УДК 530.18

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ БИЛЛИАРДОВ. ЧАСТЬ II

С. В. Поршнев[1]

В статье описаны вычислительные алгоритмы для оценки количественных характеристик процесса хаотизации движения материальной точки в рассеивающих биллиардах и их программная реализация, созданная с использованием пакета Mathcad 2000 Professional.

1. Введение. В [1] даны описания алгоритмов для вычисления траектории движения материальной точки в рассеивающих биллиардах с произвольной формой границы и их программной реализации с использованием пакета Mathcad 2000 Professional. Работоспособность этих программ была продемонстрирована на примере вычисления траектории движения материальной точки в простейшем биллиарде Синая [2, 3]. В данной статье приведено описание вычислительных алгоритмов и их программной реализации для количественного анализа хаоса, возникающего в рассматриваемых системах.

Напомним, что рассеивающие биллиарды относятся к классу $\mathcal{K}$-систем, в которых может возникать динамический хаос [1, 4]. При этом возникновение хаоса не связано с действием случайных сил, но целиком определяется внутренними свойствами динамической системы.

Движение динамической системы в фазовом пространстве $(\mathbf{z})$ обычно описывают с помощью отображения $\widehat{T}$:

$$z_{n+1} = \widehat{T} z_n,$$

якобиева матрица $\widehat{M}$ которого определяется как

$$M_{ij;n} = \frac{\partial z_{i,n+1}}{\partial z_{j,n}} \quad (i, j = 1, \dots, P),$$

где P — размерность фазового пространства. Отображение $\widehat{T}$ является невырожденным, если $|\widehat{M}| \neq 0$. Условие $\left|\widehat{M}\right| = 1$ означает, что фазовый объем сохраняется для любого момента времени n.

Анализ собственных значений λ_k, найденных из характеристического уравнения

$$\left|\widehat{M} - \lambda \hat{I}\right| = 0,$$

где $\hat{I}$ — единичная матрица порядка P, позволяет определить показатель расширения. Расположим собственные числа в порядке возрастания их абсолютных значений:

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_P|.$$

Пусть в направлении i-го собственного вектора происходит расширение на m-м шагу с характеристическим числом $|\lambda_{i,m}| > 1$. Будем считать, что при этом $|\lambda_{i,m}|$ не зависит от m. Тогда на n-ом шаге отображения длина вектора состояния в направлении i будет расти как

$$d_i(n) = |\lambda_i|^n d_i(0) = d_i(0) e^{\sigma_i n}, \quad \sigma_i \equiv \ln|\lambda_i|.$$

Здесь σ_i — показатель Ляпунова. Если показатели Ляпунова по различным направлениям сохраняются во времени, то локальная неустойчивость характеризуется достаточно простым выражением [5]

$$h_0 = \sum_{j>i}^{P} \sigma_j = \sum_{j>i}^{P} \ln(\lambda_j),$$

которое определяет показатель экспоненциального роста элемента фазового объема.

[1] Нижнетагильский государственный педагогический институт, ул. Красногвардейская, 57, 622031, г. Нижний Тагил; e-mail: psv@mail.tagil.ru

В общем случае показатели Ляпунова σ_i являются функцией точки z_n; кроме того, направления растяжения или сжатия векторов меняются в зависимости от n. Преодоление отмеченных трудностей потребовало значительных усилий [2, 3] и использования математических методов, далеко выходящих за рамки курсов математики большинства вузов.

Исходя из того, что рассматриваемая задача занимает особое место в общей теории динамических систем, а изучение ее основ предусмотрено образовательными стандартами, представляется необходимым разработать компьютерную программу для моделирования движения материальной точки в рассеивающем биллиарде. При этом программа должна не только демонстрировать особенности движения материальной точки на качественном уровне, но и давать возможность получать количественные оценки параметров динамического хаоса. С нашей точки зрения, для учебных целей вполне оправдано вместо подхода к решению рассматриваемой задачи, предложенного в [2, 3], использовать менее математически строгий, но более физически очевидный подход, основанный на вычислении траекторий движения частиц и выполнении с их использованием последующего количественного анализа особенностей поведения динамической системы.

