УДК 517.5

О СИСТЕМАТИЗАЦИИ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. В. Переберин[1]

В работе делается попытка систематизировать наиболее распространенные на сегодняшний день разновидности вейвлет-преобразований. Предлагается систематизация по следующим признакам: по типу (дискретному или непрерывному) обрабатываемого сигнала, по размерности сигнала, по наличию или отсутствию избыточной информации, наличию или отсутствию свойства сохранения нормы и др. Проводится сравнение принятых способов обработки сигналов, определенных на конечных интервалах, а также известных форм записи преобразований.

Ключевые слова: вейвлет-преобразования, численный анализ, численные методы, обрабатка сигналов, вейвлеты, дискретные преобразования, вейвлет-анализ.

1. Введение. Под *вейвлет-преобразованием* (wavelet transform), или *всплеск-преобразованием*, понимают разложение сигнала по системе *вейвлетов* (wavelet), или *всплесков*, — функций, каждая из которых является сдвинутой и масштабированной (сжатой или растянутой) копией одной функции — *порождающего вейвлета* (mother wavelet) [1 – 3, 5, 7, 11, 16, 18, 19, 22]. При этом в наиболее общей постановке не конкретизируется не только сам порождающий вейвлет, но и то, какие именно его копии участвуют в разложении. Отсюда очевидно, что термин "вейвлет-преобразование" является обозначением целого класса разложений, или даже *над*класса, т.к. существующие виды вейвлет-преобразований часто достаточно сильно отличаются друг от друга и определениями, и имеющимися свойствами, и кругом приложений.

К сожалению, в многочисленной литературе, посвященной вейвлетам, к вопросу терминологии, структуризации и систематизации авторы зачастую относятся достаточно небрежно, а работ с подробно и аккуратно изложенной теоретической базой не так уж много. В качестве примера такой небрежности можно отнести, например, тот факт, что термин "дискретное вейвлет-преобразование" исторически используется для обозначения нескольких различных конструкций. В ряде работ, нацеленных в первую очередь на прикладные задачи (например, [19]), для каждого отдельного случая описывается какой-нибудь конкретный тип преобразования. В результате читатель получает достаточно подробное руководство по решению определенного круга задач, однако попытаться обобщить эту информацию и выйти за рамки предложенного круга на основе такого изложения непросто. С другой стороны, есть и работы, посвященные строгому изложению теории вейвлет-анализа (например, [22]), но, перегруженные формулами и теоремами, они вряд ли представляют интерес для специалистов в прикладных областях.

Кроме того, в различных источниках встречаются различные формы записи преобразований. Переход от одной формы к другой может показаться неочевидным, тем более, что формы записи преобразований, вообще говоря, не эквивалентны в том смысле, что существуют разновидности преобразований, которые могут быть описаны в терминах одной формы и не описываются в терминах другой формы записи.

В данной работе делается попытка устранить некоторые имеющиеся неоднозначности в терминологии. Предложено систематизировать существующие преобразования по ряду признаков: по типу обрабатываемого сигнала (непрерывному или дискретному) и по наличию или отсутствию избыточной информации — такая классификация предлагается взамен весьма условного деления преобразований на непрерывные и дискретные; по типу базисов в функциональных пространствах для преобразований без избыточной информации (ортогональный, полуортогональный, биортогональный) — это, пожалуй, единственная общепринятая классификация; по наличию и отсутствию свойства сохранения нормы; по размерности преобразования и по числу каналов — данная систематизация основана на расширении класса преобразований без избыточной информации, предложенном в работе [17].

Кроме этого, описываются и сравниваются две известные формы записи вейвлет-преобразований, обсуждаются особенности реализации алгоритмов вычисления вейвлет-преобразований, которые могут быть построены на основе этих записей. Также описываются и сравниваются два подхода к вычислению вейвлет-преобразований на ограниченных интервалах.

[1] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Миусская пл., 4, 125047, Москва; e-mail: avpereb@newmail.ru

Систематизация преобразований имеет не только теоретический, но и практический интерес. Она позволяет реально оценить многообразие конструкций вейвлетов, выделить (а возможно, и сконструировать новый) тип преобразования, предпочтительный для решения конкретной прикладной задачи, в том числе и в смысле эффективности реализующего его алгоритма.

Работа включает в себя изложение наиболее важных элементов базовой теории вейвлет-анализа, поэтому она доступна как специалисту, так и читателю, не имеющему достаточной подготовки в этой области, но проявляющему к ней интерес.

Для ряда основных понятий вейвлет-анализа дается общепринятый англоязычный эквивалент.

2. Два “классических” преобразования. В начале рассмотрим два вида преобразований, которые образуют фундамент теории вейвлет-анализа. Подавляющее большинство существующих видов вейвлет-преобразований в той или иной степени являются либо обобщениями, либо частными случаями этих объектов.

2.1. Непрерывное вейвлет-преобразование. *Непрерывным вейвлет-преобразованием* (continious wavelet transform) функции $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ называют функцию двух переменных

$$\mathcal{W}(a,b) \equiv \mathcal{W}_f(a,b) = \langle f(\bullet) \mid \psi(a,b,\bullet) \rangle, \quad a,b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

где *вейвлеты* $\psi_{a,b}(x) \equiv \psi(a,b,x)$ являются масштабированными и сдвинутыми копиями *порождающего вейвлета* $\psi(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$:

$$\psi_{a,b}(x) \equiv \psi(a,b,x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a,b \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0. \tag{2}$$

Если для порождающего вейвлета выполняется условие

$$C_\psi \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega}\, d\omega < +\infty \tag{3}$$

($\hat{\psi}(x)$ — образ Фурье вейвлета $\psi(x)$), то преобразование (1) обратимо, т.е. существует *обратное* непрерывное вейвлет-преобразование

$$f(x) \sim \frac{1}{C_\psi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}(a,b)\, \psi(a,b,x)\, \frac{da\, db}{a^2}. \tag{4}$$

Таким образом, непрерывное вейвлет-преобразование — это разложение сигнала по *всем* возможным сдвигам и сжатиям (растяжениям) некоторой функции.

Часто вейвлет-анализ рассматривают в сравнении с анализом Фурье. Вспомним, что преобразование Фурье — это разложение сигнала по сдвигам и сжатиям (растяжениям) гармонической функции. Сигналу $f(x)$ ставится в соответствие комплекснозначная функция $\hat{f}(\omega)$. Для каждой *частоты* ω аргумент этой функции определяет фазовый сдвиг, а модуль — амплитуду соответствующей гармонической составляющей.

Переменная a в выражениях (1), (2) и (4) определяет масштаб вейвлета и является аналогом частоты в анализе Фурье. Переменная b определяет величину сдвига вейвлета. Таким образом, для каждой пары a и b функция $\mathcal{W}(a,b)$ определяет амплитуду соответствующего вейвлета.

В отличие от анализа Фурье, конкретный вид вейвлета не оговаривается. Однако, как правило, в качестве вейвлета берутся непериодические, локализованные в пространстве функции, например функции, имеющие один или два близко расположенных глобальных экстремума и быстро затухающие (а то и обращающиеся в 0) на бесконечности. Минимальным требованием к таким функциям обычно является наличие одного *нулевого момента* (vanishing moment), т.е. равенство нулю интеграла от этой функции по всей области ее определения[2].

Распространенный пример вейвлета — вторая производная гауссиана (функции плотности нормального распределения), которая получила название “мексиканская шляпа”:

$$\psi_{\mathrm{mh}}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\pi}}\,(1-x^2)\,\exp\frac{-x^2}{2}. \tag{5}$$

[2]По определению, $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ имеет N нулевых моментов, если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$ равен 0 для всех целых n от 0 до $N-1$ и не равен 0 для $n = N$.

В случае анализа Фурье каждой частоте соответствует всего одна гармоническая составляющая. В случае вейвлет-анализа каждой частоте соответствует множество сдвинутых друг относительно друга функций. Если сигнал имеет особенность, например разрыв, то на наличие этого разрыва укажут относительно высокие значения амплитуд при высоких частотах образа Фурье этого сигнала. В то же время у вейвлет-образа высокие амплитуды будут только у тех вейвлетов, экстремумы которых окажутся вблизи точки разрыва. Следовательно, можно не только определить наличие особенности, но и ту точку, в которой она имеет место.

Таким образом, можно сказать, что анализ Фурье является частотным, а вейвлет-анализ — частотно-пространственным анализом сигнала.

2.2. Ортогональное диадное ("дискретное") вейвлет-преобразование. Количество копий порождающего вейвлета, необходимое для обратимого разложения, можно существенно сократить. При этом, однако, требуется накладывать дополнительные условия на порождающий вейвлет.

Распространенный случай — вычисление значений $\mathcal{W}(a,b)$ только для a и b вида

$$a = 2^{-i}, \quad \frac{b}{a} = j, \quad i,\, j \in \mathbf{Z}.$$

Вместо непрерывной функции (1) получается счетное множество значений:

$$w_j^{(i)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi_j^{(i)}(\bullet) \right\rangle, \tag{6}$$

где

$$\psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\,\psi(2^i x - j), \quad i,\, j \in \mathbf{Z}. \tag{7}$$

Обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x). \tag{8}$$

Заметим, что значения, вычисляемые по формуле (6), являются обобщенными коэффициентами Фурье разложения сигнала $f(x)$ по системе функций (7), а выражение (8) есть обобщенный ряд Фурье $f(x)$ относительно системы (7). Следовательно, чтобы представление (8) имело смысл, вейвлет $\psi(x)$ должен быть таким, чтобы порожденная им система (7) являлась ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$.

Формулы (6), (7) и (8) определяют известное *диадное* (dyadic) *ортогональное* вейвлет-преобразование. Иногда в литературе оно называется *дискретным*, что вызывает определенную неоднозначность, т.к. так же именуются и вейвлет-преобразования дискретных сигналов (см. п. 3).

С одной стороны, диадное преобразование является частным случаем преобразования непрерывного. С другой стороны, это совершенно иной объект с особой структурой и специфическими свойствами. Если продолжать сравнение с анализом Фурье, то диадное преобразование является аналогом не дискретного преобразования Фурье (это еще один аргумент в пользу того, что называть это вейвлет-преобразование дискретным следует с известной осторожностью), а ряда Фурье.

Представление (8) имеет четко выраженную многоуровневую иерархическую структуру. При фиксированном индексе i (назовем его *уровнем разрешения* или *разрешением*) масштаб вейвлетов не меняется (т.е. все вейвлеты для каждого разрешения являются сдвинутыми копиями друг друга). При увеличении разрешения на 1 величина сдвига уменьшается вдвое и вдвое сжимаются вейвлеты (именно поэтому преобразование называется *диадным*). Похожую структуру имеет и ряд Фурье, но у ряда Фурье каждому уровню разрешения соответствует лишь пара гармонических функций, сдвинутых друг относительно друга на половину периода.

Любую частичную сумму ряда Фурье можно считать огрубленным (низкочастотным) приближением исходного сигнала. Самым грубым начальным приближением является первый член — константная функция.

У представления (8) нет начального приближения. Но в качестве такового можно взять любую частичную сумму, например, сумму по i от $-\infty$ до -1:

$$f^{(0)}(x) \equiv \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x).$$

Существует функция $\varphi(x)$, такая, что множество ее сдвигов образует ортонормированную систему, и сигнал $f^{(0)}(x)$ можно *точно* представить в виде разложения по этой системе, т.е.

$$f^{(0)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j\, \varphi_j(x),$$

где

$$\varphi_j(x) = \varphi(x-j), \quad j \in \mathbf{Z},$$

и

$$v_j = \langle f(\bullet) \mid \varphi_j(\bullet) \rangle\,, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Кроме того, эта система ортогональна системе вейвлетов, соответствующих уровню разрешения от 0 и выше и образует с ней ортонормированный базис в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$. Если функции $\varphi_j(x)$ удовлетворяют всем этим условиям, то они называются *скейлинг-функциями* (scaling function) или *масштабными функциями*, а $\varphi(x)$ — *порождающей* скейлинг-функцией (father scaling function). Более строго скейлинг-функции, вейвлеты и соотношения между ними рассматриваются в п. 2.3.

С помощью скейлинг-функций вместо представления (8) получено эквивалентное ему представление:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j\, \varphi_j(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\, \psi_j^{(i)}(x). \tag{9}$$

По структуре это представление уже существенно отличается от структуры непрерывного вейвлет-преобразования, так как содержит уже два вида функций.

Простейшим примером ортогональной системы вейвлетов является **система Хаара**, порождающие скейлинг-функция и вейвлет которой задаются следующими формулами:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\,1), \\ 0, & x \notin [0,\,1), \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\,0.5), \\ -1, & x \in [0.5,\,1), \\ 0, & x \notin [0,\,1). \end{cases} \tag{10}$$

Диадное вейвлет-преобразование на основе системы Хаара называется **преобразованием Хаара**.

2.3. Ортогональный многомасштабный анализ. Диадное вейвлет-преобразование можно вывести не только как частный случай непрерывного преобразования, но и с помощью конструкции, называемой *многомасштабным анализом* (multiresolution analysis) или *кратномасштабным анализом.*

Ортогональным многомасштабным анализом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ называется последовательность замкнутых подпространств $V^{(i)} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, $i \in \mathbf{Z}$, таких, что:

1. $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z}$;
2. $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)}$ плотно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$;
3. $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)} = \emptyset$;
4. $v(x) \in V^{(i)} \iff v(2x) \in V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z}$;
5. $v(x) \in V^{(0)} \iff v(x-j) \in V^{(0)}, \quad j \in \mathbf{Z}$;
6. существует элемент $\varphi(x) \in V^{(0)}$, интеграл которого не равен нулю, такой, что последовательность $\bigl\{\varphi(x-j)\bigr\}_{j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в $V^{(0)}$; элемент $\varphi(x)$ называется *порождающей скейлинг-функцией.*

Рассмотрим некоторые свойства многомасштабного анализа, вытекающие непосредственно из данного определения.

