

УДК 519.67:517.972, 531.224.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ДЛЯ ВИТОГО СТЕРЖНЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ

В. З. Цалюк¹

Задача об устойчивости упругой стойки под действием продольно сжимающей силы рассматривается для случая витого (естественно закрученного) стержня. Коэффициент увеличения критической силы, происходящего от закрутки стержня, зависит от отношения главных изгибных жесткостей и полного угла закрученности. Зависимость от угла закрученности не плавно монотонная, как предполагалось ранее, а имеет “зубцы” и “впадины” графика. Далее, понятие “коэффициента длины” не может быть перенесено с плоского случая на ситуацию с трехмерной деформацией стержня. К таким выводам мы приходим на основании расчетов критической силы, произведенных с помощью пакета **L₂**, осуществляющего точные символьные вычисления с кусочно-полиномиальными функциями. Значения критической силы для разнообразных задач получаются с гарантированной точностью при относительно незначительном использовании “человеческого ресурса”.

Ключевые слова: устойчивость стойки, критическая сила, вычисление спектрального радиуса, точные символьные вычисления.

1. Витой стержень. Задачи об устойчивости упругой стойки при действии продольно сжимающей силы обычно решаются в случае, когда деформация стержня под критической нагрузкой лежит в одной плоскости. Будем называть такие стержни плоскими. При более сложной форме стержня его деформация выходит за пределы плоскости (трехмерный стержень). В справочнике [2, с. 52] приведены результаты расчетов для так называемого витого (иначе, естественно закрученного) стержня, выполненного из однородного изотропного упругого материала. В качестве такового мы рассмотрим стержень, имеющий в ненапряженном состоянии следующую форму. Если направить вдоль стержня ось Ot так, что стержень изобразится отрезком $t \in [0, l]$, то каждое поперечное сечение представляет собой прямоугольник $[-a, a] \times [-b, b]$ (считаем $b < a$) с центром на оси Ot , повернутый на угол, пропорциональный координате t сечения.

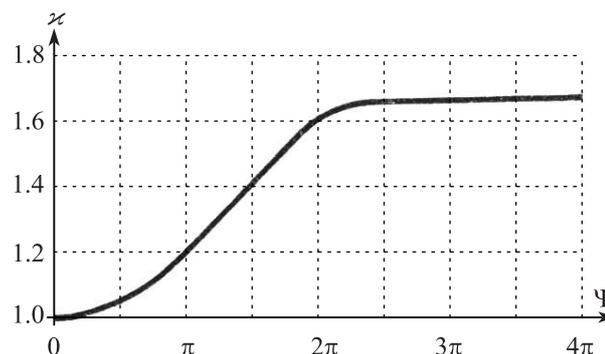


Рис. 1

Стержень подвержен продольно сжимающей силе P . При $P < P_{кр}$ стержень устойчиво сохраняет прямолинейную форму, а при $P > P_{кр}$ прямолинейная форма неустойчива [1, гл. 4]. Согласно справочнику [2],

$$P_{кр} = \kappa \frac{\pi^2 B_y}{(\mu l)^2}, \tag{1}$$

где $B_y = \frac{4}{3} ab^3 E$ — меньшая главная изгибная жесткость сечения стержня, поправочный коэффициент $\kappa > 1$ зависит от параметров стержня, а “коэффициент длины” μ отвечает за условия закрепления концов стержня. Для шарнирного закрепления концов $\mu = 1$.

На рис. 49 справочника [2] показан график зависимости коэффициента κ от полного угла закрученности Ψ для стержня, у которого отношение главных жесткостей равно 0.2. Этот график воспроизведен на рис. 1.

Относительно недавно появились новые методы решения и исследования квадратичных вариационных задач [3, 4]. Появилась возможность легко получать значения критической силы с гарантированной

¹ Кубанский государственный университет, факультет математики и компьютерных наук, ул. Ставропольская, д. 149, 350040, г. Краснодар; доцент, e-mail: vts@math.kubsu.ru

точностью. Была совершена попытка повторить новыми средствами зависимость, изображенную на рис. 1. В результате обнаружилось, что зависимость \varkappa от Ψ качественно сложнее, чем это представлялось по данным [2]. Далее, мы произвели несколько более сложных численных экспериментов для выяснения роли параметра μ .

