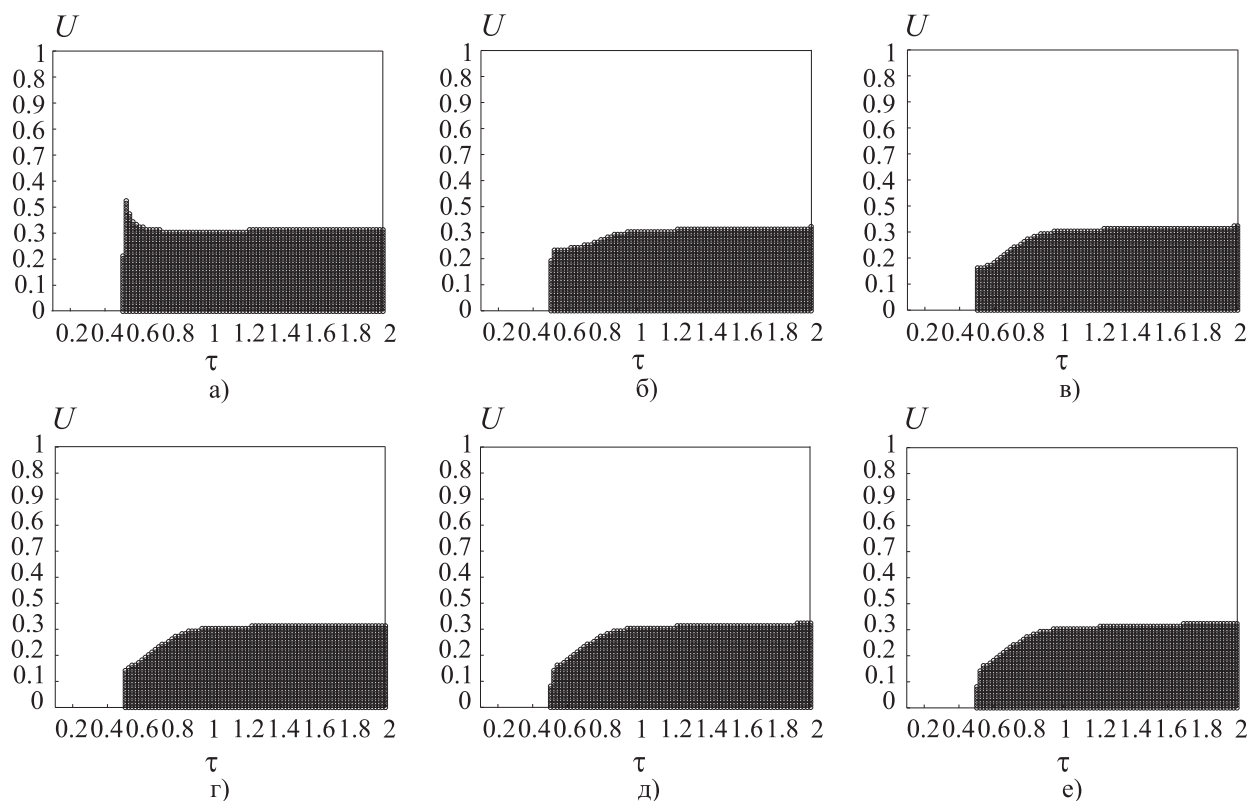


Рис. 12. Форма области устойчивости для случая режима 2 на плоскости (τ, U) при различных значениях Δt : а) $\Delta t = 0.05$; б) $\Delta t = 0.2$; в) $\Delta t = 0.3$; г) $\Delta t = 0.5$; д) $\Delta t = 1$; е) $\Delta t = 4$