1. Из подпунктов 1 и 4−6 определения следует, что найдутся такие числа $h_k \in \mathbf{R}$, $k \in K$, $K \subset \mathbf{Z}$, что

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k\in K} h_k\, \varphi(2x-k). \tag{11}$$

Это выражение называется *масштабным соотношением* (refinement relation) для скейлинг-функций.

2. Для любого $i \in \mathbf{Z}$ последовательность $\bigl\{\varphi_j^{(i)}\bigr\}_{j\in\mathbf{Z}}$, где $\varphi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\,\varphi(2^i x - j)$, является ортонормированным базисом в пространстве $V^{(i)}$. Функции $\varphi_j^{(i)}(x)$ называются *скейлинг-функциями.*

3. Если порождающая скейлинг-функция $\varphi(x)$ принадлежит множеству $\mathbf{L}_1(\mathbf{R})$ и нормализована, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1,$$

то с точностью до значений на множестве меры нуль эта функция единственным образом определяется уравнением измельчения (11), т.е. набором значений $\{h_k\}_{k\in K}$[3].

Для каждой пары подпространств $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}$, $i \in \mathbf{Z}$, многомасштабного анализа должно существовать подпространство $W^{(i)}$, такое, что

$$V^{(i)} \perp W^{(i)}, \quad V^{(i+1)} = V^{(i)} \oplus W^{(i)}.$$

Такие подпространства можно назвать *уточняющими* или *детализирующими* в том смысле, что они содержат уточняющую информацию, необходимую для перехода от уровня разрешения i к уровню $i+1$. Справедливо следующее:

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} W^{(i)} = \mathbf{L}_2(\mathbf{R}).$$

Если существует элемент $\psi(x) \in W^{(0)}$ такой, что последовательность $\bigl\{\psi(x-j)\bigr\}_{j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в $W^{(0)}$, то этот элемент называется *порождающим вейвлетом*.

Если $\psi(x) \in W^{(0)}$ — порождающий вейвлет, то набор функций $\bigl\{\psi_j^{(i)}(x)\bigr\}_{i,\,j\in\mathbf{Z}}$, образует ортонормированный базис в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$. Здесь $\psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\,\psi(2^i x - j)$. Функции из этого набора называются *вейвлетами*. Детализирующие подпространства $W^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, принято также называть *вейвлет-пространствами*.

Очевидно, что порождающий вейвлет $\psi(x)$ является элементом пространства $V^{(1)}$. Следовательно, найдутся такие числа $g_l \in \mathbf{R}$, $l \in L$, $L \subset \mathbf{Z}$, что

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{l\in L} g_l\,\varphi(2x-k). \tag{12}$$

Это соотношение является *масштабным соотношением* для вейвлетов. Оно похоже на масштабное соотношение для скейлинг-функций (11), но имеет важное отличие: первое является уравнением (в левой и правой части находится одна и та же функция), второе — выражением одной функции через другую. Таким образом, порождающий вейвлет $\psi(x)$ с точностью до значений на множестве меры нуль определяется коэффициентами $\{g_l\}_{l\in L}$, если определена порождающая скейлинг-функция $\varphi(x)$, а она, в свою очередь, определяется коэффициентами $\{h_k\}_{k\in K}$ соотношения (11). Следовательно, система скейлинг-функций и вейвлетов может быть полностью определена двумя наборами коэффициентов: $\{h_k\}_{k\in K}$ и $\{g_l\}_{l\in L}$.

Для краткости в дальнейшем будем использовать следующие обозначения для наборов коэффициентов:

$$\mathbf{h} \equiv \{h_k\}_{k\in K}, \quad \mathbf{g} \equiv \{g_l\}_{l\in L}.$$

Замечание. Всегда можно считать, что $K = \mathbf{Z}$ и $L = \mathbf{Z}$, т.е. коэффициенты в наборах $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ определены для любого целого индекса. Если это не так, то наборы доопределяются на всем множестве целых индексов нулевыми элементами.

Пример. Системе Хаара (10) соответствуют следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} h_0 &= 2^{-1/2}, \quad h_1 = 2^{-1/2};\\ g_0 &= -2^{-1/2}, \quad g_1 = 2^{-1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Другой пример можно найти в конце п. 3.2.

Так как набор функций $\bigl\{\psi_j^{(i)}(x)\bigr\}_{i,j\in\mathbf{Z}}$ является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, то любую функцию $f(x) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ можно единственным образом представить в виде разложения

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\,\psi_j^{(i)}(x),$$

[3]Как известно, значения на множестве меры нуль не влияют на результат интегрирования, поэтому такая точность определения функций является достаточной.

где
$$w_j^{(i)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi_j^{(i)}(\bullet) \right\rangle, \quad \psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2^i}\,\psi\left(2^i x - j\right), \quad i, j \in \mathbf{Z},$$
что в точности соответствует формулам (8), (6) и (7).

Значения $w_j^{(i)}$, $i, j \in \mathbf{Z}$, называются *детализирующими коэффициентами* или *вейвлет-коэффициентами.*

Заметим, что для любого $i_0 \in \mathbf{Z}$
$$\bigoplus_{i=-\infty}^{i_0-1} W^{(i)} = V^{(i_0)},$$
следовательно,
$$\mathbf{L}_2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} W^{(i)} = V^{(i_0)} \oplus \bigoplus_{i=i_0}^{+\infty} W^{(i)}.$$
В пространстве $V^{(i_0)}$ существует базис скейлинг-функций, следовательно, набор функций
$$\left\{\varphi_j^{(i_0)}(x),\ \psi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z},\ i\geqslant i_0}$$
также является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ (будем называть такой базис *комбинированным*). Тогда справедливо следующее представление:
$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i_0)}\varphi_j^{(i_0)}(x) + \sum_{i=i_0}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\psi_j^{(i)}(x), \quad i_0 \in \mathbf{Z}, \tag{14}$$
где
$$v_j^{(i_0)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi_j^{(i_0)}(\bullet) \right\rangle, \quad \varphi_j^{(i_0)}(x) = \sqrt{2^{i_0}}\,\varphi(2^{i_0} x - j), \quad i_0, j \in \mathbf{Z}.$$
Положив $i_0 = 0$ и обозначив $v_j \equiv v_j^{(0)}$, $\varphi_j(x) \equiv \varphi_j^{(0)}(x)$, $j \in \mathbf{Z}$, получаем в точности формулу (9).

Представление (14) можно рассматривать как разложение сигнала $f(x)$ на две проекции — проекцию на пространство $V^{(i_0)}$ (первое слагаемое формулы) и проекцию на ортогональное дополнение $V^{(i_0)}$ до $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ (второе слагаемое). Структура пространств такова, что проекция сигнала на первое пространство является огрубленным (или, пользуясь терминологией анализа Фурье, *низкочастотным*) представлением этого сигнала, а на второе — высокочастотным, т.е. содержащим уточняющую (детализирующую) информацию о сигнале, потерянную при проецировании на пространство $V^{(i_0)}$. Очевидно, что чем выше значение i_0, тем больше информации, содержащейся во втором слагаемом формулы (14), "перетекает" в первое.

Проекцию сигнала на пространство $V^{(i_0)}$ будем называть представлением (или приближением) сигнала с разрешением i_0. Кроме собственно проекции, так можно называть набор коэффициентов $\{v_j^{(i_0)}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ разложения этой проекции по базисным скейлинг-функциям, т.к. при фиксированном базисе скейлинг-функций коэффициенты однозначно определяют такое приближение.

Таким образом, с помощью ортогонального многомасштабного анализа были не только выведены формулы ортогонального диадного вейвлет-преобразования, но и даны более строгие определения базисными функциями этого преобразования — скейлинг-функциями и вейвлетами, установлены соотношения между этими функциям, получена достаточно наглядная интерпретация преобразования как последовательности проекций на вложенные подпространства.

В дальнейшем для краткости будут использованы следующие обозначения для последовательностей подпространств и функций:
$$\mathbf{V} \equiv \left\{V^{(i)}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}, \qquad \mathbf{W} \equiv \left\{W^{(i)}\right\}_{i\in\mathbf{Z}},$$
$$\mathbf{\Phi} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{\Phi}^{(i)} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{j\in\mathbf{Z}}, \quad i \in \mathbf{Z},$$
$$\mathbf{\Psi} \equiv \left\{\varphi_j^{(i)}(x)\right\}_{i,j\in\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{\Psi}^{(i)} \equiv \left\{\psi_j^{(i)}(x)\right\}_{j\in\mathbf{Z}}, \quad i \in \mathbf{Z}.$$

2.4. Задачи, требующие и не требующие обратного преобразования. У преобразований (1) и (6) есть еще одно важное различие, которое стоит рассмотреть отдельно.

Непрерывное преобразование содержит в себе очень большой объем информации. Действительно, сигналу, определенному на $\mathbf{R}$, ставится в соответствие функция, определенная на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Непрерывное преобразование применяется в задачах, где требуется анализ сигналов, выявление особенностей, периодических зависимостей, локальных возмущений и т.д. Вычисление же этого преобразования достаточно трудоемко. Кроме того, в приложениях вычисляется не вся функция $\mathcal{W}(a, b)$, а лишь ее значения в определенных диапазонах. Очевидно, что об обратимости в таком случае говорить очень трудно. Но в задачах, где непрерывное преобразование применяется, необходимо только получение вейвлет-образа или его части, выполнять обратное преобразование не требуется.

Диадное преобразование, напротив, содержит относительно мало информации. Непрерывному сигналу ставится в соответствие дискретная функция, т.е. не более чем счетное множество чисел. Тем не менее, этой информации достаточно, чтобы преобразование было обратимым (при наложении определенных условий на вейвлеты). В задачах, где восстановление сигнала необходимо (обработка сигналов, сжатие информации и пр.), используется именно это преобразование или его модификации. Возможности же данного преобразования в области анализа сигналов существенно ниже, чем у непрерывного преобразования.

3. "Непрерывные" и "дискретные" преобразования. Чтобы избежать неоднозначности, имеет смысл говорить не о непрерывном или дискретном преобразовании, а о преобразовании непрерывных или дискретных сигналов (напомним, что определения непрерывности для функций и сигналов различаются — непрерывным сигналом называется функция с непрерывной областью определения).

Вейвлет-преобразования, заданные формулами (1) и (6), определены для функций из $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$, т.е. для непрерывных сигналов. Однако у обоих преобразований есть аналоги для дискретных сигналов.

3.1. Аналог непрерывного преобразования для дискретных сигналов. Любой дискретный сигнал $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ можно представить в виде непрерывного сигнала — кусочно-постоянной функции

$$s(x) = s_j, \quad x \in [j,\, j+1), \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Применим к такому сигналу непрерывное вейвлет-преобразование (1)–(2).

Распишем скалярное произведение из (1), подставив в него (2):

$$\mathcal{W}_{\mathbf{s}}(a,b) = \left\langle s(x) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(x)\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

Подставляя выражение для $s(x)$, получаем

$$\mathcal{W}_{\mathbf{s}}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j \int\limits_{j}^{j+1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx. \tag{15}$$

Формально можно вычислить значение $\mathcal{W}_{\mathbf{s}}(a, b)$ для любых вещественных a (кроме 0) и b. На самом деле интерес представляют только целочисленные сдвиги b и рациональные положительные масштабирующие коэффициенты a.

Если же $\mathbf{s}$ — конечный сигнал длины N, т.е. $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{N-1}$, то выражение (15) превращается в конечную сумму. Рассматриваются только целочисленные сдвиги от 0 до $N-1$. Масштабный коэффициент может быть любым, отличным от 0, однако интерес представляет диапазон от 1 до N, причем для приложений достаточно рассматривать только целые коэффициенты. Получаем:

$$\mathcal{W}_{\mathbf{s};a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{j=0}^{N-1} s_j \int\limits_{j}^{j+1} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx, \quad a = 1,\, 2,\, \ldots,\, N, \quad b = 0,\, 1,\, \ldots,\, N-1. \tag{16}$$

Таким образом, сигналу длины N поставлена в соответствие матрица размера $N \times N$.

Преобразования (15) и (16) являются по сути численной реализацией непрерывного преобразования (1) и не используются для задач, требующих восстановления сигнала, поэтому вопрос об обратимости этих преобразований здесь не рассматривается.

3.2. Диадное преобразование дискретных сигналов. Диадное преобразование дискретных сигналов является, пожалуй, наиболее распространенным преобразованием. Именно оно чаще всего и называется в литературе *дискретным*. Это преобразование можно рассматривать как частный случай преобразования (6)–(7) для специального типа сигналов, аналогично тому, как это было сделано в п. 3.1. Но существует другой подход, основанный на свойствах многомасштабного анализа.

Из масштабного соотношения (11) следует, что любая скейлинг-функция уровня разрешения i представима в виде линейной комбинации скейлинг-функций уровня $i+1$. Действительно,

$$\varphi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \, \varphi_j^{(i)}(2x-k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \, \varphi_{2j+k}^{(i+1)}(x), \quad i,\, j \in \mathbf{Z}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$v_j^{(i)} = \left\langle f(x) \;\middle|\; \varphi_j^{(i)}(x) \right\rangle = \left\langle f(x) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \, \varphi_{2j+k}^{(i+1)}(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle f(x) \;\middle|\; h_k \, \varphi_{2j+k}^{(i+1)}(x) \right\rangle = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \left\langle f(x) \;\middle|\; \varphi_{2j+k}^{(i+1)}(x) \right\rangle = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \, v_{2j+k}^{(i+1)}, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Аналогично, из масштабного соотношения для вейвлетов (12) получаем выражение

$$\psi_j^{(i)}(x) = \sqrt{2} \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_l \, \varphi_j^{(i)}(2x-l) = \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_l \, \varphi_{2j+l}^{(i+1)}(x), \quad i, j \in \mathbf{Z}, \tag{18}$$

откуда следует, что

$$w_j^{(i)} = \left\langle f(x) \;\middle|\; \psi_j^{(i)}(x) \right\rangle = \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_l \left\langle f(x) \;\middle|\; \varphi_{2j+l}^{(i+1)}(x) \right\rangle = \sum_{l\in\mathbf{Z}} g_l \, v_{2j+l}^{(i+1)}, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, коэффициенты при скейлинг-функциях и вейвлет-коэффициенты любого уровня разрешения i выражаются через коэффициенты при скейлинг-функциях уровня разрешения $i+1$:

$$v_j^{(i)} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} v_{2j+k}^{(i+1)} \, h_k, \quad w_j^{(i)} = \sum_{l\in\mathbf{Z}} v_{2j+l}^{(i+1)} \, g_l, \quad i, j \in \mathbf{Z}. \tag{19}$$

Получены рекурсивные формулы вычисления коэффициентов при скейлинг-функциях и вейвлетах уровня i по коэффициентам при скейлинг-функциях уровня $i+1$. Возникает вопрос о первом шаге, т.е. о вычислении коэффициентов при скейлинг-функциях некоторого начального уровня разрешения i_1 (заметим, что в данном случае под "начальным" понимается не наиболее низкий (грубый), а наоборот, высокий уровень разрешения).

