УДК 004.38; 515.14; 519.766.2

О МЕТРИКО-ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ В КОНСТРУКТИВНОМ МИРЕ КУБИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Г. Г. Рябов[1], В. А. Серов[1]

В статье развивается конструктивный подход к алгебраическому (моноидальному) представлению кубических структур в двух аспектах: расширение множества кубантов за счет введения кросс-кубантов и исследование их метрических (хаусдорфова–хэммингова метрика) и топологических свойств (кубические многообразия), а также рассмотрение особенностей реализации совмещенных компьютерных операций на моноидах как инструмента для организации супервычислений. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09–07–12135–офи_м).

Ключевые слова: n-куб, кубанты и кросс-кубанты, моноид, метрика Хаусдорфа–Хэмминга, совмещенные поразрядные операции, супервычисления, 3-сфера.

Введение. Общенаучная парадигма о единстве основных процессов в теоретической физике–топологии–логике–компьютерных вычислениях, в наиболее развернутой форме представленная в [1], подкрепляется целым рядом работ, в которых, образно говоря, идет лингвистическое (математическое) сближение и взаимопроникновение между этими научными дисциплинами [2–7]. В этом же смысле и следует рассматривать предлагаемый подход — построение конкретного конструктивного мира кубических структур на единичном n-мерном кубе как один из возможных фрагментов такого сближения между геометрической топологией, алгеброй и символьными вычислениями.

Представленный материал разбит на четыре раздела. В первом изложены результаты прошлых лет в сжатом виде. Второй раздел включает в себя рассмотрение расширенных операций над кубантами и этюдной задачи о прокладке “многомерного метро”. В третьем разделе вводится понятие кросс-кубантов и исследуются их свойства на примере построения многообразия 3-сферы (S^3). В четвертом разделе обсуждаются вопросы машинной реализации предложенных алгебраических структур с точки зрения распараллеливания (совмещения) процесса вычислений.

1. Кубанты и псевдокубанты. Метрика на кубантах. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и задано множество всех n-разрядных троичных слов $\{D\}$ с разрядами d_i из алфавита $\{0, 1, 2\}$. Число таких слов равно 3^n. Между номерами реперных векторов и номерами разрядов установлено взаимно-однозначное соответствие $\boldsymbol{e}_i \to d_i$. Разрядам $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{ik}$, принимающим значение 2, ставится в соответствие декартово произведение единичных отрезков, коллинеарных реперным векторам $\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ik}$, т.е. k-мерная грань в единичном n-кубе. Остальные $(n-k)$ разрядов в слове D со значениями 0 или 1 соответствуют отсутствию (0) или наличию (1) параллельного переноса (трансляции) этой грани по направлению реперного вектора, номер которого совпадает с номером данного разряда в слове. Таким образом, n-разрядный троичный код совмещает информацию о размерности грани и ее местоположении в n-кубе и при этом однозначным образом. Такое троичное n-разрядное слово названо кубантом (кубическим квантом). Формально для k-мерной грани F можно записать

$$F(k,p) = \prod_{\substack{i:\, d_i=2;\\ |i|=k}} \boldsymbol{e}_i \quad + \underset{\substack{j:\, d_j=0,1;\\ |j|=n-k}}{\mathbf{T}} \boldsymbol{e}_j,$$

где k — размерность грани и p — вершина трансляции. В принятой кодировке 0-грани (вершины n-куба) совпадают с общепринятыми координатами вершин единичного n-куба.

Для кубантов введена поразрядная операция умножения (пересечения), которая коммутативна, ассоциативна, дистрибутивна и задается следующими правилами:

$$0 \otimes 0 = 0, \quad 0 \otimes 1 = \emptyset, \quad 0 \otimes 2 = 0,; \quad 1 \otimes 2 = 1, \quad 2 \otimes 2 = 2. \tag{1}$$

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Ленинские горы, 119991, Москва; Г. Г. Рябов, зав. лабораторией, e-mail: genryabov@yandex.ru; В. А. Серов, науч. сотр., e-mail: v_serov_@mail.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

На основании этих правил расширенный алфавит будет выглядеть как $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ и этими символами кодируются как кубанты, так и любые произведения кубантов. Если два кубанта пересекаются (соответствующие грани имеют общую грань), то произведение их не содержит $\emptyset$. В случае когда пересечения кубантов нет (грани не имеют общих точек), то произведение содержит число разрядов с $\emptyset$, равное длине минимального пути по ребрам n-куба между этими гранями как множествами точек. Пользуясь в дальнейшем префиксной формой записи произведения, можно записать $\Pi(221110, 121212) = 121110$ — грани имеют общее ребро и $\Pi(221110, 120011) = 12\emptyset\emptyset1\emptyset$ — грани не пересекаются и длина минимального пути между гранями равна 3.

Слова, содержащие $\emptyset$, в дальнейшем будут называться псевдокубантами. Естественно доопределяется операция умножения для разрядов с $\emptyset$:

$$\emptyset \otimes \emptyset = \emptyset \otimes 0 = \emptyset \otimes 1 = \emptyset \otimes 2 = \emptyset. \tag{2}$$

Таким образом, все множества n-разрядных четверичных слов алфавита $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$ относительно введенной операции умножения (1), (2) образуют полугруппу с единицей (моноид), где единицей является слово $22\ldots2$ (т.е. весь n-куб). Число членов моноида равно 4^n, из которых 3^n — кубанты.

Подмножеству из m n-мерных кубантов по аналогии с матрицей смежностей для графов ставится в соответствие матрица парных произведений кубантов. Ниже приведен пример такой матрицы для подмножества кубантов $\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$, в котором $D_1 = 220000$, $D_2 = 112200$, $D_3 = 111122$, $D_4 = 000022$, $D_5 = 002211$ и $D_6 = 221111$. Матрица — симметрическая, элементы под главной диагональю опущены:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
D_1	D_1	110000	$11\emptyset\emptyset00$	000000	$0000\emptyset\emptyset$	$22\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset$
D_2		D_2	111100	$\emptyset\emptyset0000$	$\emptyset\emptyset22\emptyset\emptyset$	$1111\emptyset\emptyset$
D_3			D_3	$\emptyset\emptyset\emptyset\emptyset22$	$\emptyset\emptyset1111$	111111
D_4				D_4	000011	$00\emptyset\emptyset11$
D_5					D_5	001111
D_6						D_6

Отсюда следует, что грани образуют цикл, пересекаясь по вершинам, которым соответствуют элементы матрицы, не содержащие символов $\emptyset$.