2. Количественные характеристики динамического хаоса в биллиарде Синая. Следуя выбранному подходу к решению задачи, будем рассматривать траектории движения в биллиарде Синая двух материальных точек, которые в момент времени $t = 0$ находятся в точках с радиус-векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}$, где $|\Delta\boldsymbol{r}| \ll |\boldsymbol{r}_1|$, и имеют одинаковые скорости. Алгоритмы, используемые для вычисления траектории движения материальной точки в биллиарде Синая, и их программные реализации, разработанные в пакете Mathcad 2000 Professional, описаны в [1]. Траектории движения материальных точек с близкими начальными условиями представлены в электронной версии статьи [1] на рис. 12, который иллюстрирует разбегание траекторий.

Для получения количественных характеристик динамического хаоса будем использовать в рассматриваемой задаче не аппарат дискретных отображений, но значения радиус-вектора частицы, вычисленные на дискретной равномерной временной сетке. Для вычисления значений радиус-вектора частицы в равноотстоящие моменты времени можно использовать следующий алгоритм:

1) Вычислить моменты времени t_i, соответствующие нахождению материальной точки в начальной и конечной точках i-го отрезка траектории, используя значения координат концов отрезков траектории (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) ($i = 0, 1, \ldots, K-1$, где K — количество компонент вектора, содержащего координаты вершин и компоненты вектора скорости на i-м отрезке траектории) и абсолютное значение скорости $|v|$:

$$t_{i+1} = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{|v|}, \quad t_0 = 0.$$

2) Инициализировать счетчик номеров отрезков ломаной $k = 1$.

3) Инициализировать переменную $\Delta T = 0$.

4) Задать число узлов временной сетки Nt.

5) Занести координаты начальной точки траектории в вектор $\boldsymbol{R}_0$: $\boldsymbol{R}_0 = (x_0, y_0)$.

6) Вычислить значения узлов временной сетки T_j ($j = 0, 1, \ldots, Nt$):

$$T_j = \frac{t_{K-1}}{Nt}\, j.$$

7) Вычислять последовательно для каждого j значения координат радиус-вектора $\boldsymbol{R}_j = (X_j, Y_j)$ для каждого момента времени T_j до тех пор, пока выполнено условие $T_j \leqslant t_k$, по формулам:

$$X_{j+1} = x_0 + v_{x_{k-1}}(T_{j+1} - T_j), \quad Y_{j+1} = y_0 + v_{y_{k-1}}(T_{j+1} - T_j).$$

8) При нарушении условия $T_j \leqslant t_k$:

— увеличить счетчик номера отрезка на единицу: $k = k + 1$,

— вычислить новое значение переменной ΔT: $\Delta T = T_j - t_k$,

— вычислить новое значение координат вектора $\boldsymbol{R}_0$ по формулам $x_0 = x_{k-1} + v_{x_{k-1}}\Delta T$, $y_0 = y_{k-1} + v_{y_{k-1}}\Delta T$.

9) Повторять последовательность рассмотренных действий до тех пор, пока $j \leqslant Nt$.

Программная реализация описанного алгоритма представлена на рис. 1 и 2. Функция на рис. 2 имеет следующие аргументы: L — объединенная матрица (матрица, состоящая из столбцов матрицы, возвращенной функцией L4 [1], и вектора, возвращенного функцией Times); Tf — конечное значение временного интервала, используемого для вычисления координат радиус-вектора на равномерной временной сетке; Nt — число узлов временной сетки.

```
Times(L)   | v0    L0 2
           |       L0 3
           | t0    0
           | s0 0    0
           | for i   0  rows(L)   2
           |   | r     Li 1 0     Li 0
           |   |       Li 1 1     Li 1
           |   |                |r|
           |   | ti 1    ti    -----
           |   |               |v0|
           |   | si 1 0     ti 1
           | s
```