Для непрерывных сигналов наивысший уровень разрешения в общем случае равен $+\infty$. Поэтому в качестве начального шага приходится брать коэффициенты представления сигнала с некоторым конечным разрешением i_1. Очевидно, что точность представления тем выше, чем больше выбрано значение i_1. Коэффициенты начального представления находятся по определению:

$$v_j^{(i_1)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi_j^{(i_1)}(\bullet) \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \varphi_j^{(i_1)}(x) \, dx, \quad j \in \mathbf{Z}.$$

Если входной сигнал дискретный, то в качестве коэффициентов при скейлинг-функциях уровня разрешения i_1 можно взять собственно компоненты этого сигнала. Понятно, что в этом случае значением i_1 может быть произвольное целое число, на точность представления оно не влияет.

Коэффициенты при скейлинг-функциях разрешения i_1 определены, и по формулам (19) можно вычислить коэффициенты разложения для любого разрешения, меньшего i_1. Очевидно, что на практике выполняется конечное число шагов. Если прервать вычисления на некотором уровне $i_0 < i_1$, то в результате будет получено представление сигнала с разрешением i_0 (т.е. коэффициенты при скейлинг-функциях $\{v_j^{(i_0)}\}_{j\in\mathbf{Z}}$), а также детализирующие коэффициенты $\{w_j^{(i)}\}_{i,j\in\mathbf{Z},\, i_0 \leqslant i < i_1}$.

Получим следующую модификацию формул (19):

$$v_j^{(i)} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} v_{2j+k}^{(i+1)} \, h_k, \quad w_j^{(i)} = \sum_{l\in\mathbf{Z}} v_{2j+l}^{(i+1)} \, g_l, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad i = i_1-1,\, i_1-2,\, \ldots,\, i_0; \quad v_j^{(i_1)} = s_j, \quad j \in \mathbf{Z}. \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) определяют *прямое дискретное диадное* вейвлет-преобразование.

Теперь получим формулы для восстановления сигнала (обратного преобразования). Подставим (17) и (18) в очевидное тождество

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i+1)}\,\varphi_j^{(i+1)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i)}\,\varphi_j^{(i)}(x) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\,\psi_j^{(i)}(x), \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{21}$$

Получим:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i+1)}\,\varphi_j^{(i+1)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i)}\,h_k\,\varphi_{2j+k}^{(i+1)}(x) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\,g_l\,\psi_{2j+l}^{(i+1)}(x), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Сдвинем в правой части индекс k на $2j$ и изменим порядок суммирования:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i+1)}\,\varphi_j^{(i+1)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i)}\,h_{k-2j}\,\varphi_k^{(i+1)}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)}\,g_{k-2j}\,\varphi_k^{(i+1)}(x), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Поменяем в правой части обозначения индексов k и j:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(i+1)}\,\varphi_j^{(i+1)}(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(v_k^{(i)}\,h_{j-2k} + w_k^{(i)}\,g_{j-2k}\right)\varphi_k^{(i+1)}(x), \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Таким образом, получено выражение для коэффициентов при скейлинг-функциях уровня разрешения $i+1$ через коэффициенты при скейлинг-функциях и вейвлет-коэффициенты уровня разрешения i:

$$v_j^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(v_k^{(i)}\,h_{j-2k} + w_k^{(i)}\,g_{j-2k}\right), \quad i,\, j \in \mathbf{Z}. \tag{22}$$

Имея представления сигнала с разрешением i_0 и набор вейвлет-коэффициентов, полученных по формулам (20), можно с помощью рекурсивной формулы (22) восстановить сигнал с любым разрешением от i_0+1 до i_1:

$$v_j^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(v_k^{(i)}\,h_{j-2k} + w_k^{(i)}\,g_{j-2k}\right), \quad i = i_0,\, i_0+1,\, \ldots,\, i_1-1, \quad j \in \mathbf{Z}. \tag{23}$$

Формулы (22) и (23) определяют *обратное дискретное диадное* вейвлет-преобразование.

Введем несколько иную форму записи для прямого и обратного дискретного диадного преобразований. Эта форма достаточно распространена в литературе, посвященной приложениям вейвлет-анализа в области обработки сигналов. Воспользуемся следующими обозначениями:

$$\mathbf{v}_i \equiv \{v_j^{(i)}\}_{j\in\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{w}_i \equiv \{w_j^{(i)}\}_{j\in\mathbf{Z}}, \quad i \in \mathbf{Z}.$$

Введем операторы $\uparrow_n[\mathbf{s}]$ и $\downarrow_n[\mathbf{s}]$, определенные для целых неотрицательных значений n. Первый оператор из входного сигнала $\mathbf{s}$ оставляет только элементы с индексами вида $k\,n,\ k \in \mathbf{Z}$. Второй оператор добавляет после каждого элемента входного сигнала $n-1$ нулевых элементов. Положим, что при $n=0$ и $n=1$ оба оператора не изменяют сигнал. Введем также операцию $\mathbf{s}^*$ перенумерации элементов сигнала $\mathbf{s}$ в обратном порядке (если сигнал бесконечный и определен на всем множестве индексов $\mathbf{Z}$, то операция эквивалентна изменению знака индекса каждого элемента сигнала на противоположный).

Теперь формулы (19) и (22) можно записать соответственно следующим образом:

$$\mathbf{v}_i = \downarrow_2[\mathbf{v}_{i+1} * \mathbf{h}^*], \quad \mathbf{w}_i = \downarrow_2[\mathbf{v}_{i+1} * \mathbf{g}^*], \quad i \in \mathbf{Z}, \tag{24}$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \uparrow_2[\mathbf{v}_i] * \mathbf{h} + \uparrow_2[\mathbf{w}_i] * \mathbf{g}, \quad i \in \mathbf{Z}, \tag{25}$$

Здесь символ $*$ обозначает операцию свертки. (Читателю предлагается самостоятельно проверить эквивалентность формул (24), (25) и (19), (22) соответственно.)

В такой постановке наборы коэффициентов $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ называются *фильтрами*. Фильтр $\mathbf{h}$ используется для выделения огрубленной (низкочастотной) части сигнала, а фильтр $\mathbf{g}$ — для выделения детализирующей информации. Поэтому справедливо называть первый фильтр *низкочастотным*, а второй — *высокочастотным.*

Часто формулы (24) и (25) записывают с помощью так называемого Z-преобразования. *Z-преобразованием* дискретного сигнала $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j\in Z}$ называется полином

$$P_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} s_j\, z^{-j}$$

(как видно, этот полином может содержать члены как с положительными, так и с отрицательными степенями аргумента; такой полином носит название *полинома Лорана*). Очевидно, что если сигнал имеет конечное число отличных от нуля элементов, то и его Z-преобразование будет полиномом с конечным числом членов.

Z-преобразования обладают следующим важным свойством: свертка двух дискретных сигналов эквивалентна перемножению их Z-преобразований (произведению полиномов), т.е. для любых сигналов $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ справедливо следующее:

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} * \mathbf{s} \iff P_{\mathbf{q}}(z) = P_{\mathbf{r}}(z)\, P_{\mathbf{s}}(z)$$

(как известно, аналогичным свойством обладает преобразование Фурье).

В дальнейшем для Z-преобразования некоторого сигнала $\mathbf{s}$ вместо обозначения $P_{\mathbf{s}}(z)$ будем использовать сокращенное обозначение $s(z)$.

Использование Z-преобразований в записи вейвлет-преобразований с помощью фильтров делает ее более удобной и наглядной. В частности, чтобы показать, что компоненты сигнала $\mathbf{s}$ нужно брать в обратном порядке, не требуется вводить новое обозначение $\mathbf{s}^*$. Если $s(z)$ — Z-преобразование сигнала $\mathbf{s}$, то Z-преобразованием сигнала $\mathbf{s}^*$ является $s(z^{-1})$. Кроме того, если фильтр выписан в виде Z-преобразования, то сразу становится видно, какие индексы имеют его элементы (индекс элемента равен степени соответствующего члена, взятой с противоположным знаком).

Вот как выглядят формулы (24) и (25) в терминах Z-преобразований:

$$v_i(z) = \downarrow_2 \left[h(z^{-1})\, v_{i+1}(z)\right], \quad w_i(z) = \downarrow_2 \left[g(z^{-1})\, v_{i+1}(z)\right], \quad i \in \mathbf{Z}, \tag{26}$$

$$v_{i+1}(z) = h(z) \times \uparrow_2 [v_i(z)] + g(z) \times \uparrow_2 [w_i(z)], \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{27}$$

Отметим некоторые свойства полученных формул.

Прежде всего, в них нигде в явном виде не фигурируют ни скейлинг-функции, ни вейвлеты. Вместо них используются фильтры $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ (или $h(z)$ и $g(z)$), элементами которых являются коэффициенты соответствующих масштабных соотношений.

Пример. Есть целое семейство ортогональных вейвлетов, которые вообще не имеют аналитического выражения и определяются только фильтрами. Это семейство носит название **вейвлетов Добеши**. Скейлинг-функции и вейвлеты Добеши — это непрерывные функции, не тождественные нулю на конечном отрезке и нигде на этом отрезке не дифференцируемы. Приведем коэффициенты фильтров для скейлинг-функций и вейвлетов Добеши D_4 (число 4 обозначает количество ненулевых коэффициентов в фильтрах):

$$h(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3}, \quad g(z) = -h_3 z^2 + h_2 z - h_1 + h_0 z^{-1};$$

$$h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Поскольку в формулах (24), (25) и в эквивалентных им формулах (26), (27) вместо базисных функций используются фильтры, то условие обратимости преобразования также имеет смысл выразить через эти же фильтры (напомним, что условием обратимости в терминах функций было требование ортонормированности базиса).

Очевидно, что преобразование будет обратимо тогда и только тогда, когда при подстановке выражений (26) в формулу (27) последняя превратится в верное тождество для любого $v_{i+1}(z)$. Читателю предлагается самостоятельно проверить, что для этого достаточно выполнения следующих условий:

$$h(z)\, h(z^{-1}) + g(z)\, g(z^{-1}) = 2, \quad h(z)\, h(-z^{-1}) + g(z)\, g(-z^{-1}) = 0. \tag{28}$$

В литературе принята следующая терминология. Вычисление преобразования по формулам (19) – (22) или (20) – (23) называется *быстрым вейвлет-преобразованием*[4] (БВП). Схему разложения, записанную с помощью формул (24) – (25) (либо (26) – (27)) называют *субполосным преобразованием* (subband transform).

[4] fast wavelet transform (FWT)

В п. 7 показано, что, при соблюдении ряда условий, диадное преобразование дискретного сигнала конечной длины N содержит ровно N элементов. То есть такое преобразование не увеличивает объема данных для представления сигнала.

4. Преобразования с избыточной информацией. Вейвлет-фреймы. В п. 2.4 говорилось о двух типах задач, для решения которых могут быть использованы непрерывное и диадное преобразования. Теперь рассмотрим эту проблему с несколько другой стороны.

Диадное вейвлет-преобразование (6) – (7), как показал многомасштабный анализ, есть разложение по системе вейвлетов, которая является базисом в некотором функциональном пространстве, то есть является *минимальной* порождающей это пространство системой. Это значит, что если из преобразования исключить хотя бы один элемент, то найдется сигнал, который нельзя будет полностью восстановить с помощью подобного преобразования. Преобразования, которые являются разложениями по базису в рассматриваемом функциональном пространстве, будем называть преобразованиями, *не содержащими избыточной информации.*

Если же преобразование выполняется по системе функций, которая содержит базис, но не совпадает с ним, то такое преобразование будем называть преобразованием, *содержащим избыточную информацию.* К таким преобразованиям относится непрерывное вейвлет-преобразование (1) – (2). К этой же группе отнесем и различные модификации непрерывного преобразования для дискретных сигналов, например те, которые обсуждались в п. 3.1.

Преобразования, не содержащие избыточной информации, предложено называть так потому, что в них содержится ровно столько информации, чтобы преобразование было обратимым. Однако этой информации может оказаться недостаточно для решения тех задач, где обратное преобразование может и не требоваться, зато необходим детальный анализа сигнала по его образу. Например, диадное ортогональное преобразование не инвариантно сдвигу сигнала. В качестве примера читателю предлагается найти два шага преобразования Хаара двух дискретных сигналов $s_1(z) = z + z^{-1}$ и $s_2(z) = z^{-1} + z^{-2}$ и убедиться, что они существенно отличаются друг от друга, хотя s_2 есть лишь сдвинутая на 1 копия s_1. Подобное свойство существенно ограничивает возможности преобразования в задачах распознавания, классификации, поиска по шаблону, сегментации и пр.