На множестве кубантов введена хаусдорфова–хэммингова метрика (HH-метрика) [10]. Сначала вводится бинарная поразрядная операция хаусдорфова сжатия одного кубанта относительно другого, обозначаемая как $D_1/D_2 = D_1^*$ или $D_2/D_1 = D_2^*$. Вычисления разрядов результата этой операции осуществляются по следующим правилам (левые разряды (до косой черты) относятся к кубанту, указанному первым, а правые (после косой черты) к кубанту, указанному вторым):

$$D_1/D_2 \;\to\; 0/0 = 0/1 = 0/2 = 0, \quad 1/0 = 1/1 = 1/2 = 1, \quad 2/0 = 1, \quad 2/1 = 0, \quad 2/2 = 2. \tag{3}$$

Грубо говоря, вычисляется наиболее удаленная часть (в смысле длины кратчайшего пути) первого кубанта относительно второго — разряды первого кубанта с символом 2, где разряд с тем же номером второго кубанта имеет символ 0, заменяются на 1, и наоборот, когда противоположный разряд 1, то заменяются на 0. Так получаемая часть также является кубантом, и затем берется произведение этой части на второй кубант для вычисления длины кратчайшего пути. Затем кубанты меняются местами и проходит та же последовательность операций. Из двух кратчайших путей выбирается максимальный по длине. Если обозначить операцию подсчета разрядов с символом $\emptyset$ через $w(\ldots)$, то можно записать

$$\begin{aligned} &\rho_{\mathrm{HH}}(D_1, D_2) = \max\Big\{L_{\min}\big(D_1/D_2,\, D_2\big);\, L_{\min}\big(D_2/D_1,\, D_1\big)\Big\}, \quad \text{или} \\ &\rho_{\mathrm{HH}}(D_1, D_2) = \max\Big\{w\Big(\Pi\big(D_1/D_2,\, D_2\big)\Big);\, w\Big(\Pi\big(D_2/D_1,\, D_1\big)\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Так, для кубантов $D_1 = 120121$ и $D_2 = 012212$ на основании (3) и (4) имеем

$$\rho_{\mathrm{HH}}(D_1, D_2) = \max\Big\{w\big(\Pi(100101, 012212)\big);\, w\big(\Pi(011010, 120121)\big)\Big\} = \max\{3; 4\} = 4.$$

Легко видеть, что если кубанты являются вершинами n-куба, то определенная выше метрика совпадает с хэмминговой. Поэтому корректно применять сокращение “HH-метрика”. Таким образом, множество

всех n-кубантов образует НН-метрическое пространство, которое полностью описывается целочисленной симметрической $(n \times n)$-матрицей всех парных расстояний между кубантами.

2. Расширение операций над кубантами и подмножествами кубантов. Вводятся следующие операции (операторы) на кубантах: граница и выпуклая оболочка подмножества кубантов.

Граница k-мерного кубанта — множество кубантов размерности $k-1$ (их число равно $2k$), соответствующих гиперграням k-куба. Алгоритм вычисления границы состоит в последовательной замене каждого разряда слова со значением 2 на два слова со значениями 0 и 1 в этом разряде. Префиксная запись операции аналогична общепринятой. Так, например, $\partial I^n = 2nI^{n-1}$. В качестве примера можно взять $\partial(012120) = \{010120, 011120, 012100, 012110\}$.

Выпуклая оболочка подмножества кубантов — кубант (грань) минимальной размерности, содержащий все кубанты (грани) подмножества. Операция (коммутативная, ассоциативная, дистрибутивная) для двух кубантов реализуется поразрядными действиями по следующим правилам: $0\&0 = 0$, $0\&1 = 2$, $0\&2 = 2$, $1\&1 = 1$, $1\&2 = 2$ и $2\&2 = 2$. Так, например, $\operatorname{conv}\{011221, 211211, 112001\} = 212221$.

Расширение понятия минимального пути для кубантов. Пусть в n-кубе заданы две грани (кубанта). Длина минимального пути между этими гранями по ребрам куба вычисляется с помощью умножения. Число символов O в произведении кубантов дает длину этого пути, т.е. число ребер (тоже кубантов, но размерности один), по которым проходит один из кратчайших путей. Смежные ребра в таком пути имеют общие вершины (кубанты нулевой размерности). По аналогии с этим можно рассматривать d-размерный кратчайший путь из наименьшего числа кубантов d-размерности, имеющих попарно общие кубанты размерности $d-1$. Образно говоря, можно представить такой 2-путь как шоссе-“бетонку” с примыкающими друг к другу квадратными плоскими бетонными плитами. Формально, d-путь из кубанта D_1 в кубант D_2 есть множество кубантов $\{D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1s}\}$, такое, что $\Pi(D_1, D_{11}) \neq \emptyset$ (ни один из разрядов произведения не равен $\emptyset$) и $\Pi(D_2, D_{1s}) \neq \emptyset$, $\dim D_{1i} = d$, $\dim \Pi(D_{1i}, D_{1i+1}) = d-1$ для $i = 1-s$ при минимальном s. Так, отсюда в n-кубе имеем $L_{\min}/d\{00\ldots0;\ 11\ldots1\} = n-d+1$.

Рассмотрим этюдную задачу, неформальная постановка которой звучит так. В 9-кубе проложить три трехмерных кратчайших непересекающихся “тоннелей” от станции $00\ldots0$ до станции $11\ldots1$. Формальная постановка будет выглядеть следующим образом. Построить три подмножества $\{D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{17}\}$, $\{D_{21}, D_{22}, \ldots, D_{27}\}$ и $\{D_{31}, D_{32}, \ldots, D_{37}\}$, соответствующих кратчайшим ($s = 7$) 3-путям из вершины $00\ldots0$ в вершину $11\ldots1$. Условие отсутствия пересечения: для всех пар m и k выполнено

$$\Pi(D_{1m}, D_{2k}) = \emptyset, \quad \Pi(D_{1m}, D_{3k}) = \emptyset, \quad \Pi(D_{2m}, D_{3k}) = \emptyset.$$

Кроме того, справедливы включения $00\ldots0 \in D_{11}, D_{21}, D_{31}$ и $11\ldots1 \in D_{17}, D_{27}, D_{37}$.