2. Теоретические основы метода. Для изучения устойчивости стержня был использован вариационный принцип Лагранжа [1] (принцип минимума потенциальной энергии).

В общем случае модуль Юнга $E(t)$ имеет постоянное значение в каждом поперечном сечении $F(t)$. Как $E(t)$, так и $F(t)$ могут зависеть, даже разрывным образом, от t . В ненапряженном состоянии центры тяжести поперечных сечений расположены на оси Ot .

Пусть вектор-функция $\mathbf{x} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ с координатами $(x_1(t), x_2(t))^T$ описывает поперечное отклонение центральной точки сечения с координатой t от положения равновесия в результате деформации.

Обозначим $\varphi_{ij}(t) = E(t)I_{ij}(t) = E(t) \int_{F(t)} v_i v_j dv_1 dv_2$ и введем матрицу $\varphi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ изгибных

жесткостей. Это — положительно определенная симметричная матрица.

Следуя [1, с. 387–388], мы принимаем гипотезу плоских сечений. Получающееся в результате выражение для функционала потенциальной энергии, аналогичное формуле на с. 393 в [1] (отличия заключаются лишь в двумерности поперечных отклонений), содержит как продольную деформацию, так и поперечное отклонение оси стержня от положения равновесия. Продольная деформация, аналогично [1], легко вычисляется из условия стационарности функционала относительно продольной деформации при $\mathbf{x}(t) \equiv 0$. В результате в преобразованном вариационном принципе участвуют только (двумерные) поперечные отклонения оси стержня: *прямолинейное состояние стойки устойчиво, если и только если состояние равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ доставляет единственный минимум в вариационной задаче*

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt \rightarrow \min, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = 0, \tag{2}$$

где (\cdot, \cdot) — стандартное скалярное произведение двумерных векторов. Здесь краевые условия отвечают шарнирному закреплению концов стержня.

Пусть $\psi(t) = \sqrt{\varphi(t)}$. При естественных предположениях $\max_{t \in [0, l]} |\psi(t)| < \infty$ и $\min_{t \in [0, l]} \det \psi(t) > 0$. Тогда функционал \mathcal{I} определен и задача рассматривается на соболевском пространстве $H^2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ (иначе обозначаемом W_2^2).

Краевая задача

$$\psi(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{z}(t) \quad (\mathbf{z} \in L_2), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = 0$$

имеет в H^2 единственное решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\psi^{-1}\mathbf{z}, \tag{3}$$

где ψ^{-1} — оператор умножения на матрицу $\psi^{-1}(t)$, \mathbf{G} — скалярный интегральный оператор с ядром $G(t, s)$, равным $-\frac{1}{l}s(l-t)$ при $t \geq s$ и $-\frac{1}{l}t(l-s)$ при $t < s$. Это — функция Грина стандартной (скалярной) краевой задачи $\ddot{x} = z, x(0) = x(l) = 0$. В пространстве $L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ вектор-функций оператор \mathbf{G} действует покомпонентно.

Формула (3) осуществляет взаимно-однозначное соответствие между гильбертовым пространством $L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^l (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) dt$ и пространством допустимых функций задачи (2).

Получается эквивалентная задача в пространстве $L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$, уже без ограничений:

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - P \left\langle \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) \psi^{-1} \mathbf{z}, \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) \psi^{-1} \mathbf{z} \right\rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - P \left\langle \psi^{-1} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right)^* \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) \psi^{-1} \mathbf{z}, \mathbf{z} \right\rangle \rightarrow \min.$$

Далее, $\left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right)^* \left(\frac{d}{dt} \mathbf{G} \right) = -\mathbf{G}$, что легко проверить вычислением ядер этих интегральных операторов, поэтому задача записывается в виде

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + P\langle \mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \rightarrow \min, \tag{4}$$

где $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1} \mathbf{G} \psi^{-1}$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Другим способом задачу (4) можно получить, если в (2) взять по частям интеграл $\int_0^l (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt = - \int_0^l (\mathbf{x}, \ddot{\mathbf{x}}) dt = - \langle \mathbf{G} \psi^{-1} \mathbf{z}, \psi^{-1} \mathbf{z} \rangle$.