С другой стороны, нетрудно заметить, что для непрерывного преобразования справедливо следующее:

$$\mathcal{W}_{f(x+\alpha)}(a,b) = \mathcal{W}_{f(x)}(a,b+\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \tag{29}$$

т.е. образ сдвинутого на любое действительное число сигнала совпадает со сдвигом на то же число образа несдвинутого сигнала.

Тем же свойством (но для целочисленных сдвигов) обладают и аналоги непрерывного преобразования для дискретных сигналов (15) и (16).

Примером преобразования, обладающего избыточной информацией и представляющего практический интерес, являются так называемые *вейвлет-фреймы* (wavelet frames). Эту конструкцию можно считать своеобразным компромиссом между непрерывным и диадным преобразованием: от непрерывного преобразования она наследует свойство (29), от диадного преобразования — относительно малый объем информации.

Вейвлет-фреймы — это преобразование, вычисляемое по формулам (1) – (2) для a и b вида

$$a = 2^{-i}, \quad i \in \mathbf{Z}; \quad b \in \mathbf{R},$$

то есть уровни разрешения выбираются так же, как и для диадного преобразования (вейвлеты соседних уровней являются сжатыми (растянутыми) в два раза копиями друг друга), но на каждом уровне разрешения разложение сигнала ведется по *всем* сдвигам вейвлета, как и в случае непрерывного преобразования.

Для случая дискретных сигналов разложение на каждом уровне разрешения ведется, разумеется, по всем целочисленным сдвигам.

Строго говоря, данное преобразование имеет смысл рассматривать только применительно к дискретным сигналом, так как, во-первых, в противном случае оно ничем не отличается от непрерывного преобразования (только вычисления производятся для специально выбранных значений масштаба a), а во-вторых, с практической точки зрения это преобразование интересно именно как “облегченный” аналог непрерывного преобразования для дискретных сигналов.

Получим для вейвлет-фреймов формулы, аналогичные формулам (26). Нетрудно заметить, что если для рекурсивных формул (26) определен начальный шаг, соответствующий максимальному разрешению i_1, то первую формулу можно переписать следующим образом:

$$v_{i_1-n}(z) =\downarrow_{2n}\left[\uparrow_{2(n-1)}\left[h(z^{-1})\right]\times v_{i_1}(z)\right], \quad n=1,\,2,\,\ldots; v_{i_1}(z)=s(z).$$

Для второй формулы подобного выражения составить нельзя, т.к. вейвлет-коэффициенты выражаются через коэффициенты при скейлинг-функциях, а не через вейвлет-коэффициенты более низкого уровня. Справедливо следующее выражение:

$$w_{i_1-n}(z) =\downarrow_{2n}\left[g(z^{-1})\times v_{i_1-n+1}(z)\right], \quad n=1,\,2,\,\ldots\,.$$

В этих формулах оператор $\uparrow$ "растягивает" фильтры, т.е. с помощью этого оператора выполняется переход с одного уровня разрешения на другой. Оператор $\downarrow$ исключает из уже преобразованного сигнала часть элементов, что соответствует исключению из преобразования "лишних" сдвигов. Поскольку у вейвлет-фреймов уровни разрешения совпадают с уровнями разрешения диадного преобразования, но используются все возможные сдвиги, то для реализации преобразования достаточно исключить из вышеприведенных формул, соответствующих диадному преобразованию, оператор $\downarrow$. Получается формула, реализующая вейвлет-фреймы:

$$\begin{aligned} w_{i_1-n}(z) &= g(z^{-1})\times v_{i_1-n+1}(z), && n=1,\,2,\,\ldots, \\ v_{i_1-n+1}(z) &= \begin{cases} \uparrow_{2(n-2)}\left[h(z^{-1})\right]\times v_{i_1}(z), & n=2,\,3,\,\ldots, \\ \mathbf{s} & n=1. \end{cases} \end{aligned} \tag{30}$$

Обратное преобразование в данном случае едва ли представляет практический интерес, если же по каким-то причинам его необходимо реализовать, то достаточно заметить, что вейвлет-фреймы — это диадное преобразование, к которому добавлена дополнительная информация. Следовательно, из представления требуется лишь выделить те коэффициенты, которые соответствуют диадному преобразованию и выполнить восстановление сигнала по формулам обратного диадного преобразования.

Оценим объем данных, необходимый для представления сигнала с помощью вейвлет-фреймов. Напомним, что если исходный сигнал имеет конечную длину N, то аналог непрерывного преобразования, выполненный по формулам (16), будет содержать $N\times N$ элементов, а диадное преобразование N — элементов. Представление, полученное с помощью вейвлет-фреймов, будет иметь K уровней разрешения, на каждом уровне будет по N элементов (количество возможных сдвигов). В результате получается $K\times N$ элементов.

Дальнейшее изложение в основном будет посвящено преобразованиям, не содержащим избыточной информации.

5. Неортогональные вейвлеты. В этом разделе рассматривается возможность снятия требования ортогональности с вейвлет-базисов и приводится общепринятая классификация вейвлетов по степени ортогональности.

5.1. Необходимость ослабления требования ортогональности. Ортогональность базиса вейвлетов является достаточно сильным ограничением. Существует ряд требований к базисам со стороны приложений, и возникает вопрос о том, в какой степени базисы могут удовлетворять этим требованиям.

Отметим некоторые из этих требований.

Компактный носитель скейлинг-функции и вейвлета. (Носитель — это подмножество области определения, на котором функция не равна тождественно нулю.) Скейлинг-функции и вейвлеты с компактным носителем имеют конечное (причем относительно малое) количество отличных от нуля коэффициентов своих масштабных соотношений (в терминах фильтров это означает, что и низкочастотный, и высокочастотный фильтры имеют *конечную импульсную характеристику*[5] (КИХ). Следовательно, для таких базисов возможна эффективная реализация БВП.

Гладкость. Гладкость скейлинг-функций и вейвлетов важна для задач аппроксимации, сжатия информации и пр.

Симметрия. Скейлинг-функция и вейвлет являются симметрическими или антисимметрическими относительно центра носителя функциями. Это значит, что если центр носителя перенести в начало координат, то функция окажется либо четной, либо нечетной.

Количество нулевых моментов. Количество нулевых моментов у вейвлетов также важно в задачах сжатия и аппроксимации. Действительно, наличие у функции N нулевых моментов фактически означает ортогональность этой функции полиномам степени не выше $N-1$. А это значит, что у кусочно-полиномиальной функции степени не выше $N-1$ разложение по вейвлетам с N нулевыми моментами

[5] finite impulse response (FIR)

будет иметь конечное число уровней разрешения (т.е. все вейвлет-коэффициенты, начиная с некоторого разрешения, будут равны 0).

Проблема заключается в том, что невозможно построить ортонормированный базис гладких симметричных вейвлетов с компактным носителем. Вейвлеты Хаара, например, являются симметричными и обладают компактным носителем. Но, являясь кусочно-постоянными функциями, они имеют точки разрыва, т.е. не являются гладкими. Кроме того, у вейвлетов Хаара всего один нулевой момент. Большей гладкостью обладают вейвлеты Добеши (они по крайней мере непрерывны на всей области определения), они также имеют большее количество нулевых моментов (например, два нулевых момента для D_4), но не являются симметричными.

Тем не менее, базис гладких симметричных вейвлетов с компактным носителем существует, но он не является ортонормированным.

5.2. Неортогональный многомасштабный анализ. В определении многомасштабного анализа (см. п.) требование ортогональности системы базисных скейлинг-функций $\mathbf{\Phi}^{(0)} = \{\varphi(x-j)\}_{j\in\mathbf{Z}}$ подпространства $V^{(0)}$ можно ослабить и потребовать, чтобы система являлась *базисом Рисса*[6].

Как следствие, базис скейлинг-функций $\mathbf{\Phi}^{(i)}$ в любом подпространстве $V^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, также будет базисом Рисса. Любое подпространство $V^{(i+1)}$, $i \in \mathbf{Z}$, представимо в виде прямой суммы подпространств $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$, но они не обязаны быть ортогональными друг другу. Из этого, в частности, следует, что по многомасштабному анализу $\mathbf{V}$ соответствующая последовательность детализирующих подпространств $\mathbf{W}$ может определяться неоднозначно.

Базисы вейвлетов $\mathbf{\Psi}^{(i)}$ в детализирующих подпространствах $W^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, также должны быть базисами Рисса.

На основе такого многомасштабного анализа строятся различные неортогональные вейвлет-преобразования.

5.3. Биортогональные преобразования. Одним из недостатков разложения сигнала по неортогональному базису является то, что для вычисления коэффициентов разложения нельзя пользоваться теми же самыми базисными функциями. То есть если базис $\mathbf{e} = \{e_j\}_j$ ортонормированный, то разложение сигнала f является обобщенным рядом Фурье:

$$f \sim \sum_j \langle f \mid e_j \rangle \, e_j.$$

Если же базис неортогональный, то необходимо найти *двойственный* к нему базис $\tilde{\mathbf{e}} = \{\tilde{e}_j\}_j$, такой, что

$$\langle e_j \mid \tilde{e}_k \rangle = \sigma_{j,k}.$$

Тогда сигнал f представим в виде:

$$f \sim \sum_j \langle f \mid \tilde{e}_j \rangle \, e_j.$$

Про базисы $\mathbf{e}$ и $\tilde{\mathbf{e}}$ говорят, что они образуют *биортогональную пару.*

Теперь рассмотрим два неортогональных многомасштабных анализа $\mathbf{V}$ и $\widetilde{\mathbf{V}}$, а также два соответствующих набора детализирующих подпространств $\mathbf{W}$ и $\widetilde{\mathbf{W}}$, таких, что

$$\widetilde{V}^{(0)} \perp W^{(0)}, \quad V^{(0)} \perp \widetilde{W}^{(0)},$$

а базисные функции $\mathbf{\Phi}^{(0)}$ и $\mathbf{\Psi}^{(0)}$ пространств $V^{(0)}$ и $W^{(0)}$ составляют биортогональные пары с базисными функциями $\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{(0)}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{(0)}$ пространств $\widetilde{V}^{(0)}$ и $\widetilde{W}^{(0)}$ соответственно. Заметим, что если эти требования выполнены для уровня разрешения 0, то они будут выполнены и для любого другого разрешения $i \in \mathbf{Z}$.

При таких условиях вейвлет-базисы $\mathbf{\Psi}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ пространства $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ образуют биортогональную пару. (Это же утверждение справедливо и для комбинированных базисов, составленных из скейлинг-функций произвольного уровня разрешения i_0 и всех вейвлетов разрешения, не меньшего, чем i_0.)

Выпишем формулы *биортогонального диадного вейвлет-преобразования.* Прямое преобразование:

$$\widetilde{w}_j^{(i)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \widetilde{\psi}_j^{(i)}(\bullet) \right\rangle, \quad i, j \in \mathbf{Z}. \tag{31}$$

[6]Последовательность $\{y_j\}$ в гильбертовом пространстве является *базисом Рисса*, если любой элемент y этого пространства может быть представлен единственным образом в виде разложения $y = \sum_j \alpha_j y_j$, и существуют константы $0 < A \leqslant B$, такие, что $A\|y\|^2 \leqslant \sum_j |\alpha_j|^2 \leqslant B\|y\|^2$. Очевидно, что для ортонормированного базиса $A = B = 1$ и неравенство превращается в равенство Парсеваля.

Обратное преобразование:

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widetilde{w}_j^{(i)} \, \psi_j^{(i)}(x). \tag{32}$$

Ортогональное преобразование является частным случаем биортогонального. Действительно, ортонормированный базис биортогонален самому себе и формулы (31), (32) для такого базиса превращаются в уже известные формулы (6), (8) соответственно.

Так же как и для ортогонального случая, возможно разложение сигнала по комбинированному базису, аналогично представлению (14), т.е. для любого уровня разрешения $i_0 \in \mathbf{Z}$ разложению (32) эквивалентно следующее представление:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widetilde{v}_j^{(i_0)} \, \varphi_j^{(i_0)}(x) + \sum_{i=i_0}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widetilde{w}_j^{(i)} \, \psi_j^{(i)}(x), \quad i_0 \in \mathbf{Z}, \tag{33}$$

где

$$\widetilde{v}_j^{(i_0)} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \widetilde{\varphi}_j^{(i_0)}(\bullet) \right\rangle, \quad i_0, \, j \in \mathbf{Z}.$$

Аналогия с ортогональными преобразованиями продолжается и при рассмотрении биортогонального преобразования дискретных сигналов. Действительно, двойственные многомасштабный анализ $\widetilde{\mathbf{V}}$ и вейвлет-пространства $\widetilde{\mathbf{W}}$ обладают абсолютно теми же свойствами, что и $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Это, в частности, означает, что для скейлинг-функций $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ существуют масштабные соотношения с коэффициентами $\tilde{\mathbf{h}}$ и $\tilde{\mathbf{g}}$ соответственно.

Один шаг прямого преобразования выполняется по формулам:

$$\widetilde{v}_j^{(i)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widetilde{v}_{2j+k}^{(i+1)} \, \tilde{h}_k, \quad \widetilde{w}_j^{(i)} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \widetilde{v}_{2j+l}^{(i+1)} \, \tilde{g}_l, \quad i, \, j \in \mathbf{Z}. \tag{34}$$

Один шаг обратного преобразования выполняется по формуле:

$$\widetilde{v}_j^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\widetilde{v}_k^{(i)} \, h_{j-2k} + \widetilde{w}_k^{(i)} \, g_{j-2k} \right), \quad i, j \in \mathbf{Z}. \tag{35}$$

Те же шаги в “фильтровой” записи. Прямой:

$$\widetilde{v}_i(z) = \downarrow_2 \left[\tilde{h}(z^{-1}) \, \widetilde{v}_{i+1}(z) \right], \quad \widetilde{w}_i(z) = \downarrow_2 \left[\tilde{g}(z^{-1}) \, \widetilde{v}_{i+1}(z) \right], \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{36}$$

Обратный:

$$\widetilde{v}_{i+1}(z) = h(z) \times \left[\widetilde{v}_i(z) \right] + g(z) \times \left[\widetilde{w}_i(z) \right], \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{37}$$

Условие обратимости в биортогональном случае выглядит так:

$$h(z) \, \tilde{h}(z^{-1}) + g(z) \, \tilde{g}(z^{-1}) = 2, \quad h(z) \, \tilde{h}(-z^{-1}) + g(z) \, \tilde{g}(-z^{-1}) = 0. \tag{38}$$

Нетрудно заметить, что в ортогональном случае $h(z) = \tilde{h}(z)$ и $g(z) = \tilde{g}(z)$, и формулы (34) – (38) переходят соответственно в формулы (19), (22), (26) – (28).