Прежде всего, рассмотрим фрагмент (звено из трех последовательных кубантов) одного из подмножеств, которые следует построить. В связи с симметричностью репера будем условно считать, что в этом фрагменте задействованы векторы, номера которых следуют друг за другом. Представим такой типичный фрагмент в виде столбика кубантов:

$$\begin{matrix} \ldots 002221\ldots \\ \ldots 022211\ldots \\ \ldots 222111\ldots \end{matrix}$$

В таком столбике легко видеть выполнение размерности кубантов и их парных пересечений — общие символы 2 в двух разрядах у последовательных кубантов. Исходя из этого типичного фрагмента, строим одно из подмножеств в виде столбика из 7 кубантов, а затем аналогично и два других:

$$T_1 = \begin{matrix} 000000222 \\ 000002221\# \\ 000022211 \\ 000222111 \\ 002221111 \\ 022211111 \\ 222111111 \end{matrix}, \quad T_2 = \begin{matrix} 000222000 \\ 002221000 \\ 022211000 \\ 222111000, \\ 221111002 \\ 211111022 \\ 111111222 \end{matrix}, \quad T_3 = \begin{matrix} 222000000 \\ 221000002 \\ 211000022 \\ 111000222. \\ 111002221 \\ 111022211 \\ 111222111 \end{matrix} \tag{5}$$

Легко проверить выполнение всех условий задачи. Графическая интерпретация представлена на рис. 1. Графические интерпретации многомерных структур следует рассматривать скорее как наброски для подкрепления интуитивного сопоставления с трехмерными структурами. При выбранном упрощенном способе плоской проекции n-мерной структуры некоторые вершины могут отображаться в одни и те же точки на плоскости. Это не мешает такой графике оставаться полезной при простых построениях.

Отметим, что для всех трех подмножеств одновременная перестановка столбцов символов сохраняет выполнение всех условий задачи, хотя подмножества геометрически будут отличными от исходных.

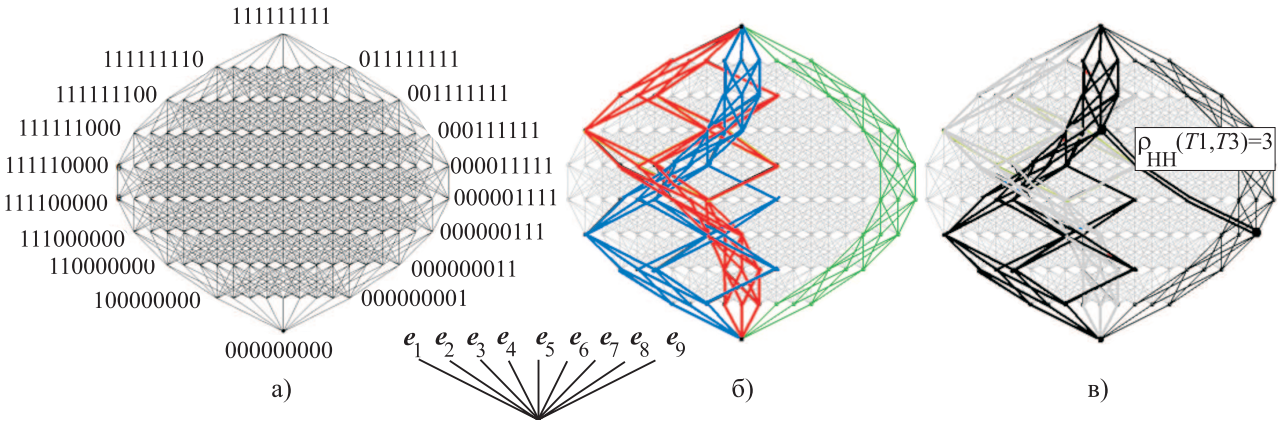


Рис. 1. Положение подмножеств кубантов — “тоннелей” в 9-кубе: а) плоская проекция 9-куба; б) 3-грани “тоннелей”; в) пример реализации $\rho_{\text{НН}}(T_1, T_3) = 3$

Этот факт может быть использован при задании некоторых ограничений на решение. Допустим, задана “дефектная” вершина или даже кубант, с которыми не должны пересекаться пути. Тогда, имея исходное решение, ищется перестановка столбцов символов с наилучшим эффектом. В качестве примера рассмотрим требование, чтобы ни один из кубантов во всех трех подмножествах не содержал вершину 000001111. Каждая вершина либо не принадлежит ни одному из подмножеств (5), либо принадлежит только одному из этих подмножеств, в данном случае T_1 (кубанту 000002221, помечен #). Достаточно выполнить перестановку 5-го и 9-го столбцов, чтобы исключить эту вершину из подмножеств, которые после этого приобретут следующий вид:

$$T_1^* = \begin{matrix} 000020220 \\ 000012220 \\ 000012212 \\ 000212112, \\ 002211112 \\ 022211111 \\ 222111111 \end{matrix} \quad T_2^* = \begin{matrix} 000202002 \\ 002101002 \\ 022201001 \\ 222101001, \\ 221121001 \\ 211121021 \\ 111121221 \end{matrix} \quad T_3^* = \begin{matrix} 222000000 \\ 221020000 \\ 211020000 \\ 111020220. \\ 111012220 \\ 111012212 \\ 111212112 \end{matrix}$$

Исходя из (3) и (4), легко вычисляется НН-метрика между каждой парой кубантов. Хаусдорфова метрика между подмножествами кубантов (тоннелями) вычисляется как метрика между двумя множествами точек, где в нашем случае точками являются кубанты как точки НН-метрического пространства. Прямым расчетом получаем $\rho_{\text{НН}}(T_1, T_2) = \rho_{\text{НН}}(T_1, T_3) = \rho_{\text{НН}}(T_2, T_3) = 3$. Поскольку при одновременной перестановке столбцов в T_1, T_2, T_3 инвариантными остаются и НН-расстояния, то получим $\rho_{\text{НН}}(T_1^*, T_2^*) = \rho_{\text{НН}}(T_1^*, T_3^*) = \rho_{\text{НН}}(T_2^*, T_3^*) = \rho_{\text{НН}}(T_1, T_2) = 3$. На рис. 1в показаны НН-расстояния от одного из кубантов до кубантов другого подмножества.

3. Кросс-кубанты, алфавит, операции, свойства. Естественным расширением кубантов является множество кросс-кубантов, которое строится следующим образом. Для заданного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в точке начала координат рассматривается базис $-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2, \ldots, -\boldsymbol{e}_n$ и n-разрядное слово $d_1, d_2, \ldots, d_n$, где d_i из алфавита {-2; -1; 0; 1; 2}. Таким образом, рассматривается конструкция, когда около точки $00\ldots0$ n-кубы выступают как ортанты, образуя n-окрестность, и n-разрядное пятеричное слово однозначно соответствует грани из этих ортантов, в том числе может соответствовать и целиком некоторому ортанту, когда все символы в слове только -2 и 2. Будем называть такие объекты кросс-кубантами.