Так как оператор $-\mathbf{Q}$ положительно определен, то из [4, § 3.1] следует

Теорема 1. *Если*

$$P < P_{\text{кр}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r(\mathbf{Q})}, \tag{5}$$

где $r(\cdot)$ — спектральный радиус оператора, то задача (4), а следовательно, и (2), имеет единственный минимум. Если $P > P_{\text{кр}}$, то минимума нет.

Таким образом, формула (5) дает критическое значение силы, когда стойка теряет устойчивость.

3. Итерационные методы для нахождения спектрального радиуса $r(\mathbf{Q})$ рассмотрены в работах [5, § 12; 6, § XV.2; 7, § 9] для случая самосопряженного вполне непрерывного оператора $\mathbf{Q} \neq 0$ в гильбертовом пространстве. Мы используем здесь метод, близкий к методу Коллатца. На наш взгляд, выбранный метод отличается простотой реализации и наилучшим образом приспособлен для расчетов в среде пакета символьных вычислений.

Выберем z_0 и положим $z_i = \mathbf{Q} z_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть E — ортогональное дополнение ко всем собственным векторам, отвечающим собственным значениям, модуль которых равен $r(\mathbf{Q})$.

Теорема 2 [4, теорема 3.8]. *Последовательность чисел $\frac{\|z_i\|}{\|z_{i-1}\|}$ неубывает. Если $z_0 \notin E$, то ее предел равен $r(\mathbf{Q})$. Скорость сходимости не хуже скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{r(\mathbf{Q}|_E)}{r(\mathbf{Q})} < 1$, где $\mathbf{Q}|_{E_1}$ — сужение оператора \mathbf{Q} на подпространство E .*

4. Расчеты витого стержня. Мы приняли постоянную скорость закрутки стержня, так что $\Psi = \frac{\pi}{2} l$, и варьировали его длину. Для такого стержня имеем

$$\psi^{-1}(t) = \frac{\sqrt{3}}{4ab\sqrt{Eab}} A(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} a + b - (a - b) \cos \pi t & -(a - b) \sin \pi t \\ -(a - b) \sin \pi t & a + b + (a - b) \cos \pi t \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Заметим, что $\det A(t) \equiv 4ab$, $\|A(t)\| \equiv 2a$. Пусть \mathbf{A} — оператор умножения на матрицу $A(t)$; тогда

$$\varkappa = \frac{4a^2}{\pi^2} \frac{l^2}{r(\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A})}. \tag{7}$$

Расчеты производились с использованием пакета \mathbf{L}_2 [8], предназначенного для выполнения точных вычислений с кусочно-многочленными функциями с рациональными коэффициентами в среде системы символьных вычислений Maple V R4. Все файлы на языке Maple V R4, использованные при производстве расчетов, представлены в архиве [9].

Скорость сходимости метода, описанного в разделе 3, очень существенна, так как каждая следующая итерация выполняется с более сложными выражениями и, следовательно, дольше, чем предыдущая. Теорема 2 гарантирует сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, равным отношению второго собственного значения к старшему первому. Поэтому для ускорения сходимости полезно выделить инвариантное подпространство оператора $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}$ и производить итерации в нем. В этом подпространстве появится лишь часть собственных значений оператора, в результате чего знаменатель прогрессии может стать меньше.

Задача (2) инвариантна относительно преобразования $\mathbf{z}(t) \rightarrow (\mathbf{S}\mathbf{z})(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \Psi & -\cos \Psi \end{pmatrix} \mathbf{z}(l - t)$,

квадрат которого есть тождественный оператор. Подпространства $S^+ = \{\mathbf{z} : \mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{z}\}$, $S^- = \{\mathbf{z} : \mathbf{S}\mathbf{z} = -\mathbf{z}\}$ симметричных и антисимметричных функций инвариантны для оператора $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}$, ортогональны и дают в сумме все пространство L_2 . Далее, каждому собственному значению оператора $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}$ соответствует собственная функция, лежащая в S^+ или в S^- .