5.4. Полуортогональные преобразования. Так называемые *полуортогональные* вейвлеты редко выделяют из класса биортогональных. Дело в том, что по большинству признаков они являются обычными биортогональными вейвлетам и реализация преобразований выполняется по тем же самым алгоритмам, что и реализация биортогональных преобразований. Однако они обладают одной особенностью, которая позволяет отличать их от всех прочих биортогональных базисов.

На многомасштабный анализ $\mathbf{V}$ и вейвлет-пространства $\mathbf{W}$, порождающие полуортогональные вейвлеты, накладываются следующие ограничения: так же как и в ортогональном случае, на любом уровне разрешения $i \in \mathbf{Z}$ пространство $W^{(i)}$ обязано быть *ортогональным дополнением* $V^{(i)}$ до $V^{(i+1)}$. При этом базисы этих пространств не обязаны быть ортогональными. Аналогичное требование накладывается и на двойственные многомасштабный анализ $\widetilde{\mathbf{V}}$ и вейвлет-пространства $\widetilde{\mathbf{W}}$.

Разложение по полуортогональным вейвлетам обладает следующим свойством: представление сигнала с любым разрешением $i \in \mathbf{Z}$ является *ортогональной проекцией* сигнала на подпространство $V^{(i)}$, что, как известно, является *наилучшим приближением* сигнала в подпространстве.

Примером полуортогональных вейвлетов являются так называемые **B-сплайновые вейвлеты** [7, 9]. Скейлинг-функциями таких конструкций являются B-сплайны определенного порядка, как правило, первого (линейные сплайны), второго (квадратичные сплайны) или третьего (кубические сплайны). Одним из распространенных приложений этих вейвлетов является обработка B-сплайновых кривых соответствующих порядков.

Ниже приводятся фильтры, соответствующие кубическим B-сплайновым вейвлетам.

$$\begin{aligned}
h(z) &= h_0 + h_1(z + z^{-1}) + h_2(z^2 + z^{-2}),\\
g(z) &= g_0 + g_1(z + z^{-1}) + g_2(z^2 + z^{-2}) + g_2(z^3 + z^{-3}),\\
\tilde{h}(z) &= g_0 - g_1(z + z^{-1}) + g_2(z^2 + z^{-2}) - g_3(z^3 + z^{-3}),\\
\tilde{g}(z) &= h_0 - h_1(z + z^{-1}) + h_2(z^2 + z^{-2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h_0 = \frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{2}}{16},\\
&g_0 = \frac{5\sqrt{2}}{4}, \quad g_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{32}, \quad g_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad g_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{32}.
\end{aligned}$$

6. Преобразования, сохраняющие и не сохраняющие норму. В выражении для вейвлетов непрерывного преобразования (2) присутствует нормирующий коэффициент $1/\sqrt{|a|}$, который гарантирует сохранения нормы для любого вейвлета. Например, достаточно потребовать, чтобы норма $\psi(x)$ была равна 1, и в этом случае нормы всех вейвлетов, удовлетворяющих соотношению (2), также будет равна 1.

Таким образом, свойство *сохранения нормы* не гарантирует *нормализации* системы функций, но делает нормализацию очень простой — достаточно лишь потребовать, чтобы норма любой одной функции системы была равна 1.

Нормирующий коэффициент (и, следовательно, свойство сохранения нормы) наследуют и диадные преобразования, причем как для вейвлетов, так и для скейлинг-функций. В ортогональном случае требование ортонормированности базиса в пространствах $V^{(0)}$ и $W^{(0)}$ благодаря наличию нормирующих коэффициентов автоматически приводит к нормализации базисных функций во всех пространствах $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$, $i \in \mathbf{Z}$, и, следовательно, к нормализации базиса вейвлетов в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$.

Свойство сохранения нормы базисных функций имеет место и в том случае, когда требование ортонормированности заменяется на условие базиса Рисса. Для нормализации базиса снова достаточно потребовать нормализации любой базисной функции.

Строго говоря, во всех описанных выше случаях вейвлеты и скейлинг-функции каждого уровня разрешения являются не только сжатыми или растянутыми по оси абсцисс, но и соответственно растянутыми или сжатыми по оси ординат копиями соответствующих порождающих функций.

Например, в случае диадного преобразования функции уровня разрешения $i \in \mathbf{Z}$ в два раза сжаты по оси OX и в $\sqrt{2}$ раза растянуты по оси OY по сравнению с уровнем разрешения $i - 1$.

В дискретном случае нельзя говорить о нормализации в смысле нормы функции. Однако свойство сохранения нормы присутствует и в этом случае (нормирующие коэффициенты “заложены” в коэффициенты масштабных соотношений, которые используются при расчете преобразований для дискретных сигналов).

Разложение сигнала по нормированному базису бывает необходимо в задачах аппроксимации, когда требуется оценка погрешности приближения. Как известно, квадрат нормы функции равен сумме квадратов коэффициентов разложения этой функции по ортонормированному базису (согласно равенству Парсеваля). Для ненормированного базиса это, естественно, неверно. Поэтому, например, в задаче сжатия информации с заданной нормой ошибки требуется знать коэффициенты при нормированных базисных функциях.

Однако существует ряд задач, где нормализация базиса не только не обязательна, но, возможно, и нежелательна. Это, в частности, задачи, где требуется представить один и тот же объект на разных уровнях разрешения, т.е. с разной степенью детализации. Пусть, например, некоторая B-сплайновая кривая задана последовательностью опорных точек (узлов). С помощью шагов прямого B-сплайнового вейвлет-преобразования количество опорных точек можно уменьшить, кривая таким образом будет сглаживаться. Однако хотелось бы, чтобы диапазон координат узлов не менялся, т.е. чтобы кривая только сглаживалась, а не растягивалась бы при этом на каждом шаге в $\sqrt{2}$ раз, что будет иметь место в случае преобразования, сохраняющего норму.

Другой пример — вейвлет-преобразование растровых изображений. Как известно, часто интенсивность пиксела (либо интенсивность цветовой компоненты пиксела) кодируется только одним байтом, что соответствует диапазону значений от 0 до 255. Преобразования, сохраняющие норму, неминуемо увеличат диапазон возможных значений коэффициентов, что вовсе не приветствуется, например, в задачах сжатия.

Таким образом, наряду с преобразованиями, сохраняющими норму, практическое значение имеют и преобразования, все вейвлеты и скейлинг-функции которых имеют одну и ту же высоту (т.е. не растягиваются и не сжимаются по оси ординат). Такие преобразования в литературе как правило называются *ненормализованными*.

Для ненормализованных преобразований справедливы практически те же соотношения, что и для преобразований, сохраняющих норму, но без нормирующих коэффициентов. Например, выражения для вейвлетов и скейлинг-функций ненормализованного диадного преобразования имеют вид:

$$\varphi_j^{(i)}(x) = \varphi(2^i x - j), \quad \psi_j^{(i)}(x) = \varphi(2^i x - j), \quad i, j \in \mathbf{Z},$$

а масштабные соотношения выглядят так:

$$\varphi(x) = \sum_{k \in K} h_k \, \varphi(2x - k), \quad \psi(x) = \sum_{l \in L} g_l \, \varphi(2x - l).$$

Коэффициенты масштабных соотношений для ненормализованных преобразований также совпадают с коэффициентами аналогичных преобразований, сохраняющих норму, с точностью до множителя. Так, коэффициенты прямого преобразования в ненормализованном случае должны быть в $\sqrt{2}$ раз больше, а обратного — в $\sqrt{2}$ раз меньше соответствующих "нормализованных" коэффициентов.

Из этого, в частности, следует, что класс ненормализованных преобразований полностью содержится в классе биортогональных преобразований. В то же время образуется новый подкласс биортогональных преобразований — ортогональные ненормализованные преобразования. Нетрудно заметить, что они формально не удовлетворяют определению ортогонального преобразования, так как для прямого и обратного преобразования используются разные базисы (хотя разница заключается лишь в множителях при базисных функциях), но эти базисы, безусловно, образуют биортогональную пару.

7. Преобразование сигналов, определенных на конечных интервалах. Рассмотрим некоторые проблемы преобразования сигналов, определенных на отрезках конечной длины. Благодаря пространственной локализации базисных функций обработка внутренней части сигнала ничем не отличается от случая бесконечных сигналов. Таким образом отдельного рассмотрения заслуживает вопрос обработки сигнала вблизи границ интервала.

Рассмотрим сигнал $f(x) \in \mathbf{L}_2\big([a,b]\big)$. Для простоты изложения и без ограничения общности можно положить $[a,b] = [0,1]$. Очевидно, что в таком пространстве можно определить многомасштабный анализ, причем, хотя размерность $\mathbf{L}_2\big([0,1]\big)$ бесконечна, любое пространство $V^{(i)}$ имеет конечную размерность и, следовательно, содержит конечное число базисных функций. Можно договориться рассматривать только неотрицательные значения уровня разрешения i и считать, что начальному уровню $i = 0$ соответствует пространство $V^{(0)}$ размерности 1. Такую же размерность будем иметь и пространство $W^{(0)}$. Пространство $V^{(1)}$ будет иметь размерность 2 (то есть сумму размерностей пространств $V^{(0)}$ и $W^{(0)}$), такую же размерность будет иметь пространство $W^{(1)}$. В общем случае получаем:

$$\dim V^{(i)} = \dim W^{(i)} = 2^i, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0. \tag{39}$$

Важно помнить, что для случая конечных интервалов выполнено следующее условие:

$$\dim V^{(i+1)} = \dim V^{(i)} + \dim W^{(i)}, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0. \tag{40}$$

Допустим, что в качестве базисных функций пространств $V^{(i)}$ и $W^{(i)}$ взято подмножество базисных функций соответствующих пространств многомасштабного анализа, соответственно $\big\{\varphi_j^{(i)}(x)\big\}_{j=0}^{2^i-1}$ и $\big\{\psi_j^{(i)}(x)\big\}_{j=0}^{2^i-1}$ (напомним, что при фиксированном разрешении i базисные функции в каждом из пространств являются сдвинутыми копиями друг друга).

Нетрудно, однако, заметить, что на каждом уровне разрешения i суммарный носитель этих систем функций, т.е. носитель функций-сумм

$$\Sigma_\varphi^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{2^i-1} \varphi_j^{(i)}(x), \quad \Sigma_\psi^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{2^i-1} \psi_j^{(i)}(x), \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i > 0,$$

вовсе не обязан совпадать с отрезком $[0, 1]$, на котором определен исходный сигнал[7].

Для того, чтобы корректно разложить сигнал по подобной системе функций вблизи границ, возможно пойти двумя путями:

1. доопределить сигнал так, чтобы его область определения совпала с суммарным носителем базисных функций;

2. изменить базисные функции, расположенные вблизи границ сигнала, так, чтобы суммарный носитель совпал с областью определения сигнала.

Собственно, эти два пути и определяют два основных подхода к обработке сигнала вблизи границ.

Почти все вышесказанное остается справедливым при вычислении коэффициентов разложения (т.е. коэффициентов при базисных функциях) с помощью БВП.

Для нумерации коэффициентов разложения, разумеется, используются те же индексы, что и для соответствующих им базисных функций. Поэтому для каждого разрешения $i \geqslant 0$ по формулам (34) требуется вычислять коэффициенты с индексом j, принимающем значения от 0 до $2^i - 1$. На максимальном (начальном) уровне разрешения i_1 сигнал в этом случае, очевидно, должен быть представлен 2^{i_1} компонентами.

Чтобы избежать выхода за границы допустимого диапазона индексов в формулах (34) (и формуле обратного преобразования (35)), возможны два пути, аналогичных тем, что были перечислены выше: доопределить сигнал на расширенном множестве индексов, либо изменить фильтры вблизи границ диапазона, чтобы выхода за эти границы не происходило.

Первый подход будем называть *расширением сигнала*, второй — *модификацией функций*, или *модификацией фильтров.*

Каждый подход обладает рядом достоинств и недостатков.

Первый подход хорош тем, что он не требует внесения существенных изменений в сам процесс преобразования, не требует введения дополнительных функций или фильтров. Однако этот подход может породить следующую проблему: для полного восстановления сигнала может потребоваться включить в его вейвлет-образ дополнительную информацию, что приведет к росту объема данных для представления последнего (подробнее об этом см. ниже).

Второй подход не требует как-либо модифицировать сигнал и не приводит к необходимости хранения дополнительной информации. Однако он сводится к реализации, вообще говоря, неоднородного и нестационарного преобразования (т.е. разложения по функциям, которые не обязаны быть сдвинутыми и масштабированными копиями друг друга, а могут существенно меняться в зависимости от сдвига и уровня разрешения). Реализация такой схемы, очевидно, более сложна. Кроме более сложных вычислений непосредственно преобразования, она требует затрат на расчет базисных функций (или фильтров) специального вида, либо на их ввод и хранение в явном виде.

Заметим, что в ряде случаев один и тот же результат может быть получен с помощью обоих подходов.

Нулевое продолжение. На всей числовой прямой сигнал доопределяется нулем. Очевидно, что один и тот же эффект может быть достигнут как собственно нулевым доопределением сигнала, так и “обрезанием” базисных функций (или соответствующих им фильтров) при выходе за границы диапазона.