По аналогии с предыдущим выпишем поразрядные правила операции умножения:

$$\begin{array}{llllll}
-2 \otimes -2 = -2; & & & & & \\
-2 \otimes -1 = -1; & -1 \otimes -1 = -1; & & & & \\
-2 \otimes \ \ 0 = \ \ 0; & -1 \otimes \ \ 0 = \ \emptyset_1; & 0 \otimes 0 = 0; & & & \\
-2 \otimes \ \ 1 = \ \emptyset_1; & -1 \otimes \ \ 1 = \ \emptyset_2; & 0 \otimes 1 = \emptyset_1; & 1 \otimes 1 = 1; & & \\
-2 \otimes \ \ 2 = \ \ 0; & -1 \otimes \ \ 2 = \ \emptyset_1; & 0 \otimes 2 = 0; & 1 \otimes 2 = 1; & 2 \otimes 2 = 2, &
\end{array}$$

где будем считать $\emptyset_1$ за один символ из алфавита, а $\emptyset_2$ — за другой в расширенном (семеричном) алфавите $\{\emptyset_1; \emptyset_2; -2; -1; 0; 1; 2\}$; принятые здесь обозначения удобны для мнемоники: $\emptyset_1$ соответствует “проходу” по

одному ребру n-куба для минимального пути, а $\emptyset_2$ — по двум ребрам. Отсюда для кросс-кубантов (111222) и (0-2-1-1-2-2) получаем длину минимального пути (рис. 2):

$$\Pi(111222, 0\text{-}2\text{-}1\text{-}1\text{-}2\text{-}2) = \emptyset_1\emptyset_1\emptyset_2\emptyset_1 00 \to L_{\min} = 1+1+2+1 = 5.$$

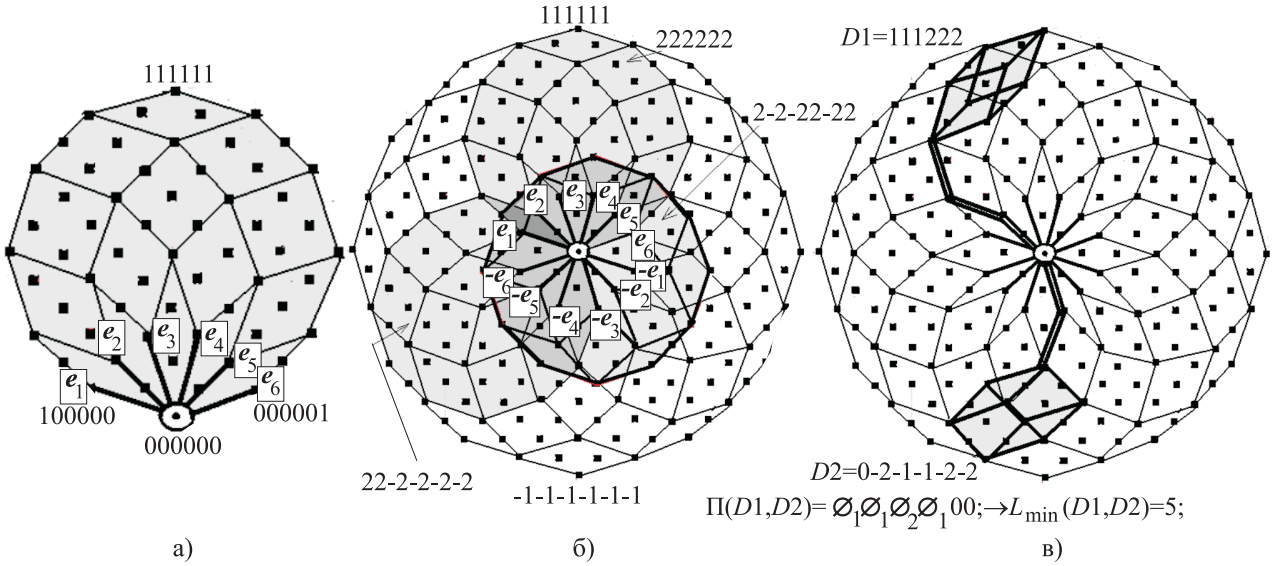


Рис. 2. 6-куб (кубант 222222) (а), кубическая 6-окрестность, тонированы три ортанта, которые соответствуют кросс-кубантам 222222; 2-2-22-22; 22-2-2-2-2 (б); длина минимального пути между кросс-кубантами (в); ребра показаны не все

Приведем простые соотношения для числа k-граней при ортантной n-мерной окрестности, которые сопоставляются с данными для n-куба:

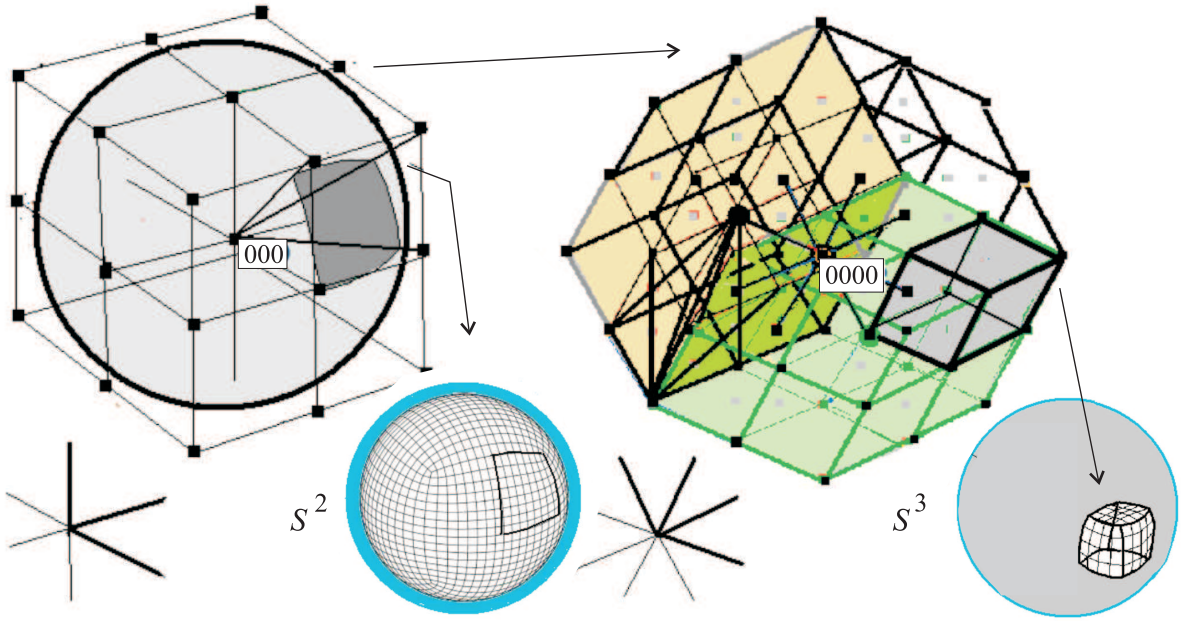
	n-куб	n-окрестность
кодирование k-граней (кубантов)	троичное	пятеричное
кодирование элементов моноида (кубанты и псевдокубанты)	четверичное (один доп. символ)	семеричное (два доп. символа)
комбинаторная схема	$K_1 = (1+2)^n$	$K_2 = (2+3)^n$

