

УДК 519.6

ДИСПЕРСИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В МЕТОДЕ ЧАСТИЦ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Т. И. Некрасова¹, А. М. Франк²

Получено дисперсионное соотношение для линейных волн в методе частиц для несжимаемой жидкости. Исследовано влияние пространственного разрешения на дисперсионные свойства метода. Проведено сравнение с другими методами для течений со свободной границей с точки зрения точности описания дисперсии волн.

Ключевые слова: линейные волны, дисперсия, метод частиц.

Введение. Для численных методов в гидродинамике существует не так много свойств, которые могут быть исследованы аналитически. В случае методов для расчета задач со свободной границей одним из таких свойств является закон дисперсии линейных поверхностных волн, т.е. зависимость частоты этих волн, а следовательно, и их фазовой скорости от длины волны. Степень близости закона дисперсии к точному в зависимости от параметров численной схемы является одной из количественных характеристик точности метода. Кроме того, знание дисперсионного соотношения позволяет иногда понять и устранить причину появления “нефизичных” эффектов, например возникновение паразитной ряби при слишком большом отношении горизонтального шага сетки к вертикальному [1, с. 44].

Метод частиц для несжимаемой жидкости [1] успешно использовался для решения ряда сложных задач гидродинамики — от удержания шара струей жидкости до термокапиллярных структур и сдвиговых волн в тонких жидких пленках [2–4]. В настоящей статье исследуются дисперсионные свойства этого метода.

1. Постановка и решение задачи. Мы намерены найти точное решение для периодических волн малой амплитуды на поверхности бесконечного горизонтального слоя Ω невязкой несжимаемой жидкости толщины H над твердым дном γ в рамках уравнений метода частиц. Эти уравнения получаются из принципа Гаусса, примененного к системе из большого числа материальных частиц, заполняющих расчетную область Ω [1, гл. 6]:

$$\begin{cases} S^n = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k^n}{\tau} - \mathbf{g} \right)^2 \rightarrow \min, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0, \\ \tilde{u}_n|_{\gamma} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее m_k — масса k -й материальной частицы, \mathbf{r}_k^n и \mathbf{u}_k^n — ее координатный вектор и скорость на n -м временном слое, τ — шаг по времени, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести; суммирование ведется по всем частицам. Далее, $\tilde{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}_k^{n+1})$, где $\tilde{\mathbf{u}}$ принадлежит конечномерному пространству $H(\Omega)$ гладких соленоидальных функций, удовлетворяющих граничному условию непротекания $\tilde{u}_n|_{\gamma} = 0$.

После разложения неизвестного поля скорости $\tilde{\mathbf{u}}$ по некоторому выбранному базису пространства $H(\Omega)$ варьирование (1) дает систему линейных уравнений для коэффициентов разложения (см. ниже). Частицы перемещаются в этом поле скорости, вычисляемом на каждом временном шаге.

Заметим, что уравнения метода можно получить и непосредственной аппроксимацией уравнений гидродинамики с помощью специальной модификации метода Галеркина. Эта процедура приведена, например, в [2, 4] для более общего случая вязкой теплопроводной жидкости с поверхностным натяжением. В [5, 6] доказана сходимость метода частиц для внутренних краевых задач для уравнений Навье–Стокса.

Поскольку в настоящей работе наиболее интересным является вопрос зависимости дисперсионных свойств метода от пространственной аппроксимации, мы рассмотрим предельный случай бесконечно малого шага по времени (т.е. непрерывного времени).