Константное продолжение. На отрицательной полупрямой сигнал доопределяется значением сигнала на левой границе отрезка, на положительной полупрямой — значением сигнала на правой границе. Кроме расширения сигнала подобным образом, тот же эффект будет достигнут за счет следующей модификации фильтров: коэффициенты, вышедшие за границы диапазона допустимых индексов, складываются и прибавляются к коэффициенту, который оказался в точности на границе диапазона.

Симметричное продолжение. Сигнал продолжается от границ центрально- или осесимметрично. Нетрудно заметить, что и этого эффекта можно достичь модификацией фильтра.

Однако в ряде случаев оказывается, что для правильной обработки сигнала вблизи границ какой-либо из подходов оказывается предпочтительным. Например, *периодическое продолжение* сигнала хотя и может быть выражено через модификацию фильтра, но длина такого фильтра должна совпадать с длиной сигнала, при этом будет нарушаться требование компактности носителя, что в конечном счете снизит эффективность реализации. В этом случае гораздо удобнее воспользоваться расширением сигнала. С другой стороны, если вблизи границ вводятся базисные функции существенно иного вида, чем внутри интервала (и им, естественно, соответствуют существенно иные фильтры), то не всегда оправдано пытаться реализовать такой способ обработки через расширение сигнала. В качестве примера можно указать B-сплайновые вейвлеты, интерполирующие концы интервала [13, 19]. Эти вейвлеты использую-

[7] Совпадение произойдет только в том случае, если размер носителя равен величине сдвига. Таким свойством обладают только скейлинг-функции и вейвлеты Хаара.

ся для обработки незамкнутых B-сплайновых кривых. Вдали от концов кривые ведут себя как обычные B-сплайновые кривые — они не проходят через свои управляющие точки, если только последние не расположены на одной прямой. Однако начало и конец кривой должны совпадать соответственно с первой и последней управляющей точками, причем первое и последнее звено управляющей ломаной являются отрезками касательных к кривой в точках начала и конца. Интерполяция концов обеспечивается введением специальных функций вблизи первой и последней управляющей точки кривой, и, следовательно, специальных фильтров. Любопытно, однако, что для обработки замкнутых B-сплайновых кривых [4] как нельзя лучше подходит периодическое продолжение сигнала, которое, как было отмечено выше, не удобно выражать через модификации базисных функций и фильтров.

Нужно отметить, что при введении новых функций (фильтров) может быть нарушено требование (39) к размерности пространств. Так, например, для случая кубических B-сплайновых вейвлетов, интерполирующих концы, размерности пространства определяются следующим образом:

$$\dim V^{(i)} = 2^i + 3, \quad \dim W^{(i)} = 2^i, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0. \tag{41}$$

Однако в любом случае условие (40) должно сохраняться.

Преобразование дискретных сигналов конечной длины сводится фактически к вышеописанной процедуре быстрого вейвлет-преобразования, с той лишь разницей, что в качестве приближения сигнала с начальным разрешением i_1 можно взять сам сигнал. Однако на практике длина сигнала не обязана быть равной или кратной степени двойки, и вообще удовлетворять какому-либо соотношению, например, (41).

Возможны следующие пути решения этой проблемы: ресэмплинг (resampling), то есть пересчет сигнала так, чтобы он содержал столько элементов, сколько требуется; отбрасывание “лишних” элементов; добавление недостающих каким-либо продолжением сигнала. Первые два пути приводят к искажениям и потерям информации. Последний путь приводит к увеличению ее объема. Выбор одного из возможных путей определяется условиями конкретной задачи.

Можно попытаться никак не менять сигнал. Пусть длина сигнала N, такой же будет и размерность пространства $V^{(i_1)}$. Потребуем, чтобы для пространств низших уровней разрешения было бы выполнено следующее:

$$\dim V^{(i)} = \left\lceil \frac{V^{(i+1)}}{2} \right\rceil, \quad \dim W^{(i)} = \dim V^{(i+1)} - \dim V^{(i)}, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i < i_1. \tag{42}$$

(Заметим, что если окажется, что $\dim V^{(i_1)} = N = 2^{i_1}$, то данное условие фактически совпадет с (39).) Условие (40) не нарушается.

Рассмотрим простейший пример. Пусть сигнал состоит из N элементов, причем N нечетное. Элементы сигнала обозначим обычным образом: $\left\{v_j^{(i_1)}\right\}_{j=0}^{N-1}$. Пусть $v_{N-1}^{(i_1)} = a$. Условимся на границах применять простейшее расширение сигнала нулевым продолжением.

Применим к такому сигналу один шаг преобразования Хаара, не сохраняющего норму, которое реализуется формулами:

$$v_j^{(i_1-1)} = \frac{v_{2j}^{(i_1)}}{2} + \frac{v_{2j+1}^{(i_1)}}{2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leqslant j \leqslant \lceil N/2 \rceil - 1,$$

$$w_j^{(i_1-1)} = \frac{v_{2j}^{(i_1)}}{2} - \frac{v_{2j+1}^{(i_1)}}{2}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leqslant j \leqslant \lceil N/2 \rceil - 2.$$

Согласно этим формулам, для вычисления элемента $v_{\lceil N/2 \rceil - 1}^{(i_1-1)}$ необходим элемент $v_N^{(i_1)}$, который, в силу нулевого продолжения, получает значение 0:

$$v_{\lceil N/2 \rceil - 1}^{(i_1-1)} = \frac{v_{N-1}^{(i_1)}}{2} + \frac{0}{2} = \frac{a}{2}.$$

Обратное преобразование должно выполняться по формулам:

$$v_{2j}^{(i_1)} = v_j^{(i_1-1)} + w_j^{(i_1-1)}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leqslant j \leqslant \lceil N/2 \rceil - 1;$$

$$v_{2j+1}^{(i_1)} = v_j^{(i_1-1)} - w_j^{(i_1-1)}, \quad j \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leqslant j \leqslant \lceil N/2 \rceil - 2.$$

Согласно этим формулам, для восстановления элемента $v_{N-1}^{(i_1)}$ необходим элемент $w_{\lceil N/2 \rceil - 1}^{(i_1-1)}$, который, в силу нулевого продолжения, также получает значение 0:

$$v_{N-1}^{(i_1)} = v_{\lceil N/2 \rceil - 1}^{(i_1-1)} + 0 = \frac{a}{2} \neq a.$$

Таким образом, при восстановлении сигнала произошло искажение информации. Чтобы избежать этого, можно на этапе прямого преобразования вычислить и запомнить элемент $w^{(i_1-1)}_{\lceil N/2\rceil-1}$. Однако это приведет к увеличению объема данных для представления преобразования. Для задач сжатия информации увеличение объема данных едва ли желательно. Другой путь — вычислять "крайние" элементы иначе, чем все остальные. В данном случае самый простой способ положить на этапе прямого преобразования $v^{(i_1-1)}_{\lceil N/2\rceil-1} = v^{(i_1)}_{N-1}$, а на этапе обратного преобразования прочитать данное выражение в обратную сторону. Однако нетрудно заметить, что на самом деле это эквивалентно модификации фильтров на границах.

Пример показал, что если не использовать модификацию фильтра, то при преобразовании сигналов произвольной длины может потребоваться хранение дополнительной информации, в противном случае полное восстановление будет невозможно[8].

8. Способы записи вейвлет-преобразований. В данном разделе наряду с предложенной выше формой записи вейвлет-преобразований с помощью фильтров вводится и иная форма записи — в терминах векторов и матриц. Обе формы сравниваются, показывается, что они обладают рядом общих свойств, но, вообще говоря, не эквивалентны.

Сопоставление существующих форм записи имеет не только теоретическое значение. Та или иная форма записи может оказаться более или менее удобной для описания решения конкретной задачи. Кроме того, практическая реализация алгоритмов вейвлет-преобразования, как правило, основывается на соответствующих формах записи. Следовательно, имеет смысл представлять, алгоритм на основе какой из форм записи может оказаться предпочтительным для решения определенной задачи.

8.1. Матричная форма записи. Наряду с предложенной выше записью в терминах фильтров существует и иная форма записи вейвлет-преобразований.

Заметим, что формулы БВП (34) можно записать в виде произведения матрицы на вектор-столбец:

$$\tilde{\mathbf{v}}_i^T = \widetilde{\mathbf{H}}\,\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}^T, \quad \tilde{\mathbf{w}}_i^T = \widetilde{\mathbf{G}}\,\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}^T, \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{43}$$

Матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$ и $\widetilde{\mathbf{G}}$ бесконечного размера, их строки состоят из компонентов соответствующих фильтров, каждая следующая строка является сдвинутой на две позиции копией предыдущей.

Для примера выпишем матрицу $\widetilde{\mathbf{H}}$ (матрица $\widetilde{\mathbf{G}}$ выглядит аналогично):

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \ldots\ \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_3 & \ldots & & & \\ & \ldots\ \tilde{h}_{-2} & \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \tilde{h}_1 & \tilde{h}_2 & \ldots & & \\ & & \ldots\ \tilde{h}_{-3} & \tilde{h}_{-2} & \tilde{h}_{-1} & \tilde{h}_0 & \tilde{h}_1 & \ldots & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

С помощью матриц выражается и обратное преобразование (35):

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}^T = \mathbf{H}\,\tilde{\mathbf{v}}_i^T + \mathbf{G}\,\tilde{\mathbf{w}}_i^T, \quad i \in \mathbf{Z}. \tag{44}$$

Столбцы матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ содержат компоненты соответствующих фильтров, каждый следующий столбец является сдвинутой на две позицией копией предыдущего.

Для примера выпишем матрицу $\mathbf{H}$ (матрица $\mathbf{G}$ выглядит аналогично):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} . & . & . & . & . \\ \ldots & h_{-1} & \ldots & & \\ \ldots & h_0 & h_{-2} & \ldots & \\ \ldots & h_1 & h_{-1} & h_{-3} & \ldots \\ \ldots & h_2 & h_0 & h_{-2} & \ldots \\ \ldots & h_3 & h_1 & h_{-1} & \ldots \\ & \ldots & h_2 & h_0 & \ldots \\ & & \ldots & h_1 & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}.$$

Очевидно, в такой постановке матричная запись не дает никаких преимуществ по сравнению с предложенными ранее формами записи.

[8]На самом деле в данном случае возможен еще один выход: потребовать константного продолжения для низкочастотных составляющих и нулевого продолжения для высокочастотных. Тогда не потребуется ни модификация фильтра, ни хранение дополнительной информации. Однако это возможно только благодаря очень простой структуре фильтра Хаара.

Теперь рассмотрим случай конечных сигналов и конечных уровней разрешения. Пусть исходный сигнал состоит из N компонентов: $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{N-1}$. Будем считать, что этот сигнал соответствует начальному разрешению i_1 и $\tilde{\mathbf{v}}_{i_1} = \mathbf{s}$. Пока для простоты изложения будем считать, что $N = 2^{i_1}$. Также для простоты изложения будем рассматривать нулевое продолжение сигнала.

Один шаг прямого преобразования теперь может быть записан так:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i_1-1}^T = \widetilde{\mathbf{H}}_{i_1-1}\,\tilde{\mathbf{v}}_{i_1}^T, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{i_1-1}^T = \widetilde{\mathbf{G}}_{i_1-1}\,\tilde{\mathbf{v}}_{i_1}^T.$$

Сигналы $\tilde{\mathbf{v}}_{i_1-1}$ и $\tilde{\mathbf{w}}_{i_1-1}$ должны иметь по $N/2$ компонентов, следовательно, матрицы прямого преобразования $\widetilde{\mathbf{H}}_{i_1-1}$ и $\widetilde{\mathbf{G}}_{i_1-1}$ должны иметь по $N/2$ строк и N столбцов. При условии нулевого продолжения сигнала на границе матрица $\widetilde{\mathbf{H}}_{i_1-1}$ является конечным фрагментов матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}$ размера $N/2 \times N$, таким, что левым верхним элементом является $\tilde{h}_0$. Аналогичным образом матрица $\widetilde{\mathbf{G}}_{i_1}$ получается как фрагмент матрицы $\widetilde{\mathbf{G}}$.

Похожие рассуждения проводятся и для шага обратного преобразования

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i_1}^T = \mathbf{H}_{i_1-1}\,\tilde{\mathbf{v}}_{i_1-1}^T + \mathbf{G}_{i_1-1}\,\tilde{\mathbf{w}}_{i_1-1}^T.$$

Матрицы $\mathbf{H}_{i_1-1}$ и $\mathbf{G}_{i_1-1}$ являются фрагментами соответственно матриц $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ размера $N \times N/2$, такими, что левым верхним элементом первой матрицы является h_0, а второй g_0.

Аналогичным образом будут выглядеть матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}_i$, $\widetilde{\mathbf{G}}_i$ и $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{G}_i$ для любого индекса $i \in \mathbf{Z}$, $i \geqslant 0$. Первые две будут иметь размер $2^i \times 2^{i+1}$, а вторые две $2^{i+1} \times 2^i$.

И прямое, и обратное преобразования можно записать с помощью не двух, а только одной — блочной — матрицы:

$$\left[\frac{\tilde{\mathbf{v}}_i^T}{\tilde{\mathbf{w}}_i^T}\right] = \left[\frac{\widetilde{\mathbf{H}}_i}{\widetilde{\mathbf{G}}_i}\right]\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}^T, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0. \tag{45}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}^T = \left[\,\mathbf{H}_i\,|\mathbf{G}_i\,\right]\left[\frac{\tilde{\mathbf{v}}_i^T}{\tilde{\mathbf{w}}_i^T}\right] \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0. \tag{46}$$

Для любого разрешения $i \in \mathbf{Z}$, $i \geqslant 0$, обе блочных матрицы квадратные, размера $2^{i+1} \times 2^{i+1}$.