В комбинаторной схеме $K_1 = (1+2)^n$ число 1 соответствует числу символов (в данном случае одного символа “2”), обозначающих число разрядов в кодировании сомножителей декартова произведения, а число 2 соответствует двум символам “0” и “1” для кодирования трансляции. Отсюда число k-граней в n-кубе равно k-му члену разложения, т.е. $C_n^k\, 2^{n-k}$. Аналогично для схемы $K_2 = (2+3)^n$ число 2 равно числу символов (“2” и “-2”) для декартова произведения, а число 3 равно числу символов (“-1”, “0”, “1”) для кодирования трансляции. В этом случае общее число граней всех размерностей в n-окрестности равно 5^n, а число k-мерных граней равно $C_n^k\, 2^k\, 3^{n-k}$.

В рамках множества кросс-кубантов рассмотрим возможности представления 3-сферы. Начнем с рассмотрения построения 2-сферы для 3-окрестности, которое будет использовано как аналогия для построения 3-сферы. Так, на рис. 3 показано традиционное изображение для 3-окрестности с легко воспринимаемыми восемью октантами. Общее число 2-граней (2-кросс-кубантов) в соответствии с (5) равно 36, из которых 12 содержат начало координат (один из трех символов в слове равен 0). Таким образом, 24 двумерных граней образуют замкнутое многообразие, гомеоморфное 2-сфере. Достаточно легко представить отображение вершин окрестности на поверхность единичной сферы. Так, координаты каждой вершины 3-окрестности (кроме начала координат) преобразуются по простому правилу

$$\operatorname{ren}(Vi \to Vi^*) = V_i(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}) \to V_i^*\big(d_{i1}^*, d_{i2}^*, d_{i3}^*\big), \quad \text{где} \quad d_{ij}^* = d_{ij}\left(\sqrt{\sum |d_{ij}|^2}\right)^{-1}. \tag{6}$$

В результате получается раскрой сферы из 24 конгруэнтных “квадратоподобных” кусков с ребрами — дугами больших кругов единичной сферы.



а) б)

Рис. 3. Отображение на сферу единичного радиуса вершин кубической 3-окрестности: а) пример кубоидной конформной сферы S^2 в проекте MIT-gcm; б) 4-окрестность и 3-грани на ее границе (показаны не все), вершины которых отображаются на 3-сферу согласно (6). На одной из 3-граней из S^3 показана триангуляция

Аналогичные построения для 4-окрестности приводят к 80 вершинам ($3^n - 1$, все вершины 4-окрестности без начала координат), 64 трехмерным граням ($n2^n$ из общего числа 3-мерных граней) на границе окрестности как “заготовке” для 3-сферы. На языке кубантов (4-х разрядных пятеричных слов) это имеет лаконичную форму — граница 4-окрестности состоит из всех 3-кубантов четырехразрядных слов, у которых три разряда с символами {-2; 2} и один разряд с символами {-1, 1}. Стыковка этих граней по двумерным граням однозначно вычисляется произведением кубантов, как и вычисление всех элементов матрицы парных произведений.

Для сжатого представления 3-сферы рассмотрим такое разбиение множества номеров разрядов слова (кубанта) на два непересекающихся подмножества мощностью n_1 и n_2, что для всех i и j выполнено

$$n = n_1 + n_2, \quad \text{part}\,(n) = n_1, n_2, \quad \{1, 2, \ldots, n\} = \{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n_1}\} \cup \{p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n_2}\}, \quad p_{1i} \neq p_{2j}.$$

Множество всех пар таких подмножеств обозначим через $\Xi = \{P_{1s}, P_{2s}\}$, $s = 1 - \mathrm{C}_n^{n_1}$.

Если положить, что для каждой пары P_{1s}, P_{2s} разряды с номерами из P_{1s} содержат символы из некоторого подмножества алфавита, а разряды с номерами из P_{2s} содержат остальные символы алфавита, то это формально можно обозначить так: $\alpha(P_1) \in \{.,\ldots\}$; $\alpha(P_2) \in \{.,\ldots\}$. В целом, опираясь на (6), можно записать сжатое формальное представление сначала множества кубантов (3-граней), отображаемых на 3-сферу, а затем после переномировки координат вершин и S^3 единичного радиуса в следующем виде:

$$\begin{aligned} S^3(D) &= \Big\{\forall\, D:\ \dim\, D = 4;\ \text{part}\,(4) = 3, 1;\ |P1| = 3;\ |P2| = 1;\ \alpha(P1) \in \{-2, 2\};\ \alpha(P2) \in \{-1, 1\}\Big\}, \\ S^3 &= \text{ren}\,\big(Vi \to Vi^*/S^3(D)\big). \end{aligned} \tag{7}$$

Графическая интерпретация $S^3(D)$ показана на рис. 4. Конструкция (7) без труда экстраполируется и на случай n-размерности:

$$\begin{aligned} S^n(D) &= \Big\{\forall\, D:\ \dim\, D = n + 1;\ \text{part}(n + 1) = n, 1;\ |P1| = n;\ |P2| = 1; \alpha(P1) \in \{-2; 2\};\ \alpha(P2) \in \{-1; 1\}\Big\}, \\ S^n &= \text{ren}\,\big(Vi \to Vi^*/S^n(D)\big). \end{aligned}$$