Рис. 1. Функция, возвращающая значения моментов времени, соответствующих положению точки в конечных точках отрезков траектории. Аргумент функции — матрица, возвращаемая функцией L4 [1]

```
Lt(L,Tf,Nt) := | Δt ← Tf/Nt
               | s0,0 ← 0
               | s0,1 ← L0,0
               | s0,2 ← L0,1
               | R0 ← (s0,1 ; s0,2)
               | k ← 1
               | ΔT ← 0
               | for i ∈ 1.. Nt
               |   | si,0 ← Δt · i
               |   | if si,0 ≤ Lk,5
               |   |   | si,1 ← R00,0 + Lk−1,2 · (si,0 − si−1,0 − ΔT)
               |   |   | si,2 ← R01,0 + Lk−1,3 · (si,0 − si−1,0 − ΔT)
               |   | otherwise
               |   |   | k ← k + 1
               |   |   | ΔT ← si,0 − Lk−1,5
               |   |   | R0 ← (Lk−1,0 + Lk−1,2 · ΔT ; Lk−1,1 + Lk−1,3 · ΔT)
               |   |   | si,1 ← R00,0
               |   |   | si,2 ← R01,0
               | s
```

Рис. 2. Функция, возвращающая значения координат радиус-вектора текущего положения материальной точки в равноотстоящие моменты времени

В качестве количественной характеристики величины разбегания траекторий можно использовать зависимость расстояния между траекториями, близкими в момент времени $t = 0$ от времени $D(t)$. Фрагмент документа, предназначенного для вычисления координат концов отрезков траекторий, близких в момент времени $t = 0$, значений радиус-векторов в равноотстоящие моменты времени, зависимости $D(t)$

и ее графического представления, приведен на рис. 3. На этом рисунке: K — число отражений от рассеивающей границы; R0 — радиус-вектор начальной точки траектории первой материальной точки; Δ — вектор сдвига начальной точки второй материальной точки; R1 — радиус-вектор начальной точки траектории второй материальной точки; L5, L6 — матрицы, содержащие значения вершин отрезков траектории первой и второй материальных точек, соответственно; T5, T6 — векторы, содержащие значения моментов времени, в которые материальные точки находятся в начальной и конечной точках i-го отрезка траектории; Nt — число узлов равномерной временной сетки; L55, L66 — объединенные матрицы, содержащие значения координат вершин отрезков траектории и значения соответствующих моментов времени; Tf — значение временного интервала, на котором производится вычисление координат материальных точек на равномерной временной сетке; Lt55, Lt66 — матрицы, содержащие координаты точек траектории в равноотстоящие моменты времени; Dt – вектор, содержащий значения расстояния между материальными точками, близкими в момент времени $t = 0$.

$$\mathrm{K} := 133$$

$$\mathrm{R0} := \begin{pmatrix} -3.3 \\ 3.63 \end{pmatrix} \quad \mathrm{v} := \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{L5} := \mathrm{L4}(\mathrm{R0}, \mathrm{v}, \mathrm{Bound}, \mathrm{Bound2}, \mathrm{K})$$

$$\Delta := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{R01} := \mathrm{R0} + \Delta \quad \mathrm{L6} := \mathrm{L4}(\mathrm{R01}, \mathrm{v}, \mathrm{Bound}, \mathrm{Bound2}, \mathrm{K})$$

$$\mathrm{T5} := \mathrm{Times}(\mathrm{L5}) \qquad \mathrm{T6} := \mathrm{Times}(\mathrm{L6})$$

$$\mathrm{L55} := \mathrm{augment}(\mathrm{L5}, \mathrm{T5}) \qquad \mathrm{L66} := \mathrm{augment}(\mathrm{L6}, \mathrm{T6})$$