¹ Сибирский федеральный университет (СФУ), просп. Свободный, 79, 660041, г. Красноярск; студент, e-mail: tinkler-9@ya.ru

² Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), Академгородок, 660036, г. Красноярск; главный науч. сотр., e-mail: frank@icm.krasn.ru

Разложим поле скорости по некоторому соленоидальному базису

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_i \lambda_i(t) \Phi_i(\mathbf{r}), \tag{2}$$

и обозначим $\mathbf{u}_k^n = \tilde{\mathbf{u}}_k(t^n, \mathbf{r}_k^n) = \sum_i \lambda_i^n \Phi_i(\mathbf{r}_k^n)$. Используя соотношения

$$\mathbf{r}_k^{n+1} = \mathbf{r}_k^n + \tau \mathbf{u}_k^n, \quad \Phi_i(\mathbf{r}_k^{n+1}) = \Phi_i(\mathbf{r}_k^n + \tau \mathbf{u}_k^n) \approx \Phi_i(\mathbf{r}_k^n) + \left(\frac{\partial \Phi_i(\mathbf{r}_k^n)}{\partial \mathbf{r}_k^n} \right) \mathbf{u}_k^n \tau, \quad \lambda_i^{n+1} \approx \lambda_i^n + \dot{\lambda}_i \tau,$$

получим при $\tau \rightarrow 0$ представление

$$S = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left[\sum_i \left(\dot{\lambda}_i \Phi_i(\mathbf{r}_k) + \lambda_i \left(\frac{\partial \Phi_i(\mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_k} \right) \sum_s \lambda_s \Phi_s(\mathbf{r}_k) \right) - \mathbf{g} \right]^2.$$

Поскольку рассматриваются линейные волны, квадратичным по λ членом можно пренебречь, и окончательно получаем

$$S = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\sum_i \dot{\lambda}_i \Phi_i(\mathbf{r}_k) - \mathbf{g} \right)^2. \tag{3}$$

Для дальнейшего упрощения задачи рассмотрим предельный (континуальный) случай бесконечно большого числа частиц. Сумма по частицам в (3), как и аналогичные суммы в последующих уравнениях, переходит в соответствующие интегралы, которые могут быть явно вычислены. Ниже мы еще вернемся к этому последнему упрощению и прокомментируем степень его влияния на результаты. Варьируя континуальный аналог (3) по $\dot{\lambda}_i$, получаем систему линейных уравнений

$$A \dot{\lambda} = F, \tag{4}$$

где $y(x)$ — уравнение свободной границы и

$$A_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^H (\Phi_i, \Phi_j) dx dy, \tag{5}$$

$$F_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{y(x)} (\mathbf{g}, \Phi_i) dx dy. \tag{6}$$

Вначале рассмотрим простейшую аппроксимацию поля скорости, пригодную для не слишком коротких волн, а именно аппроксимируем функцию тока ψ квадратичным сплайном по продольной переменной x и линейной функцией по y . Это можно считать первым приближением, т.е. первым членом разложения произвольного профиля скорости (с условием непротекания) в степенной ряд по вертикальной координате. Тогда в качестве базисных функций удобно взять $\Phi_i = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y}, -\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right)$, где $\psi_i = B_i^2(x)y$, B_i^2 — квадратичный В-сплайн в i -м узле равномерной сетки с шагом h . Как легко видеть, продольная скорость постоянна по глубине слоя. Матрица (5) получается пятидиагональной с ненулевыми элементами

$$A_{i,i} = \frac{11Hh}{20} + \frac{H^3}{3h} = C, \quad A_{i,i\pm 1} = \frac{13Hh}{60} - \frac{H^3}{9h} = B, \quad A_{i,i\pm 2} = \frac{Hh}{120} - \frac{H^3}{18h} = A.$$

Поскольку при выборе такого базиса вертикальная скорость является кусочно-линейной функцией от x , ищем решение для возвышения свободной границы в виде

$$y(t, x) = H + \varepsilon e^{i\omega t} f(kx), \tag{7}$$

где $f(kx)$ — кусочно-линейная функция, равная $\sin kjh$ в j -м узле сетки, k — волновое число возмущения. Из (6) получим

$$F_j = \frac{gH\varepsilon e^{i\omega t} (\cos kh + 2)}{3} (\sin kjh - \sin k(j+1)h). \tag{8}$$