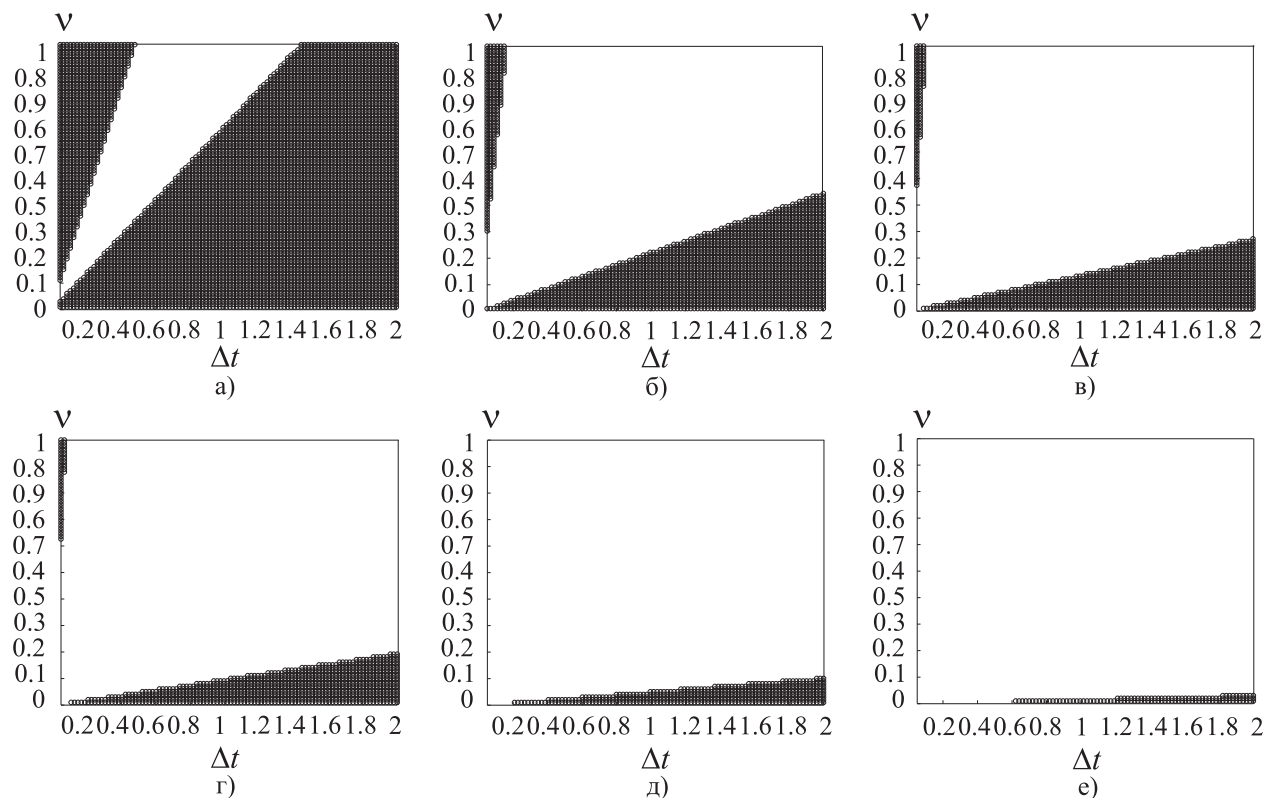


Рис. 13. Форма области устойчивости для случая режима 1 на плоскости $(\Delta t, V)$ при различных значениях U : а) $U = 0.43$; б) $U = 0.44$; в) $U = 0.45$; г) $U = 0.46$; д) $U = 0.49$; е) $U = 0.6$