$$\mathrm{Nt} := 2000$$

$$\mathrm{Tf} := \left| \begin{array}{ll} \left(\mathrm{L55}^{\langle 5 \rangle}\right)_{\mathrm{rows(L55)}-1} & \text{if } \left(\mathrm{L55}^{\langle 5 \rangle}\right)_{\mathrm{rows(L55)}-1} \le \left(\mathrm{L66}^{\langle 5 \rangle}\right)_{\mathrm{rows(L66)}-1} \\ \left(\mathrm{L66}^{\langle 5 \rangle}\right)_{\mathrm{rows(L66)}-1} & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Lt55} := \mathrm{Lt}(\mathrm{L55}, \mathrm{Tf}, \mathrm{Nt}) \qquad \mathrm{Lt66} := \mathrm{Lt}(\mathrm{L66}, \mathrm{Tf}, \mathrm{Nt})$$

$$\mathrm{Dt} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..\,\mathrm{Nt} \\ \quad s_i \leftarrow \sqrt{\left[\left(\mathrm{Lt55}^{\langle 1 \rangle}\right)_i - \left(\mathrm{Lt66}^{\langle 1 \rangle}\right)_i\right]^2 + \left[\left(\mathrm{Lt55}^{\langle 2 \rangle}\right)_i - \left(\mathrm{Lt66}^{\langle 2 \rangle}\right)_i\right]^2} \\ s \end{array} \right.$$

$$i := 0..\,\mathrm{Nt}$$

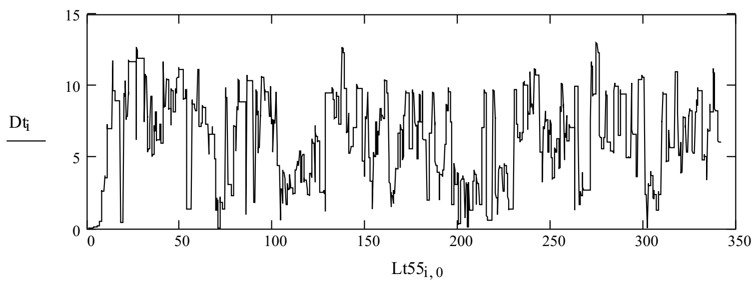


Рис. 3. Фрагмент документа для вычисления зависимости $D(t)$

Анализ зависимости $D(t)$, представленной на рис. 3, показывает, что при заданных начальных условиях после экспоненциально быстрого разбегания траекторий, близких в момент времени $t = 0$, с момента времени $t = 14{,}0$ движение материальных точек в биллиарде Синая становится хаотическим. Данный результат позволяет достаточно просто получить оценку h-энтропии для данных начальных условий:

$$h_0 \approx \frac{\ln\bigl(D(14{,}0)\bigr) - \ln\bigl(D(0)\bigr)}{14{,}0} \approx 0{,}8.$$

Более точную оценку h-энтропии для данных начальных условий можно получить, используя метод наименьших квадратов. Оценка "глобального" значения h_0 для биллиарда Синая с заданными размерами может быть получена усреднением значений h_0, найденных при различных начальных условиях.

Один из известных критериев проверки поведения динамической системы на хаотичность состоит в анализе спектров временных рядов, характеризующих систему (например, зависимости координаты от времени, скорости от времени и т.д.) [8]. В хаотическом режиме спектры временных рядов являются широкополосными, т.е. в них присутствует большое число гармоник с различными частотами. Наличие значений функции $D(t)$ в равноотстоящие моменты времени позволяет вычислить спектр данного временного ряда, используя для этого стандартную функцию пакета Mathcad CFFT(V), где V — n-мерный вектор (рис. 4). Анализ спектра зависимости $D(t)$, представленной на рис. 4, показывает, что в полном соответствии с одним из известных критериев стохастичности динамической системы [7] спектр является широкополосным.

$$\mathrm{Dts} := \mathrm{CFFT}(\mathrm{Dt}) \qquad i := 1 .. \frac{\mathrm{rows}(\mathrm{Dts}) - 1}{2}$$