Таким образом, в каждом из этих подпространств по отдельности следует применить метод, рассмотренный в теореме 2, и затем выбрать большее из полученных значений.

Для удобства применения пакета тригонометрические функции в (6) были заменены кусочно-многочленными функциями. В результате вместо оператора \mathbf{A} умножения на матрицу $A(t)$ появился оператор \mathbf{B}

умножения на кусочно-многочленную матрицу $B(t)$, приблизительно равную $A(t)$. Имеем следующую оценку возникающей вследствие этого погрешности:

$$|r(\mathbf{BGB}) - r(\mathbf{AGA})| < 0.252 \times 10^{-5} a(a - b)l^2. \tag{8}$$

Рассчитывался стержень, по своим параметрам $a = 1, b = 4/9, E = 1$ близкий к стержню, рассмотренному в [2]: $B_y/B_x = b^2/a^2 \approx 0.1975 \approx 0.2$.

Метод, описанный в теореме 2, применялся к оператору \mathbf{BGB} . В силу точного характера символьных вычислений с рациональными дробями в Maple, единственным источником погрешности при этом является прекращение итераций.

Приведем для примера типичный расчет ($l = 2, \Psi = \pi$). Для начальной функции $\mathbf{z}_0(t) \equiv (1, 0)^T$ полученная последовательность приближений к $r(\mathbf{BGB})$ приведена в табл. 1. Отсюда заключаем, что $r(\mathbf{BGB}) \in [1.3482866, 1.3482867]$.

В силу (8), $r(\mathbf{AGA}) \in [1.3482810, 1.3482923]$. Кроме того, согласно формуле (7), $\varkappa \in [1.202364, 1.202375]$. Окончательно имеем $\varkappa = 1.20235 \pm 0.5 \times 10^{-4}$.

Было рассчитано более 50 значений l , находящихся в пределах от 0 до 10.1, что соответствует $\Psi \in (0, 5.05\pi]$. Интервальные оценки для \varkappa позволяли выписывать значения этого параметра с погрешностью, не превосходящей 0.5×10^{-4} . Начало кривой хорошо повторяет рис. 1, тогда как ее продолжение (рис. 2) качественно отличается от изображенного на рис. 1.

Таблица 1

i	$\frac{\ \mathbf{z}_i\ }{\ \mathbf{z}_{i-1}\ }$
1	1.086560086
2	1.347826786
3	1.348285710
4	1.348286675
5	1.348286677

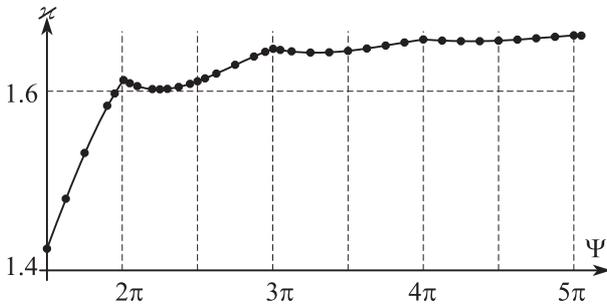


Рис. 2. Зависимость \varkappa от Ψ для $b/a = 4/9$.
Отмечены полученные расчетные точки

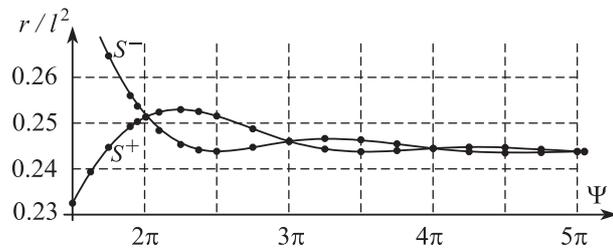


Рис. 3. Две ветви собственных значений

На основании расчетов с указанной точностью можно сделать следующие выводы. Зависимость \varkappa от Ψ , вопреки тому, что нарисовано в [2], не монотонная и не гладкая. Немного правее точек $2\pi, 3\pi$ и 4π (примерно в точках $2.01\pi, 3.003\pi$ и 4.001π) график имеет “зубцы” — точки, в которых производная функции скачкообразно меняется с положительного значения на отрицательное. Между зубцами график имеет гладкие “впадины”.