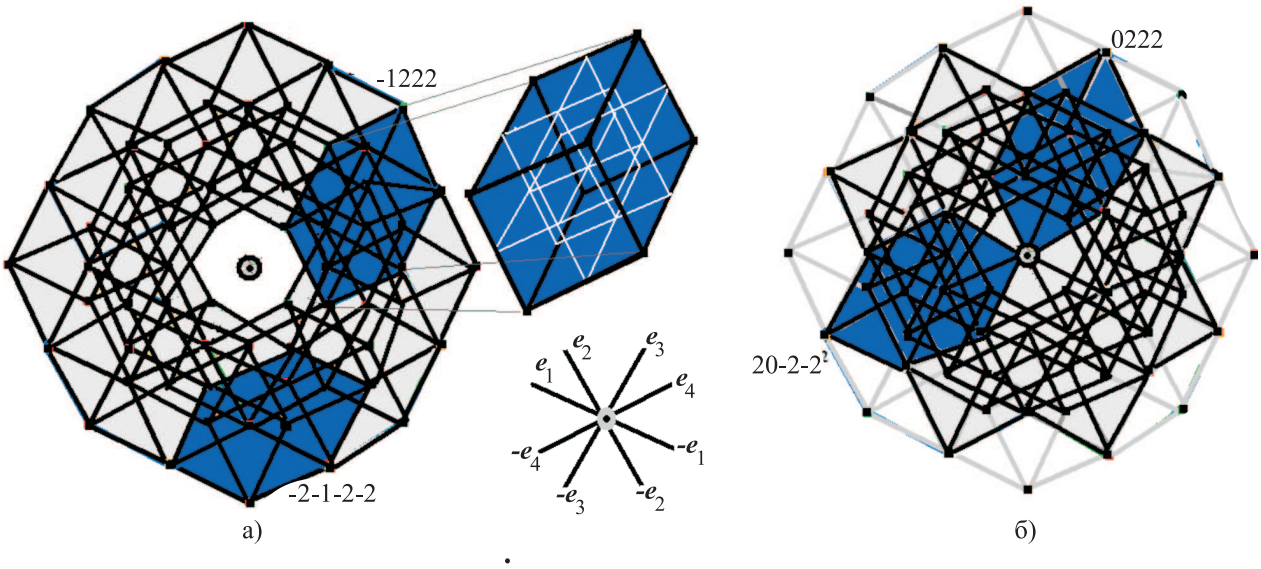


Рис. 4. Трехмерные грани кубической 4-окрестности (а), отображаемые на S^3 (более темным цветом выделены две из них, на одной из них показано дальнейшее разбиение); б) остальные 3-грани, не входящие в $S^3(D)$

Кубические грани 3-сферы допускают совместимую по общим двумерным граням примитивную триангуляцию первого типа [9], которая соответствует вектору числа вершин по числу сходящихся (0,1,2,3) в них диагоналей в гранях (1,3,3,1). На рис. 3 одна из граней показана с триангуляцией.

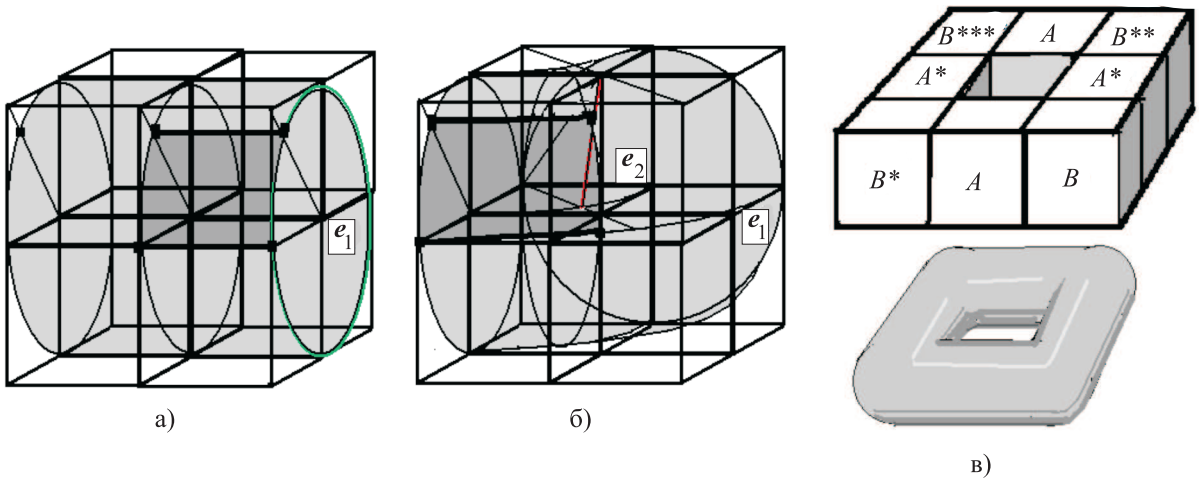


Рис. 5. Кубоидные “патрубок” (а) и колено (б); сборка конструкции (в); символом “*” помечены различные ориентации составляющих

Применяя аналогичный подход, возможно создать набор метрико-топологических заготовок размерностей $\geqslant 3$ для последующего составления из них более сложных конструкций. В качестве примера остановимся на двух — цилиндре единичного радиуса (точнее, звена цилиндра — в быту “патрубок”) и изогнутом цилиндра (в быту “колено”). Основой для конструирования является n-окрестность и множество всех k-граней всех 2^n ортантов около начала координат. Для наглядности на рис. 5 метод пояснен для трехмерного случая, а затем экстраполирован для размерности n. Так, множество кубантов в квадратной трубе с осью вдоль $\boldsymbol{e}_1$ можно записать $Cd^2 = S^2(D) \setminus \Big\{\forall\, D:\ D\big(3;\, \alpha(d1) \in \{-1;1\};\, \alpha(3-d1) \in \{-2;2\}\big)\Big\}$; $1(d)$ означает, что первый разряд в словах имеет символы -1, 1, а $3-1(d)$ — оставшиеся 2 разряда. Множество состоит из 16 k-кубантов, вершины которых затем проецируются на соосный цилиндр единичного радиуса. Таким образом реализуется отображение квадратных граней на грани с двумя ребрами — единичными отрезками и двумя ребрами — дугами $\pi/4$ окружности единичного радиуса. Аналогичный прием применя-

ется и при построении “колена”, при котором удаляются два смежных ортанта, например ортогональные векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

4. Машинное представление, поразрядные (совмещенные) операции, организация памяти и супервычисления. Предложенные методы вычислений (сводящиеся в большинстве случаев к поразрядным операциям) обладают свойством линейной зависимости сложности вычислений от размерности n пространства и поэтому могут быть отнесены к приемам супервычислений; кроме того, должны быть более детально рассмотрены их возможные машинные реализации.

Машинное представление для кубантов изложено в [11] и состоит в следующих заменах мнемонических (удобных для наглядности) символов в коды двоичной арифметики: $\emptyset \to 0$, $0 \to 1$, $1 \to 2$ и $2 \to 3$. В результате такой замены умножение кубантов из n-куба сводится к поразрядному логическому умножению $2n$-разрядных двоичных чисел.