Поиск решения системы (4) в виде $\dot{\lambda}_j = G(\sin kjh - \sin k(j+1)h)$ дает $G = \frac{gH\varepsilon e^{i\omega t} (\cos kh + 2)}{3(2A \cos 2kh + 2B \cos kh + C)}$. Замыкает процедуру решения требование выполнения на свободной границе условия $\dot{y} = v$, связывающего возмущение свободной границы (7) и поле скорости (2) с найденными выше коэффициентами разложения λ_j . Отсюда находится дисперсионное соотношение, т.е. выражение для частоты ω как функции волнового числа и шага сетки. Мы приведем его здесь в безразмерном виде, используя масштаб длины H и скорости \sqrt{gH} и сохраняя те же обозначения ω , k и h , принятые для безразмерных частоты, волнового числа и шага сетки, соответственно:

$$\omega^2 = 2(\cos kh + 2)(1 - \cos kh) \left[\left(\frac{h^2}{20} - \frac{1}{3} \right) \cos 2kh + \left(\frac{13h^2}{10} - \frac{2}{3} \right) \cos kh + \frac{33h^2}{20} + 1 \right]^{-1}. \quad (9)$$

В пределе для малого h получаем

$$\omega^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{k^2}{1 + k^2/3}. \quad (10)$$

Последнее дисперсионное соотношение характерно для многих нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды (моделей второго порядка), и оно имеет те же два первых члена разложения по малому k , что и точный закон

$$\omega^2 = k \operatorname{th}(k). \quad (11)$$

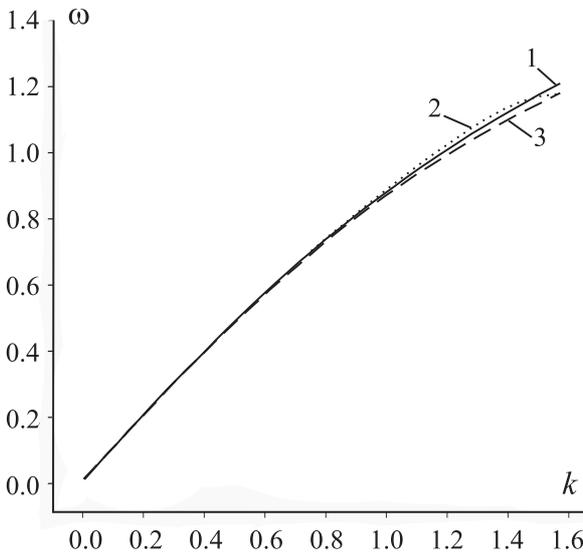


Рис. 1. Дисперсионные кривые для простейшего базиса — продольная скорость постоянна по глубине. Линии: 1) точный закон (11); 2) метод частиц (9), $h = 2$; 3) метод частиц, $h \rightarrow 0$; VOF (18) $h1 = h2 = 1/3$; LINC (19) $h1 = 1/3, h2 = 1/4$

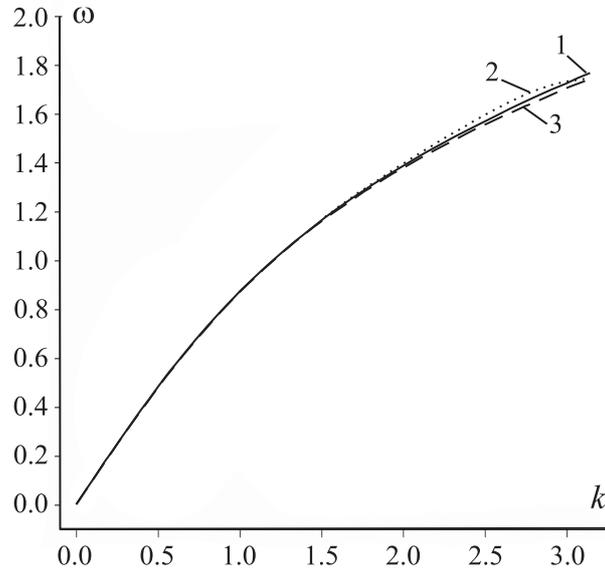


Рис. 2. Дисперсионные кривые для линейной по глубине продольной скорости. Линии: 1) точный закон (11); 2) метод частиц (12), $h = 1$; 3) метод частиц, $h \rightarrow 0$; VOF (18) $h1 = 1/5, h2 = 1/10$; LINC (19) $h1 = 1/8, h2 = 1/10$