С помощью блочных матриц легко записывается условие полного восстановления

$$\left[\,\mathbf{H}_i\,|\mathbf{G}_i\,\right]\left[\frac{\widetilde{\mathbf{H}}_i}{\widetilde{\mathbf{G}}_i}\right] = \mathrm{E}_i, \quad i \in \mathbf{Z}, \quad i \geqslant 0, \tag{47}$$

где E_i — единичная матрица соответствующего размера.

Теперь заметим следующее. В формулах (45) и (46) никак не отражена ни структура матриц, ни даже их размер. Таким образом, конкретный вид матриц, предложенный выше, является только частным случаем возможных матриц прямого и обратного преобразования (а именно, случаем сигналов, длина которых является степенью 2, и с нулевым продолжением).

В общем случае на матрицы прямого и обратного преобразований накладываются следующие ограничения.

1. Для разрешения i размеры матриц $\widetilde{\mathbf{H}}_i$, $\widetilde{\mathbf{G}}_i$, $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{G}_i$ должны быть соответственно $\dim V^{(i)} \times \dim V^{(i+1)}$, $\dim V^{(i)} \times \dim W^{(i+1)}$, $\dim V^{(i+1)} \times \dim V^{(i)}$ и $\dim W^{(i+1)} \times \dim V^{(i)}$ (напоминаем, что по определению $\dim V^{(i+1)} = \dim V^{(i)} + \dim W^{(i)}$). Разумеется, имеет смысл рассматривать только те разрешения, для которых размерности соответствующих пространств не меньше 1.

2. Для матриц прямого и обратного преобразования должно быть выполнено условие (47).

Таким образом, матричная форма является удобным инструментом для записи неоднородных нестационарных преобразований (то есть преобразований, реализуемых фильтрами, коэффициенты которых могут меняться в зависимости от сдвига и разрешения, или, что то же самое, разложений по функциям, которые не обязаны быть сдвинутыми и масштабированными копиями друг друга). В общем случае, эта запись вообще позволяет расширить класс вейвлет-преобразований для конечных сигналов. Однако, как правило, такая запись используется для частного случая неоднородных нестационарных преобразований, а именно для преобразований конечных сигналов с помощью модификации вблизи границ фильтров. Первые и последние строки (столбцы) соответствующих матриц заполняются коэффициентами измененных фильтров, остальные строки (столбцы) являются сдвинутыми копиями соответствующих однородных фильтров (т.е. являются фрагментами бесконечных матриц $\widetilde{\mathbf{H}}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$).

Построение матриц в некотором смысле упрощает условие полного восстановления (47). Действительно, если построена одна из блочных матриц, она квадратная и невырожденная, то вторую матрицу можно получить обращением первой.

8.2. Сравнение форм записи. Особенности реализации алгоритмов. Итак, выше были рассмотрены три формы записи вейвлет-преобразований: выражение компонентов сигналов в явном виде (быстрое вейвлет-преобразование), фильтровая запись (субполосное преобразование) и матричная запись.

Теперь рассмотрим следующий вопрос: как на основе данных записей можно построить реальные численные алгоритмы вейвлет-преобразований.

Формулы быстрого вейвлет-преобразования (34) и (35) уже сами по себе описывают готовый алгоритм. Фактически он является численной реализацией фильтровой записи (36) и (37). Однако возможна и "явная" реализация этой записи через свертки (напоминаем, что перемножение Z-преобразований сигналов эквивалентно свертке самих сигналов) и операции прореживания и добавления элементов. Это оправдано в том случае, если среда, в которой реализуется алгоритм, поддерживает функцию быстрой свертки. Так, например, реализовано вейвлет-преобразование в некоторых версиях известной системы Matlab, где операция дискретной свертки выполняется относительно быстро. Однако следует заметить, что реализация фильтровой записи в явном виде требует приблизительно в два раза больше операций, чем реализация формул БВП, за счет вычисления "лишних" элементов.

Тем не менее, обе реализации достаточно просты и эффективны, они допускают различные виды оптимизации, в том числе распараллеливание, а также сокращение количества операций (до двух раз) за счет оптимизации свертки для симметричных фильтров.

Еще одним достоинством реализации данного подхода является его универсальность. Достаточно задать компоненты четырех фильтров, и можно выполнять любое количество шагов преобразования для сигналов практически любой длины.

С другой стороны, такой подход оказывается не очень удобен для неоднородных и нестационарных схем, в частности для обработки границ конечных сигналов. Можно, конечно, реализовать более общий вид формул (34) и (35), где коэффициенты фильтров могут меняться в зависимости от сдвига и уровня разрешения, но это существенно усложнит алгоритм и снизит его эффективность, а, кроме того, потребует достаточно объемных и сложно структурированных входных данных. Поэтому для реализации таких схем в общем случае имеет смысл воспользоваться подходом, основанном на матричной записи.

Реализация матричной записи менее эффективна. Прежде всего, на каждом шаге преобразования требуется в первую очередь построить соответствующую матрицу и только потом выполнить собственно преобразование. При этом матрица для преобразования сигнала длины N должна иметь N^2 элементов. Как правило, матрицы преобразований разреженные; кроме того, часть строк и столбцов являются сдвинутыми копиями друг друга, что позволяет, во-первых, не хранить всю матрицу в явном виде, а во-вторых, сократить время выполнения операции умножения вектора на матрицу. Но даже в этом случае вряд ли удастся избежать дополнительных вычислений при переходе от одного уровня разрешения к другому, а также увеличения объема входных данных.

Достоинствами матричной записи является ее гибкость. Действительно, теоретически можно построить уникальную матрицу для каждого конкретного уровня разрешения и для сигналов любой длины. Матричная запись фактически снимает ограничения на то, какую размерность должны иметь подпространства текущего пространства многомасштабного анализа. При этом можно абстрагироваться от фильтровой природы вейвлет-преобразований и рассуждать в терминах матричных операторов проектирования. Обратимость преобразования также сводится к вопросу обратимости матриц.

Следует, однако, помнить, что чем более произвольно задаются матрицы, тем больше памяти требуется на их хранение, снижается эффективность реализации операции умножения матрицы на вектор, а также операции обращения.

Подведем итог. Реализация "фильтровой" записи более эффективна. Она предпочтительна для обработки сигналов большой длины и для частой смены фильтров. Реализация матричной записи предоставляет больше возможностей для экспериментов и модификаций различных видов преобразований. Она может быть использована для обработки сигналов сравнительно небольшой длины, для которых важна аккуратная обработка границ, и для реализации одного конкретного преобразования с возможностью его модификации в соответствии со специальными требованиями некоторой прикладной задачи.

9. Многомерные и многоканальные преобразования. Рассмотренное выше диадное преобразование является, очевидно, одномерным. Кроме того, на каждом уровне разрешения $i \in \mathbf{Z}$ пространство $V^{(i)}$ распадается на *два* подпространства уровня $i-1$. Построенная для дискретного случая схема субполосного преобразования (24) на каждом шаге прямого вейвлет-преобразования разделяет сигнал на два диапазона или *канала* (низко- и высокочастотную составляющие). Таким образом, диадное преобразование является *одномерным* и *двухканальным.*

9.1. Простейшие многомерные преобразования. Простейшим примером многомерных преобразований является "естественное" расширение одномерного случая на случай большей размерности. Функциями такого преобразования являются *тензорные произведения* одномерных функций по размерности преобразования. Например, для двумерного случая получается четыре порождающих функции — одна скейлинг-функция

$$\varphi\varphi(x,y) = \varphi(x)\,\varphi(y) \tag{48}$$

и три вейвлета

$$\varphi\psi(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y), \quad \psi\varphi(x,y) = \psi(x)\,\varphi(y), \quad \psi\psi(x,y) = \psi(x)\,\psi(y). \tag{49}$$

(для наглядности мы будем придерживаться несколько нестандартных двухбуквенных обозначений, что, во-первых, позволит избежать введения новых символов, а во-вторых, отражает структуру данного вида преобразований).

Все остальные функции определяются соотношением

$$\Omega^{(i)}_{j,k}(x,y) = 2^i\,\Omega(2^i x - j, 2^i y - k), \quad i,j \in \mathbf{Z}, \tag{50}$$

где символ Ω заменяется на $\varphi\varphi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ или $\psi\psi$.

Если система, порожденная функциями (49), является ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2)$ (для чего необходимо и достаточно, чтобы система, порожденная функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, являлась ортонормированным базисом в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$), то прямое вейвлет-преобразование сигнала $f(x,y) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2)$ будет вычисляться по формуле

$$vw^{(i)}_{j,k} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \varphi\psi^{(i)}_{j,k}(\bullet)\right\rangle, \quad wv^{(i)}_{j,k} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi\varphi^{(i)}_{j,k}(\bullet)\right\rangle, \quad ww^{(i)}_{j,k} = \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \psi\psi^{(i)}_{j,k}(\bullet)\right\rangle, \quad i,j,k \in \mathbf{Z}, \tag{51}$$

а обратное — по формуле

$$f(x,y) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(vw^{(i)}_{j,k}\,\varphi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y) + wv^{(i)}_{j,k}\,\psi\varphi^{(i)}_{j,k}(x,y) + ww^{(i)}_{j,k}\,\psi\psi^{(i)}_{j,k}(x,y)\right). \tag{52}$$

Если же одномерный базис не ортогонален и имеет биортогональную пару, порожденную функциями $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$, то соответствующие двумерные базисы, полученные с помощью тензорного произведения, также будут биортогональны. Читателю не составит труда обобщить формулы (51) и (52) на биортогональный случай.

Также несложно получить и формулы для разложения сигнала по комбинированному базису (т.е. базису, содержащему скейлинг-функции $\varphi\varphi^{(i_0)}_{j,k}(x,y)$, $j,k \in \mathbf{Z}$, некоторого уровня разрешения $i_0 \in \mathbf{Z}$).

Теперь рассмотрим реализацию такого преобразования для дискретного случая. Пусть для некоторого уровня разрешения $i+1$ имеется матрица $\mathbf{vv}_{i+1}$ коэффициентов $vv^{(i+1)}_{j,k}$, $j,k \in \mathbf{Z}$, которая является представлением с разрешением $i+1$ некоторого сигнала.

Выполним один шаг диадного дискретного преобразования для каждой строки этой матрицы. Матрица распадется на две: низкочастотную (НЧ) и высокочастотную (ВЧ). Теперь выполним один шаг того же преобразования для каждого столбца обеих матриц. Первая матрица распадется на две, условно обозначим их как НЧНЧ и НЧВЧ, вторая — на матрицы ВЧНЧ и ВЧВЧ.

Осталось заметить, что матрица НЧНЧ — это низкочастотная составляющая разрешения i, т.е. $\mathbf{vv_i}$, а остальные матрицы содержат детализирующие коэффициенты: НЧВЧ — это матрица $\mathbf{vw}_i$ коэффициентов $vw^{(i)}_{j,k}$, ВЧНЧ — матрица $\mathbf{wv}_i$ коэффициентов $wv^{(i)}_{j,k}$ и ВЧВЧ — матрица $\mathbf{ww}_i$ коэффициентов $ww^{(i)}_{j,k}$, $j,k \in \mathbf{Z}$.

Выполнение в обратной последовательности шагов одномерного обратного преобразования реализует один шаг двумерного обратного преобразования.

Таким образом, реализация двумерного вейвлет-преобразования сводится к поочередному применению шагов одномерного диадного преобразования по "горизонтали" и по "вертикали".

Из этого, в частности, следует, что в двумерном случае используются без каких-либо изменений те же фильтры, что и в одномерном, и все, сказанное относительно ортогональности преобразований, условий обратимости и т.д. автоматически переносится на двумерный случай.

Так как на каждом шаге сигнал распадается на четыре составляющие, то данное двумерное преобразование является *четырехканальным.*

Заметим, что в приложениях используется и другой вариант преобразования, хотя теоретически он вряд ли может быть обоснован. Он применим только для конечных сигналов. Сначала для каждой строки (или столбца) исходной матрицы-сигнала выполняется одномерное преобразование до тех пор, пока низкочастотная составляющая не будет представлена единственным элементом. Потом одномерное преобразование применяется уже к полученному столбцу (или строке) этих низкочастотных элементов.

С помощью тензорных произведений можно получить преобразование любой размерности. Например, трехмерное преобразование будет уже восьмиканальным.

9.2. Общий вид разбиения пространства. Посмотрим теперь, как каждый шаг дискретного вейвлет-преобразования изменяет не сам сигнал, а область его определения.

Очевидно, что область определения дискретного сигнала —это множество индексов его компонентов. Областью определения любого одномерного дискретного сигнала можно считать множество целых чисел $\mathbf{Z}$ (если реальный сигнал определен не для всех значений индексов, то он доопределяется на множестве целых индексов нулевыми элементами). Областью определения двумерного сигнала является $\mathbf{Z}^2$, d-мерного — $\mathbf{Z}^d$. Также очевидно, что шаг преобразования, разделяющий сигнал на несколько составляющих, разбивает множество индексов этого сигнала на несколько подмножеств.

Например, один шаг дискретного диадного преобразования, описанного в п. 3.2, ставит в соответствие каждой паре соседних элементов исходного сигнала один элемент низкочастотной и один элемент высокочастотной составляющих. Условно можно считать, что в низкочастотную составляющую попадают элементы с четными, а в высокочастотную — с нечетными индексами. То есть, все множество целых чисел делится на два непересекающихся подмножества (четные и нечетные), что можно записать так:

$$\mathbf{Z} = 2\,\mathbf{Z} \cup (2\,\mathbf{Z} + 1) = \bigcup_{m=0}^{1} (2\,\mathbf{Z} + m). \tag{53}$$

Теперь получим наиболее общий случай этой формулы.