Для кросс-кубантов подобное представление не приводит к такой удобной двоичной интерпретации. В кубантах моноидальная структура достигается добавлением к алфавиту только одного символа $\emptyset$ (переход от троичного кодирования к четверичному). При кросс-кубантах та же структура требует двух дополнительных символов (переход от пятеричного к семеричному кодированию).

Следует подчеркнуть, что большинство операций относится к разряду поразрядных; следовательно, в них заложено потенциальное свойство одновременной (совмещенной) обработки всех разрядов слова (кубанта) при больших значениях n, т.е. независимости в значительной степени времени выполнения от n. Здесь можно говорить о двойном совмещении: совмещении в умножении как действия выяснения общей грани кубантов (если она существует) и метрических свойств (длины минимального пути между кубантами, если они не пересекаются) и операционном совмещении при одновременном вычислении всех разрядов произведения.

Задача вычисления хаусдорфовой-хэмминговой метрики переведена из задачи сложности $O\big(2^n\big)$ в задачу сложности $O(2n)$ (двойной проход по разрядам слова с изменением символов по операции хаусдорфова сжатия).

Сжатая форма описания n-сферы S^n в случае необходимости (для проведения вычислений) может быть преобразована в развернутую форму, требующую значительных объемов памяти из-за степенно́го характера числа граней, а затем вновь свернута. Поскольку кубанты, рассматриваемые как слова, допускают лексикографическое упорядочение, то целесообразно для такого полного упорядочения кубантов, соответствующих n-граням в S^n, ввести энумератор и денумератор.

Общее число граней (кросс-кубантов) в S^n равно $n2^n$. Если рассматривать лексикографически вполне упорядоченную последовательность всех таких кросс-кубантов, то она легко разбивается на четыре подпоследовательности Q_1, Q_2, Q_3, Q_4: Q_1-подпоследовательность кубантов как слов, начинающихся с символа -2; Q_2-подпоследовательность слов с первым символом в слове -1; Q_3-подпоследовательность слов с первым символом в слове 1; Q_4-подпоследовательность слов с первым символом в слове 2.

Если обозначить через $|Q_i|$ число слов в i-й подпоследовательности, то подсчет дает значения $|Q_1| = |Q_4| = (n-1)2^{n-1}$ и $|Q_2| = |Q_3| = 2^{n-1}$. Таким образом, порядковый номер кубанта в общей последовательности $N\big(D_n(-2)\big) = 0+\Delta_1(n-1)$; $N\big(D_n(-1)\big) = (n-1)2^{n-1}+\Delta_2 n-1$; $N\big(D_n(1)\big) = n2^{n-1}+\Delta_3 n-1$; $N\big(D_n(2)\big) = (n+1)2^{n-1} + \Delta_4 n - 1$. Заметим, что для Δ_2 и Δ_3 все последующие разряды имеют символы только -2 или 2. Отсюда, заменив -2 на 0, а 2 на 1, сразу получаем в двоичном виде число, равное Δ_2, Δ_3. Такую замену обозначим $R(n-s)$, где s — номер разряда, для которого $d_s \in \{-1, 1\}$.

В случае Δ_1 и Δ_4 это добавление к номеру от кубанта без первого символа, т.е. размерности $n-1$, с той же структурой. Поэтому, полагая, что $D = d_1, d_2, \ldots, d_s, \ldots, d_n$, где только $d_s = \{-1, 1\}$, и приняв

$$A_i = \begin{cases} 0; & \text{при} \quad d_i = -2; \\ (n-i)2^{n-i}; & \text{при} \quad d_i = 2; \end{cases} \qquad B_s = \begin{cases} 0; & \text{при} \quad d_s = -1; \\ 2^s & \text{при} \quad d_s = 1, \end{cases} \tag{8}$$

можно записать $N(D) = \sum\limits_{i=1}^{s:ds=\{-1,1\}} A_i + B_s + R(n-s) + 1$; $i = 1-s : ds = \{-1, 1\}$. Из (8) легко вытекает правило денумерации. В частности, 64 грани для S^3 образуют $|Q_1| = 24$, $|Q_2| = |Q_3| = 8$, $|Q_4| = 24$ и $N(2\ \text{-}2\ \ 2\ \ 1) = 40 + 0 + \ldots$.

Матрица смежности (по двумерным граням) для 3-граней, входящих в S^3, образуется заменой (в матрице парных произведений этих 64 кубантов) членов матрицы на единицы, которые имеют такой вид: два символа из {-2; 2} и два символа из {-1; 0; 1}, а остальные члены полагаются равными 0. Если матрицу парных произведений обозначить $\mathrm{M}\big(\Pi(D_i, D_j)\big)$, а матрицу смежностей обозначить $\mathrm{M}\big(S(D_i, D_j)\big)$

и соответственно их члены Π_{ij} и S_{ij}, то преобразование получит вид

$$\mathrm{M}\big(\Pi(D_i, D_j)\big) \to \mathrm{M}\big(S(D_i, D_j)\big), \text{ где } S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в } \Pi_{ij} \text{ 2 разряда из } \{\text{-}2, 2\} \text{ и 2 разряда из } \{\text{-}1, 0, 1\}; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Элементы матрицы M_s содержат данные о том, какие грани имеют длину минимального пути между собой, равную s. Взяв произвольный член матрицы (из симметричности построения они все эквивариантны) и последовательно просуммировав единицы в соответствующих строках (по степеням s), получим последовательность эквидистантных, для каждого s, числа граней. Условно можно назвать эти числа (для каждого s) s-м фронтом от исходной грани. Для $n = 3$ и S^2 такая последовательность состоит из 24 граней: 1 (0-й фронт), 4 (1-й фронт), 7, 7, 4, 1 (6-й фронт). Для $n = 4$ и S^3 имеем 64 граней: 1, 6, 11, 14, 14, 11, 6, 1.

Координаты 80 вершин на единичной S^3: 16 вершин $\left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\right\}$; 32 вершины, у которых три координаты $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ и одна 0; 24 вершины, у которых две координаты $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ и две равны 0; 8 вершин с одной координатой ± 1 и тремя координатами, равными 0.

Рассмотрим аналог конформной кубоидной сферы S^2, используемой в модели глобальной циркуляции, разработанной учеными Массачусетского технологического института [8], для случая сконструированной выше единичной S^3.

Каждая 3-грань (кубант) окрестности, отображаемая на один фрагмент сферы S^3, может быть последовательно поделена на 8 (каждое ребро поделено пополам), 64 (ребра поделены на 4 равные части) и т.д. трехмерных кубиков, координаты вершин которых легко вычисляются. При отображении этих кубиков на S^3 для образования более мелкой мозаики их координаты преобразуются согласно (6).