Таким образом, метод частиц, в котором продольная скорость среды выбрана не зависящей от вертикальной координаты, представляет собой некоторую модель мелкой воды с дисперсией. Нас, однако, здесь интересует не столько предельный случай $h \rightarrow 0$, сколько дисперсионное соотношение при конечных h и степень его близости к точному закону. Такие зависимости приведены на рис. 1. Диапазон изменения волнового числа $0 < k < \frac{\pi}{2}$ выбран так, чтобы максимальное отличие дисперсионной кривой при $h \rightarrow 0$ (пунктир) от точного закона (сплошная) было небольшим (здесь около 3%). В этом диапазоне минимальная безразмерная длина волны $\lambda = 4$. Это уже совсем близко к диапазону коротких волн $\lambda \lesssim 3$, которые “не чувствуют” присутствие дна (волны на глубокой воде). Дисперсионная кривая при $h = 2$ (точки) соответствует максимально возможному шагу сетки в выбранном диапазоне изменения волнового числа (на самые короткие волны приходится 2 ячейки). Примечательно, что данная кривая аппроксимирует точный закон не хуже, чем предельная при $h \rightarrow 0$. Это позволяет выбирать достаточно большой шаг сетки при реальных расчетах.

Далее интересно посмотреть, как влияет на результаты более аккуратная аппроксимация поля скорости по вертикали. Для этого удвоим размерность пространства $H(\Omega)$, добавив к рассмотренным выше базисным функциям для функции тока еще и $\widehat{\psi}_i = B_i^2(x)y^2$, т.е. учтем еще и квадратичный член в разложении в ряд по y . Заметим, что такой базис использовался в реальных расчетах, например для расчета термокапиллярных структур [2]. Решение задачи о линейных волнах находится здесь аналогично вышеизложенному. Опуская несложные, хотя и достаточно громоздкие выкладки, приведем сразу дисперсионное соотношение для безразмерных величин:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left(120(\cos kh + 2)(\cos kh - 1)((2 - h^2) \cos 2kh + (4 - 26h^2) \cos kh - (33h^2 + 6)) \right) \times \\ & \times \left((15 - 26h^2 + 3h^4) \cos^2 2kh + (60 - 1352h^2 + 2028h^4) \cos^2 kh + (135 + 2574h^2 + 3267h^4) + \right. \\ & + (60 - 728h^2 + 156h^4) \cos 2kh \cos kh - (90 + 780h^2 - 198h^4) \cos 2kh - \\ & \left. - (180 - 312h^2 - 5148h^4) \cos kh \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Дисперсионные кривые для этого случая приведены на рис. 2. Они построены на основе тех же принципов, что и в предыдущем случае. Учет квадратичного члена в разложении приводит к тому, что близость предельной при $h \rightarrow 0$ кривой (пунктир) к точной сохраняется в пределах 2% вплоть до $k = \pi$. Шаг $h = 1$ для построения соответствующей кривой 2 (точки) тоже выбран как максимально возможный в этом диапазоне волновых чисел; как и в предыдущем случае, данная кривая аппроксимирует точный закон не хуже предельной.