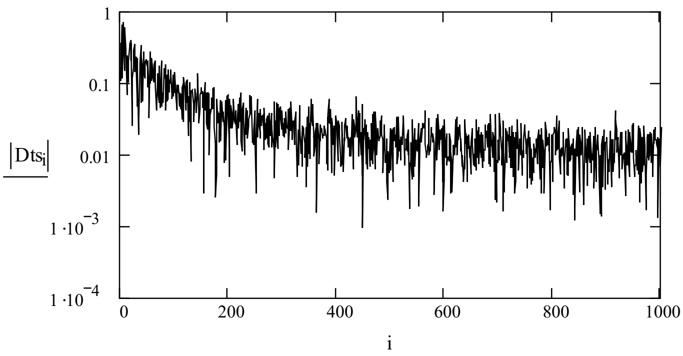


Рис. 4. Спектр зависимости $D(t)$ в полулогарифмическом масштабе

В связи с тем, что фазовое пространство рассматриваемой динамической системы является четырехмерным, его непосредственное изображение на двумерной плоскости (экране монитора) невозможно. В этих условиях для демонстрации перемешивания в фазовом пространстве можно использовать его проекции на трехмерные пространства (зависимости $v_x = f(x(t), y(t))$, $v_y = f(x(t), y(t))$ и т.д.) и двумерные плоскости (зависимости $v_x = f(x(t))$, $v_y = f(y(t))$ и т.д.). При этом для построения данных проекций удобно использовать отображение Пуанкаре, т.е. совокупность значений указанных функций, вычисленную в последовательные моменты времени $t_i = t_0, t_1, \ldots, t_n$. Алгоритм вычисления отображения Пуанкаре аналогичен описанному выше алгоритму вычисления координат материальной точки в равноотстоящие моменты времени. Функция, возвращающую отображение Пуанкаре, приведена рис. 5, на котором L — матрица, возвращенная функцией L4; Times — вектор, возвращенный функцией Time; N — количество точек отображения Пуанкаре.

На рис. 6 представлен фрагмент документа для вычисления отображения Пуанкаре в 1000 точках и построения зависимости $v_x = f(x(t), y(t))$. На этом рисунке приведено также отображение Пуанкаре для квадратного биллиарда, у которого отсутствует рассеивающая граница, т.е. биллиарда, не являющегося $\mathcal{K}$-системой. Представленные на рис. 6 отображения Пуанкаре наглядно демонстрируют существование перемешивания в биллиарде Синая и его отсутствие в квадратном биллиарде.

3. Задачи.

1) Постройте зависимость расстояния между траекториями, близкими в момент времени $t = 0$ от номера отображения.

2) Постройте проекции отображения Пуанкаре (зависимости $v_x = f(x)$, $v_y = f(y)$ и $v_x = f(x, y)$, $v_y = f(x, y)$) при различном числе точек отображения. Сравните полученные зависимости и объясните имеющиеся отличия.

3) Помимо расстояния между траекториями, близкими в момент времени $t = 0$, в качестве количественной характеристики степени разбегания траекторий можно использовать угол Θ между этими траекториями, который, как очевидно, равен углу между векторами скоростей материальных точек. Для этого случая:

— дополните описанный в статье документ фрагментом, позволяющим вычислять зависимость угла Θ от времени ($\Theta = \Theta(t)$) и отображать ее на графике,

— сравните зависимости $D(t)$ и $\Theta(t)$ и объясните полученный результат,

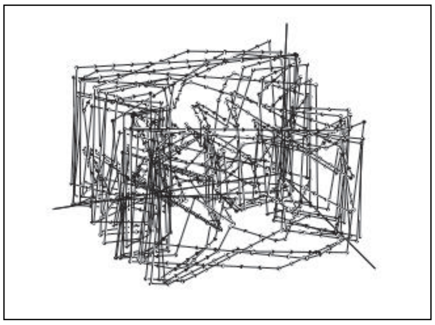
— используя зависимость $\Theta(t)$, оцените величину h_0 и сравните ее с аналогичной величиной, полученной с использованием зависимости $D(t)$,

```
P(L,Times,N) := | N1 ← rows(Times) − 1
                | T1 ← Times_{N1,0}
                | ΔT ← T1/N
                | j ← 0
                | for i ∈ 0.. N − 1
                |   | t ← ΔT · (i + 1)
                |   | while t > Times_{j,0}
                |   |   j ← j + 1
                |   | Δτ_i ← t − Times_{j−1,0}
                |   | V_{i,0} ← L_{j−1,0} + L_{j−1,2} · Δτ_i
                |   | V_{i,1} ← L_{j−1,1} + L_{j−1,3} · Δτ_i
                |   | V_{i,2} ← L_{j−1,2}
                |   | V_{i,3} ← L_{j−1,3}
                | V
```