Пусть D — квадратная невырожденная матрица порядка d с целым положительным определителем $M = |\mathrm{D}|$, $M \in \mathbf{Z}$, $M > 0$. Тогда существует $M - 1$ попарно непересекающихся множеств вида $\mathrm{D}\mathbf{Z}^d + \mathbf{t}_m$, где $\mathbf{t}_m \in \mathbf{Z}^d$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, $\mathbf{t}_0 = 0$ и

$$\mathbf{Z}^d = \bigcup_{m=0}^{M-1} (\mathrm{D}\mathbf{Z}^d + \mathbf{t_m}). \tag{54}$$

Воспользуемся следующей терминологией, принятой в [17]. Множество $\mathbf{Z}^d$ будем называть (d-мерной) *решеткой* (lattice). Подмножество вида $\mathrm{D}\mathbf{Z}^d + \mathbf{t}$, где D — квадратная невырожденная матрица порядка d, а $\mathbf{t} \in \mathbf{Z}^d$ — произвольный целочисленный вектор длины d, называется *подрешеткой* (sublattice). Таким образом, согласно формуле (54), если M — значение определителя матрицы D, то решетку $\mathbf{Z}^d$ можно представить в виде объединения M попарно непересекающихся подрешеток, которые являются сдвинутыми копиями подрешетки $\mathrm{D}\mathbf{Z}^d$.

Утверждается, что при заданной матрице D набор векторов $\{\mathbf{t}_m\}_{m=0}^{M-1}$ определяется единственным образом, если дополнительно потребовать, чтобы все значения $\mathrm{D}^{-1}\mathbf{t}_m$, $m = 0, 1, \ldots, M-1$, попадали в d-мерный единичный куб $[0,\ 1]^d$.

Из этого утверждения следует, что разбиение решетки полностью характеризуется матрицей D.

Пример. Если $\mathrm{D} = 2$ (матрица состоит из единственного элемента), то ей соответствуют $d = 1$, $M = 2$, $\mathbf{t}_0 = 0$, $\mathbf{t}_1 = 1$, и формула (54) с такими подстановками превращается в формулу (53), соответствующую одномерному диадному преобразованию.

Пример. Матрице

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2\,0 \\ 0\,2 \end{pmatrix}$$

соответствуют $d = 2$, $M = 4$, $\mathbf{t}_0 = (0,\ 0)$, $\mathbf{t}_1 = (1,\ 0)$, $\mathbf{t}_2 = (0,\ 1)$ и $\mathbf{t}_3 = (1,\ 1)$. Эта матрица определяет разбиение, соответствующее двумерному четырехканальному преобразованию, описанному в п. 9.1.

9.3. Общий вид d-мерного M-канального преобразования. Рассуждения предыдущего пункта помогут получить наиболее общую конструкцию для построения вейвлет-преобразований без избыточной информации в функциональном пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$.

Пусть задана квадратная невырожденная матрица D порядка d с целым положительным определителем M. Тогда *многомасштабным анализом* в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$ называется последовательность $\mathbf{V}$ подпространств $V^{(i)} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$, $i \in \mathbf{Z}$, таких, что:

1. $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z}$;
2. $\bigcup_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)}$ плотно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$;
3. $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} V^{(i)} = \emptyset$;
4. $v(\mathbf{x}) \in V^{(i)} \iff v(\mathrm{D}\mathbf{x}) \in V^{(i+1)},\ i \in \mathbf{Z}$;
5. $v(\mathbf{x}) \in V^{(0)} \iff v(x - \mathbf{t}) \in V^{(0)},\ \mathbf{t} \in \mathbf{Z}^d$;
6. существует порождающая скейлинг-функция $\varphi(\mathbf{x}) \in V^{(0)}$, интеграл которой по всему $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$ не равен нулю, такая, что последовательность $\big\{\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{t})\big\}_{\mathbf{t}\in\mathbf{Z}^d}$ является базисом Рисса в $V^{(0)}$.

Масштабное соотношение для скейлинг-функции $\varphi(\mathbf{x})$ в этом случае будет иметь вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = M^{1/2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} h_{\mathbf{k}}\, \varphi(\mathrm{D}\mathbf{x} - \mathbf{k}). \tag{55}$$

Как видно, фильтр $\mathbf{h}$ определен на всей сетке $\mathbf{Z}^d$.

Любая скейлинг-функция выражается через порождающую скейлинг-функцию следующим образом:

$$\varphi^{(i)}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = M^{i/2}\, \varphi(\mathrm{D}^i\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad i \in \mathbf{Z}, \quad \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^d.$$

Для каждой пары подпространств $V^{(i)} \subset V^{(i+1)},\ i \in \mathbf{Z}$, существует $M-1$ детализирующих подпространств $W^{(i)}_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m < M$, таких, что

$$V^{(i+1)} = V^{(i)} \oplus \bigoplus_{m=1}^{M-1} W^{(i)}_m.$$

Тогда справедливо следующее:

$$\bigoplus_{i=-\infty}^{+\infty} \bigoplus_{m=1}^{M-1} W^{(i)}_m = \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d).$$

В каждом пространстве $W^{(0)}_m$, $m \in \mathbf{Z}$, $1 \leqslant m < M$, существует порождающий вейвлет $\psi_m(x)$ — функция, такая, что последовательность $\big\{\psi_m(\mathbf{x} - \mathbf{k})\big\}_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d}$ является базисом Рисса в $W^{(0)}_m$.

Для вейвлетов справедливы следующие *масштабные соотношения*:

$$\psi_m(\mathbf{x}) = M^{1/2} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} g_{m;\mathbf{k}}\, \varphi(\mathrm{D}\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad m \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leqslant m < M. \tag{56}$$

Для каждого уровня разрешения $i \in \mathbf{Z}$ и значения $m = 1, 2, \ldots, M-1$ система вейвлетов

$$\psi^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = M^{i/2}\, \psi_m(\mathrm{D}^i\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^d$$

является базисом Рисса в пространстве $W^{(i)}_m$.

Таким образом, $M-1$ система функций

$$\mathbf{\Psi}_m = \Big\{\psi^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\mathbf{x})\Big\}_{k\in\mathbf{Z}^d}, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leqslant m < M,$$

образует базис Рисса в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$. То же справедливо и для комбинированного базиса, составленного из системы скейлинг-функций некоторого уровня разрешения i_0 и всех вейвлетов уровня, не ниже i_0.

Если по матрице D построен такой многомасштабный анализ $\mathbf{V}$ со скейлинг-функциями $\mathbf{\Phi}$, которому соответствуют детализирующие подпространства $\mathbf{W} = \big\{\{W^{(i)}_m\}_{i\in\mathbf{Z}}\big\}_{m=1}^{M-1}$ и вейвлеты $\mathbf{\Psi}_m = \{\mathbf{\Psi}_m\}_{m=1}^{M-1}$, то существует и двойственный к нему анализ $\widetilde{\mathbf{V}}$, основанный на той же матрице D, со скейлинг-функциями $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$, с детализирующими подпространствами $\widetilde{\mathbf{W}}$ и вейвлетами $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$, такой, что системы вейвлетов $\mathbf{\Psi}$ и $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ образуют биортогональную пару базисов в $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$.

В этом случае любой сигнал $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$ можно представить в виде следующего разложения:

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} \Big\langle f(\bullet) \,\Big|\, \tilde{\psi}^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\bullet)\Big\rangle\, \psi^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \tag{57}$$

или, для комбинированного базиса,

$$f(\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \tilde{\varphi}^{(i_0)}_{m;\mathbf{k}}(\bullet) \right\rangle \varphi^{(i_0)}_{m;\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=i_0}^{\infty} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^d} \left\langle f(\bullet) \;\middle|\; \tilde{\psi}^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\bullet) \right\rangle \psi^{(i)}_{m;\mathbf{k}}(\mathbf{x}), \quad i_0 \in \mathbf{Z}. \tag{58}$$

Формулы (57) и (58) определяют представление сигнала из $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$ через d-мерное M-канальное биортогональное вейвлет-преобразование.

9.4. Некоторые частные случаи преобразований. Поскольку размерность преобразования и количество каналов полностью определяется матрицей D, а выбор такой матрицы достаточно произволен, т.к. на нее не налагается никаких строгих ограничений (кроме наличия целого положительного определителя), то теоретически различных конструкций преобразований может существовать бесконечно много.

В п. 9.2 были представлены матрицы, соответствующие двум наиболее распространенным конструкциям — одномерному двухканальному (диадному) преобразованию и двумерному четырехканальному преобразованию (второе является расширением первого на двумерный случай на основе тензорного произведения).

Как было отмечено выше, с помощью тензорного произведения одномерное преобразование можно обобщить на случай любой размерности d. Такому обобщению будет соответствовать матрица

$$\mathrm{D} = 2\mathrm{E}_d, \quad d \in \mathbf{Z}, \quad d \geqslant 1,$$

где E_d — единичная матрица порядка d. Очевидно, что такое d-мерное преобразование будет 2^d-канальным.

Такое соотношение размерности и каналов не обязано соблюдаться. Например, можно построить одномерное M-канальное преобразование, где $M \in \mathbf{Z}$, $M \geqslant 2$. Матрица D, соответствующая такому преобразованию, состоит из единственного элемента M.

Существует семейство преобразований, основанных на несепарабельном разбиении пространства, по принципу шахматной доски. Наиболее очевидным примером является двумерный случай. Этому преобразованию соответствует разбиение решетки $\mathbf{Z}^2$ на две подрешетки: в одну попадают элементы, сумма индексов которых является четным числом, в другую — все остальные. Если провести аналогию с шахматной доской, то этим подрешеткам соответствуют множества черных и белых клеток. Такое разбиение задается матрицей

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

вектора сдвигов $\mathbf{t}_0 = (0,\, 0)$, $\mathbf{t}_1 = (1,\, 0)$ (это преобразование двумерное и двухканальное). Пример приложения, где используется такое разбиение, можно найти в [14].

Заключение. Итак, были рассмотрены различные виды вейвлет-преобразований непрерывных сигналов из $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^d)$ и дискретных сигналов, определенных на $\mathbf{Z}^d$.

Преобразования были систематизированы по ряду признаков, таких как тип обрабатываемых сигналов, наличие или отсутствие избыточной информации, нормализация, ортогональность базиса, размерность пространства сигнала и количество каналов (и, следовательно, типов базисных функций) преобразования. Также обсуждались и сравнивались существующие способы обработки граничных условий для сигналов, определенных на ограниченных областях, принятые формы записи преобразований и некоторые особенности реализации алгоритмов, основанных на этих формах записи.

Конечно, данная работа не охватила всего многообразия конструкций вейвлет-базисов. Например, остались не упомянутыми комплексные вейвлеты, нелинейные вейвлеты, *мультивейвлеты* [3, 15] (коэффициентами масштабных соотношений у этих конструкций являются не числа, а матрицы) и прочие довольно экзотические расширения, полученные, например, в результате отказа от требования вложенности друг в друга пространств многомасштабного анализа [6]. Не было рассмотрено такое обобщение диадного преобразования, как *вейвлет-пакеты* [5, 10], где субполосному преобразованию могут быть подвергнуты не только низкочастотные, но и высокочастотные составляющие сигнала (то есть на детализирующих подпространствах также строятся многомасштабные анализы). Не обсуждалась схема *лифтинга* [12, 17, 20], которая является еще одной формой записи преобразований, позволяющей расширить класс вейвлет-преобразований и также дающей алгоритм реализации. Для получения информации об этих и других разновидностях вейвлет-преобразований читателю предлагается обратиться к соответствующей литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бердышев В.И., Петрак Л.В.* Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
2. *Левкович-Маслюк Л.И.* Дайджест вейвлет-анализа в двух формулах и 22 рисунках // Компьютерра. 1998. № 8 (236). 31–37.
3. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основные конструкции всплесков // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. **3**, № 4. 999–1028.
4. *Переберин А.В.* Построение изолиний с автоматическим масштабированием // Вычислительные методы и программирование. 2001. **2**, № 1. 118–128.
5. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999.
6. *Bonneau G.-P., Hahmann S., Nielson G. M.* BLaC-wavelets: a multiresolution analysis with non-nested spaces // IEEE Visualization'96 Proceedings. 1996. 43–48.
7. *Chui C.K.* An introduction to wavelets. New York: Academic Press, 1992.
8. *Chui C.K.* (Editor) Wavelets: a tutorial in theory and applications. New York: Academic Press, 1992.
9. *Chui C.K., Quak E.* Wavelets on a bounded interval // Numerical Methods in Approximation Theory. 1992. **9**. 53–75.
10. *Coifman R.R., Meyer Y., Wickerhauser V.* Wavelet analysis and signal processing wavelets // Wavelets and their applocations. Boston: Jones and Barlett, 1992. 153–178.
11. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
12. *Daubechies I., Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps // IEEE Trans. Image Processing. 2000. **9**, N 3. 480–496 (http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/).
13. *Finkelstein A., Salesin D.H.* Multiresolution curves // SIGGRAPH'94 Proceedings. 1994. 261–268.
14. *Gross M.H., Staadt O.G., Gatti R.* Efficient triangular surface approximations using wavelets and quadtree data structures // IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics. 1996. **2**, N 2. 130–143.
15. *Lee S., Lawton W., Shen Z.* An algorithm for matrix extension and wavelet constructions // Mathematics of Computation. 1996. **65**, N 214. 723–737.
16. *Jawerth B., Sweldens W.* An overwiew of wavelet based multiresolution analyses // SIAM Rev. 1994. **36**, N 3. 377–412 (http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/).
17. *Kovačević J., Sweldens W.* Wavelet families of increasing order in arbitrary dimensions // IEEE Trans. Image Processing. 2000. **9**, N 3. 480–496 (http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/).
18. *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1998.
19. *Stollnitz E.J., Derose T.D., Salesin D.H.* Wavelets for computer graphics. Theory and applications. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1996.
20. *Sweldens W.* The lifting scheme: a construction of second generation wavelets // SIAM J. Math. Anal. 1996. **3**, N 2. 186–200 (http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/).
21. *Sweldens W., Schröder P.* Building your own wavelets at home // Wavelets in Computer Graphics. ACM SIGGRAPH Course Notes. 1996 (http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers/).
22. *Wojtaszczyk P.* A mathematical introduction to wavelets. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Поступила в редакцию
28.03.2001