2. Сравнение с другими методами. Для сравнения рассмотрим еще два других численных метода для задач со свободной границей. Первый — хорошо известная схема расщепления в естественных переменных u, v, p , предложенная Чориным и Темамом [7]. Наибольшее распространение получил ее вариант на разнесенных сетках, который часто используется, в частности, в методе VOF (Volume Of Fluid). Заметим, что для рассматриваемого здесь случая линейных волн конкретный способ отслеживания свободной границы не существен, как не существенны и различные современные модификации этой схемы типа улучшенной аппроксимации конвективных членов. Шаблон схемы приведен на рис. 3; считаем, что сетка имеет N ячеек по вертикали. Линеаризованное уравнение импульса можно записать в виде

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{u}_{i,j}^n}{\tau} = -\text{grad } P, \tag{13}$$

где $P = p + g(y - H)$ — модифицированное давление (отклонение от гидростатического). Требование соленоидальности поля скорости приводит к уравнению Лапласа для модифицированного давления

$$\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{h_2^2} = 0 \tag{14}$$

с граничным условием на дне

$$P_{l,1} - P_{l,0} = 0, \tag{15}$$

вытекающим из условия непротекания, и с граничным условием на свободной границе

$$\frac{1}{2} (P_{l,N} + P_{l,N+1}) = \varepsilon g e^{i\omega t} \sin k l h_1. \tag{16}$$

Последнее уравнение есть следствие волнового возмущения на свободной границе

$$y_l = \varepsilon e^{i\omega t} \sin k l h_1, \tag{17}$$

а полусумма в приграничных ячейках взята для улучшения аппроксимации [8].

Решение уравнения (14) ищем в виде $P_{ij} = q^j \sin k i h_1$. Это приводит к квадратному уравнению для q , имеющему два корня, отвечающих двум линейно-независимым решениям: $q_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$,

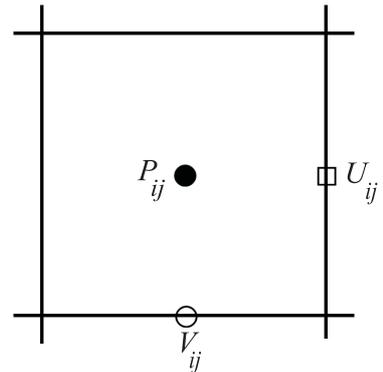


Рис. 3. Шаблон схемы расщепления

где $b = 1 + 2\left(\frac{h_2}{h_1} \sin kh_1\right)^2$. Далее будем искать решение краевой задачи в виде линейной комбинации $P_{lj} = A \varepsilon g e^{i\omega t} (q_1^j + C q_2^j) \sin kh_1$. Из граничного условия (15) находим константу $C = \frac{q_1 - 1}{1 - q_2}$, а из граничного условия (16) — константу $A = \frac{2}{q_1^N + C q_2^N + q_1^{N+1} + C q_2^{N+1}}$. Подстановка этого решения в уравнение импульса (13) на свободной границе при $\tau \rightarrow 0$ и с учетом (17) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = AN(q_1^{N+1} + C q_2^{N+1} - q_1^N - C q_2^N). \quad (18)$$

Следующий численный метод — представитель лагранжевых методов на регулярной прямоугольной (в начальный момент) сетке [1, гл. 2]. В рассматриваемой задаче о линейных волнах он отличается от классического представителя этого семейства, известного метода LINC (Lagrangian INCompressible) [9], лишь аппроксимацией силы тяжести, поэтому с точки зрения дисперсионных свойств может рассматриваться как некоторая модификация последнего. Мы сразу приведем его дисперсионное соотношение, вывод которого можно найти в [1]:

$$\omega^2 = 2Nb \frac{2 + \cos kh_1}{3} \frac{(1+b)^{2N} - (1-b)^{2N}}{(1-b)^{2N-1}(1-b+b^2) + (1+b)^{2N-1}(1+b+b^2)}. \quad (19)$$

Здесь $b^2 = \frac{1}{N^2 h_1^2} \frac{1 - \cos kh_1}{1 + \cos kh_1}$, h_1 и $h_2 = 1/N$ — размеры ячейки сетки (отнесенные к толщине слоя H).