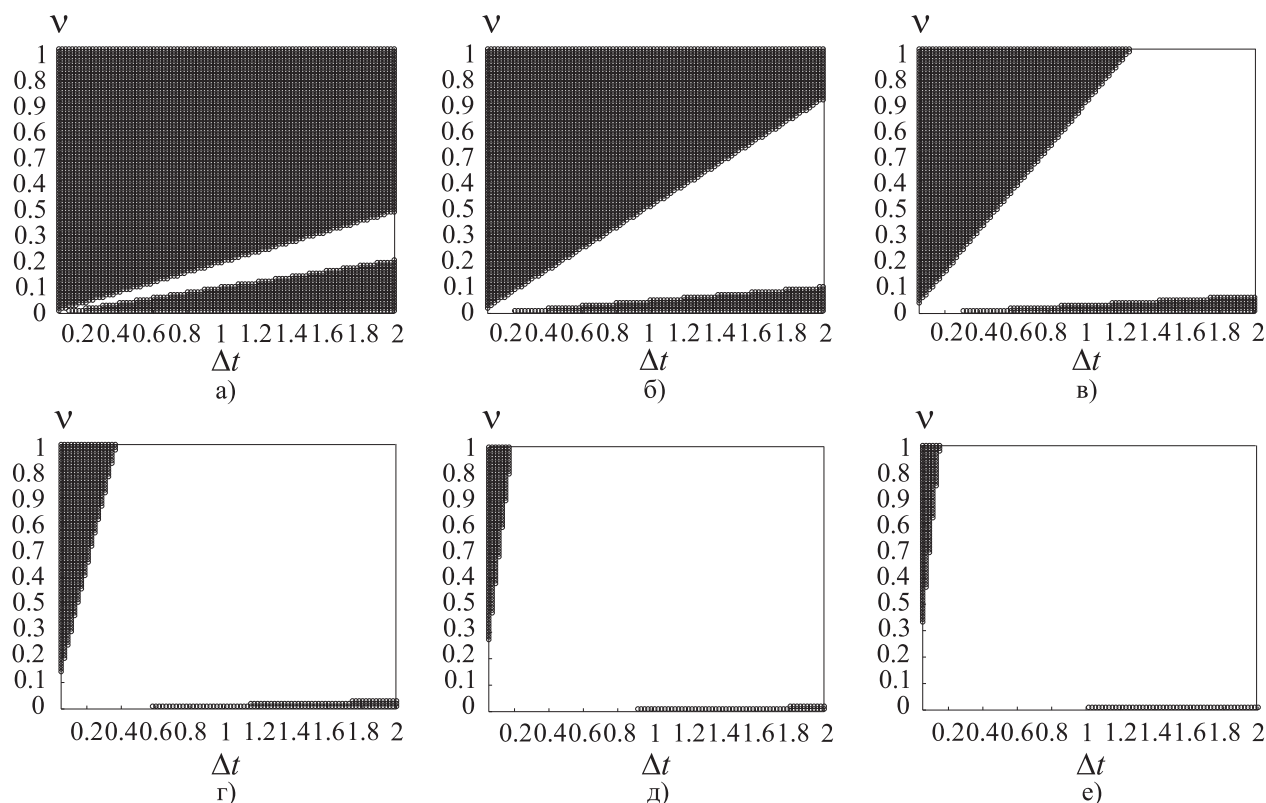


Рис. 14. Форма области устойчивости для случая режима 2 на плоскости $(\Delta t, \nu)$ при различных значениях U : а) $U = 0.31$; б) $U = 0.32$; в) $U = 0.33$; г) $U = 0.36$; д) $U = 0.39$; е) $U = 0.4$

личных значениях U . В случае такого режима вся указанная выше область изменения параметров совпала с областью устойчивости при $U \leq 0.42$. При больших значениях U область устойчивости сужается, становясь пустой при $U > 0.8$.

6.2. Случай режима 2. Формы областей устойчивости, построенных для случая данного режима, приведены на рис. 14. Отметим, что область устойчивости совпадает со всей областью изменения параметров (при фиксированном U) в случае $U \leq 0.3$, сужается при больших значениях U , а при $U > 0.45$ становится пустой. По аналогии с предыдущими случаями, при таком стационарном режиме область устойчивости становится пустой при меньших значениях U , чем в случае режима 1.

7. Заключение. Представленные в настоящей статье результаты позволяют судить о том, что даже в случаях простых однородных стационарных течений решеточная кинетическая схема Больцмана, основанная на использовании решетки $D2Q9$, является условно устойчивой, причем устойчивость схемы по начальным данным существенно зависит от входных параметров задачи. Свойство условной устойчивости, естественно, ограничивает класс течений, для расчета которых может использоваться рассмотренная схема. Возможно, что в смысле устойчивости ситуация лучше для решеточных неявных и полунеявных [17, 18] и конечно-разностных [19] схем Больцмана.

Полученные здесь результаты можно рассматривать как решения тестовых задач, которые могут оказаться полезными при проведении сравнения друг с другом как различных решеточных схем Больцмана, так и других кинетических схем. Определенный интерес представляет также исследование устойчивости кинетических схем в случаях нестационарных (например, пульсирующих) течений и пространственно-неоднородных стационарных течений. Большую важность имеют также исследования устойчивости по граничным условиям, поскольку, как отмечается в [20], различные типы граничных условий для решеточных схем Больцмана по-разному влияют на свойство их устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999.
2. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и высокопроизводительные многопроцессорные вычисления в газовой динамике // Вычислительные технологии. 2002. 7, № 6. 65–89.

3. Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений // Математическое моделирование. 1996. **8**, № 8. 17–36.
4. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
5. Sukop M.C., Thorne D.T. Lattice Boltzmann modeling. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
6. Dellar P.J. Lattice kinetic schemes for magnetohydrodynamics // J. of Computational Physics. 2002. **179**. 95–126.
7. Козан М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
8. Мачин Д.А., Четверушкин Б.Н. Кинетические и lattice Boltzmann схемы // Математическое моделирование. 2004. **16**, № 3. 87–94.
9. Amati G., Succi S., Piva R. Massively parallel lattice-Boltzmann simulation of turbulent channel flow // Int. J. of Modern Physics C. 1997. **8**, № 4. 869–877.
10. Argentini R., Bakker A.F., Lowe C.P. Efficiently using memory in lattice Boltzmann simulations // Future Generation Computer Systems. 2004. **20**. 973–980.
11. Schepke C., Maillard N., Navaux P.O.A. Parallel lattice Boltzmann method with blocked partitioning // Int. J. of Parallel Programming. 2009. **37**. 593–611.
12. Sterling J.D., Chen S. Stability analysis of lattice Boltzmann methods // J. of Computational Physics. 1996. **123**. 196–206.
13. Веденяпин В.В. Кинетические уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
14. Luo L.-S. Some results on discrete velocity models and ramifications for lattice Boltzmann equation // Computer Physics Communications. 2000. **129**. 63–74.
15. Рухтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
16. Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C. Matrix eigensystem routines. EISPACK guide. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 6. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
17. Lee T., Lin C.-L. A characteristic Galerkin method for discrete Boltzmann equation // J. of Computational Physics. 2001. **171**. 336–356.
18. Rector D.R., Stewart M.L. A semi-implicit lattice method for simulating flow // J. of Computational Physics. 2010. **229**. 6732–6743.
19. Sofonea V., Sekerka R.F. Viscosity of finite difference lattice Boltzmann models // Journal of Computational Physics. 2003. **184**. 422–434.
20. Latt J., Chopard B., Malaspinas O., Deville M., Michler A. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method // Physical Review E. 2008. **77**. 056703-1–056703-16.

Поступила в редакцию
19.03.2011