Рис. 5. Функция, возвращающая значения отображения Пуанкаре

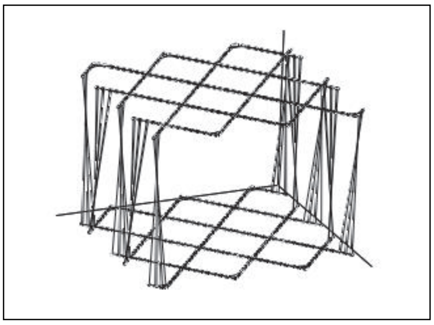
P1 := P(L6,T6,1000)

$X := P1^{\langle 0\rangle}$ $Y := P1^{\langle 1\rangle}$ $Z := P1^{\langle 2\rangle}$



(X,Y,Z)

Биллиард с рассеивающей границей



(X2,Y2,Z2)

Квадратный биллиард

Рис. 6. Фрагмент документа для вычисления и построения сечения отображения Пуанкаре плоскостью

— вычислите спектр зависимости $\Theta = \Theta(t)$ и отобразите его на графике,

— сравните спектры зависимостей $D(t)$ и $\Theta(t)$.

4) Дополните описанный в статье документ фрагментом, позволяющим вычислять траекторию движения материальной точки и отображение Пуанкаре для биллиарда Синая с отсутствующей рассеивающей границей. Постройте зависимости $v_x = f(x)$, $v_y = f(y)$ и $v_x = f(x, y)$, $v_y = f(x, y)$. Сравните полученные результаты с отображением Пуанкаре, представленным на рис. 6.

5) Дополните описанный в статье документ фрагментом, позволяющим вычислять траектории движения нескольких точек одновременно. Рассмотрите эволюцию во времени квадрата, образованного 8 материальными точками, имеющими в момент времени $t = 0$ одинаковые скорости.

6) Исследуйте зависимость h_0, значения которой оцениваются по зависимостям $D(t)$ и $\Theta(t)$, от координат начальной точки.

7) Дополните описанный в статье документ фрагментом, позволяющим вычислять значения h_0 для различных начальных точек и вычислять их среднее значение $\langle h_0\rangle$. Исследуйте зависимость $\langle h_0\rangle$ от соотношения между размерами биллиарда, радиусом рассеивающей окружности и положением ее центра.

4. Заключение. В статье описаны вычислительные алгоритмы для оценки количественных характеристик динамического хаоса, возникающего в рассеивающих биллиардах, и их программные реализации, разработанные в пакете Mathcad 2000 Professional. Показано, что возникновение хаоса можно наглядно продемонстрировать при рассмотрении зависимости расстояния между траекториями, близкими в момент времени $t = 0$, от времени $D(t)$, а также ее спектра. По зависимости $D(t)$ можно оценить время экспоненциального разбегания траекторий, после чего возникает хаотический режим, и величину h-энтропии. Предложен перечень задач для самостоятельного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поршнев С.В.* Численное моделирования рассеивающих биллиардов. Часть I // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 2. 49–55 (электронная версия статьи приведена в http://num-meth.srcc.msu.su).
2. *Синай Я.Г.* К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // ДАН СССР. 1963. **153**. 1261–1264.
3. *Синай Я.Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов // УМН, 1970, **25**. 141–192.
4. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
5. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
6. *Синай Я.Г.* О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. **124**. 768–770.
7. *Синай Я.Г.* О потоках с конечной энтропией // ДАН СССР. 1959. **125**. 1200–1202.
8. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию
27.06.2001