С целью сравнения дисперсионных свойств шага сетки h_1, h_2 для двух последних методов подбирались таким образом, чтобы их дисперсионные кривые на рис. 1 и 2 отличались от точных не более, чем соответствующие кривые для метода частиц при максимальном шаге h (кривые 2, точки). Другими словами, подбиралось разрешение, при котором все три метода обладали бы практически одинаковой дисперсией. Поскольку, в отличие от метода частиц, увеличение шагов сетки приводит в двух последних методах к монотонному увеличению ошибки с ростом волнового числа, эти кривые для них оказались в итоге графически неразличимы с кривыми 3 (пунктир). Из приведенного сравнения видно, что два последних метода, обозначенные как VOF и LINC, обладают близкими дисперсионными свойствами при одинаковом разрешении (количестве узлов сетки), несмотря на то что формальный порядок пространственной аппроксимации у метода LINC лишь первый, в отличие от второго порядка метода VOF. Метод же частиц имеет существенно лучшие дисперсионные свойства. Особенно это относится к рис. 2, где при примерно одинаковой дисперсии шаг h можно взять в 5 раз больше, чем h_1 , и по глубине достаточно полинома второй степени (двух функций) вместо 10 ячеек. Выше мы для простоты рассмотрели континуальный случай бесконечно большого числа частиц. В реальных двумерных расчетах обычно берется 9–25 частиц на ячейку. Проведенные для этих значений прямые численные расчеты синусоидальных волн очень малой амплитуды показали, что отличие их частоты от теоретической (17) не превышает 1.5% даже для самых коротких волн из рассматриваемого диапазона.

Заметим еще, что мы здесь рассмотрели случай $\tau \rightarrow 0$. В действительности устойчивость всех трех методов определяется числом Куранта и, следовательно, шаг по времени пропорционален шагу сетки (в методе частиц, в силу его полной консервативности, решение формально всегда ограничено в L_2 , так что под устойчивостью здесь понимается отсутствие роста коротковолновых возмущений, ведущих к “турбулентности” решения). Поэтому увеличение шага сетки в 5 раз приводит к возможности пропорционального увеличения шага по времени. С другой стороны, необходимо отметить, что в методе частиц (как и в методе LINC) на каждом временном шаге необходимо вычислять некоторую матрицу. Это вычисление может занимать порядка 80% всего времени на один шаг. Кроме того, сама эта матрица может быть более заполненной; впрочем, для двух рассмотренных выше вариантов базиса она является, соответственно, пяти- и десятидиагональной в сравнении с пятидиагональной матрицей уравнения (14). Тем не менее, даже грубая оценка на основе приведенных выше рассуждений показывает, что при одинаковой дисперсии метод частиц может оказаться на порядок более эффективным с точки зрения времени счета. Безусловно, такой способ сравнения различных методов весьма приблизителен и учитывает лишь одно из их качеств, однако он сравнительно прост и может быть использован для предварительных оценок наряду с другими факторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Франк А.М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 2001.

2. *Frank A.M.* 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film // *Europ. J. Mech. B/Fluids*. 2003. **22**. 445–471.
3. *Frank A.M.* Shear driven solitary waves on a liquid film // *Phys. Review E*. 2006. **74**. 065301 (4 pages).
4. *Frank A.M.* Numerical simulation of gas driven waves in a liquid film // *Phys. of Fluids*. 2008. **28**. 122102 (9 pages).
5. *Овчинникова Е.В., Франк А.М.* О сходимости метода частиц для несжимаемой жидкости // *Вычисл. технологии*. 2004. **9**, № 1. 58–74.
6. *Овчинникова Е.В.* Сходимость метода частиц для базисных функций из пространства сплайнов // *Вычисл. технологии*. 2005. **10**, № 4. 72–81.
7. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
8. *Николс Б.* Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости // *Численные методы в механике жидкостей*. М.: Мир, 1973. 65–173.
9. *Hirt C.W., Cook J.L., Bulter T.D.* A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface // *J. of Computational Physics*. 1970. **5**, N 1. 103–124.

Поступила в редакцию
22.06.2010