Для хранения такой измельченной структуры возможно применение двухуровневой схемы: кубант (3-грань) и координаты на поделенных трех ребрах, отмеченных в кубанте символами -2 и 2. Координата, соответствующая разряду кубанта с символом -1 или 1, остается с этим значением. Так, например, для кубанта (3-грани) 2-212, каждое ребро которого поделено на 4 равных отрезка, следующая за ним запись 1/2, -3/4, 1, 1/4 означает трехмерный куб как декартово произведение трех отрезков $\big[1/4, 1/2\big] \times \big[-1, -3/4\big] \times \big[0, 1/4\big]$, транслированный на 0010. (В записи об отрезке разбиения указывается наибольшая координата.) Соответствующие координаты вершин этого куба имеют вид

$$\begin{aligned} 2-212 < 4 > 1/2, -3/4, 1, 1/4 \to \big(1/4, -1, 1, 0\big); &\quad \big(1/4, -1, 1, 1/4\big); \\ \big(1/4, -3/4, 1, 0\big); &\quad \big(1/4, -3/4, 1, 1/4\big); \\ \big(1/2, -1, 1, 0\big); &\quad \big(1/2, -1, 1, 1/4\big); \\ \big(1/2, -3/4, 1, 0\big); &\quad \big(1/2, -3/4, 1, 1/4\big). \end{aligned}$$

Далее, при отображении на S^3 они соответственно равны

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\sqrt{33}}, -\frac{4}{\sqrt{33}}, \frac{4}{\sqrt{33}}, 0\right); \quad \left(\frac{1}{\sqrt{34}}, -\frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{1}{\sqrt{34}}\right); \quad \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, 0\right); \\ &\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right); \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right); \quad \left(\frac{2}{\sqrt{37}}, -\frac{4}{\sqrt{37}}, \frac{4}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{37}}\right); \\ &\left(\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, 0\right); \quad \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что конформная кубоидная сфера (используя терминологию MIT) 4-S^3 содержит 64×64 псевдокубических кирпича.

Обозначая степень двоичной дискретизации через k для сферы S^n, имеем общее число псевдокубических кирпичей: $A = (n+1)2^{n+1}2^{kn} = (n+1)2^{(k+1)n+1}$. Это число может служить для грубой оценки машинной памяти при хранении данных заданного объема, привязанных к каждому такому кирпичу, в моделях, опирающихся на структуру S^n. Так, для достижения уровня 64-S^3 (аналогичного MITgcm), т.е. $k = 6$, будем иметь $A = 4 \times 2^{22} \approx 16 \times 10^6$.

Прежде чем обсудить, какое влияние могут оказать рассмотренные построения на структурные возможности суперкомпьютеров (комбинаторный характер и многомерность говорят в пользу использования предельных вычислительных мощностей) или приданных к ним спецпроцессоров, отметим следующее. Решение многих задач методом сеток, как правило, разбивается на две части — создание подходящей для

применяемых численных методов сетки (как правило, неструктурированной), а затем собственно применение численных методов. Эти две части могут находиться в постоянном взаимодействии, корректируя процесс вычислений, в том числе и улучшением геометрико-топологических свойств сетки.

В более общем случае в рассматриваемой схеме предполагается наличие трех частей. Первая часть — конструирование n-многобразия (в нашем случае на кубических структурах), вторая часть — дискретизация многообразия (в том числе и триангуляция) и третья часть — применение собственно численных методов.

Первая часть может реализоваться, как в нашем случае, на базе предложенных специальных поразрядных операций над кубантами, образующих алгебраическую структуру-моноид (т.е. алгебраическими методами и методами метрической геометрии). Характер таких вычислений дает основания отнести их к разряду символьных вычислений. Отсюда и возможная аппаратная поддержка в символьных операциях. Уровень простейших операций над символами можно характеризовать такими примерами операций над словами или подмножествами слов: подсчет числа разрядов с заданным символом; определение первого (последнего) номера разряда с заданным символом; замена одного заданного символа на другой заданный; перестановка символов в двух заданных разрядах.

О последней операции надо сказать особо. Так, в этюдной задаче о “многомерном метро” при поиске оптимальных вариантов существенные затраты уйдут на перестановки множеств символов (в приведенном примере столбцов символов в подмножествах кубантов). В более общем случае такое действие можно представить как заданное перестановкой (подстановкой) содержимого разрядов отдельных слов или подмножеств слов. Другими словами, речь идет о реализации на компьютере действий симметрической группы (или ее подгрупп) подстановок на множестве слов с определенной структурой (в нашем случае — кубантов).

Все эти особенности при организации вычислений для больших размерностей, которые можно отнести к классу супервычислений (понимаемых в самом широком смысле), играют существенную роль при рассмотрении вопросов организации оперативной памяти и набора специальных операций в будущих вычислительных системах.

В настоящее время программная интерпретация таких инструментальных средств реализуется на суперкомпьютере МГУ “Чебышев”.

Авторы выражают благодарность за постоянную поддержку работы В. А. Садовничему, Л. Н. Королеву, А. В. Тихонравову, А. Н. Томилину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baez J., Stay M.* Phisics, topology, logic and computation: a Rosetta Stone // arXiv: 0903.0340v3 [quant-ph]. 6 June 2009.
2. *Coecke B.* Quantum picturalism // arXiv:0908.1787v1[quant-ph]. 13 August 2009.
3. *Lauda A.* Frobenius algebras and planar open string topological field theories // arXiv:math(0508.349v1)[math QA]. 18 August 2005.
4. *Manin Yu.I.* Classical computing, quantum computing and Shor’s factoring algorithm // arXiv: quant-ph/9903008v1. 2 March 1999.
5. *Manin Yu.I.* Renormalisation and Computing I. Motivation and Background // arXiv:0904.4921v2[math. QA]. 25 August 2009.
6. *Stanley R.* Combinatoric and commutative algebra. Boston: Birkhauser, 1996.
7. *Бухштабер В.М.* Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения // Тр. МИАН. 2008. **263**. 18–43.
8. *Marshall J., Adcroft A., Campin J-M., Hill C.* Atmosphere–Ocean modeling exploiting fluid isomorphisms. Boston, MIT. 2002.
9. *Рябов Г.* Марковские процессы в динамике примитивных триангуляций в пространствах $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$ // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 1. 5–12.
10. *Рябов Г.* О четверичном кодировании кубических структур // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 2. 154–161.
11. *Рябов Г.* Алгебраическое представление кубических структур и супервычисления // Программные системы и инструменты. Вып. 10. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 12–26.

Поступила в редакцию
04.10.2010