Попытка математического объяснения такого явления зубцов и впадин состоит в следующем. Рассмотрим зависимость спектрального радиуса оператора \mathbf{AGA} от Ψ в каждом из инвариантных подпространств S^+ и S^- отдельно. Графики для спектральных радиусов, приведенных к единичной длине стержня, изображены на рис. 3. Отсюда следует, что для всего пространства L_2 график зависимости $\frac{r(\mathbf{AGA})}{l^2}$ от Ψ имеет кусочно-гладкий вид, с “зубцами, направленными вниз”, а обратно пропорциональная величина как раз и есть коэффициент \varkappa .

Объяснение с точки зрения механики явления зубцов и впадин, а также смещения зубцов вправо, еще предстоит найти.

Рисунок 4 уточняет и дополняет данные [2] для некоторых значений b/a .

5. Учет дополнительных ограничений. Дополнительные связи, например заделка одного из концов стержня, приводят к следующей вариационной постановке задачи: *прямолинейное состояние стойки устойчиво, если и только если состояние равновесия $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ доставляет единственный минимум в вариационной задаче*

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}) = \int_0^l (\ddot{\mathbf{x}}, \varphi \ddot{\mathbf{x}}) - P(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}) dt \rightarrow \min, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(l) = 0, \quad \ell^i \mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{9}$$

Линейные непрерывные функционалы ℓ^i на пространстве $H^2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ описывают эти дополнительные

ограничения. Согласно теореме Рисса, существуют такие $\mathbf{l}^i = (\mathbf{G}\psi^{-1})^* \ell^i \in L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$, что условие $\ell^i \mathbf{x} = 0$ при замене (3) эквивалентно условию $\langle \mathbf{l}^i, \mathbf{z} \rangle = 0$.

Тогда задача об устойчивости сводится к исследованию положительной определенности на подпространстве $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{l}^1, \dots, \mathbf{l}^m\}^\perp$ квадратичной формы

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle + P\langle \mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle,$$

или, что эквивалентно, положительной определенности на Z оператора

$$I + P(I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1},$$

или положительной определенности на $L_2([0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ оператора

$$I + P(I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1}(I - \mathbf{P}),$$

где \mathbf{P} — ортогональный проектор на линейную оболочку Z^\perp системы функций $\mathbf{l}^i, i = 1, \dots, m$.

Рассматриваемые операторы — интегральные и самосопряженные в соответствующих пространствах. Согласно теореме 1, критическое значение силы определяется формулой

$$P_{\text{кр}} = \frac{1}{r((I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1})} = \frac{1}{r((I - \mathbf{P})\psi^{-1}\mathbf{G}\psi^{-1}(I - \mathbf{P}))},$$

где первый из спектральных радиусов вычисляется в подпространстве Z , а второй — во всем пространстве L_2 . Значение спектрального радиуса можно вычислить методом, рассмотренным в теореме 2.

6. Витой стержень с заделкой одного конца. Вернемся к формуле (1). Очевидно, что различие коэффициентов \varkappa и μ в агрегате $\alpha = \frac{\varkappa}{\mu^2}$ имеет смысл только в том случае, когда \varkappa не зависит от “характера закрепления концов стержня” [2], который определяет, в свою очередь, значение “коэффициента длины” μ . Для изучения зависимости μ от параметров витого стержня нами были проделаны численные эксперименты со стойкой такой же формы, что и выше, но усиленной заделкой конца $t = 0$; это приводит к дополнительным краевым условиям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Согласно [2], для плоского стержня при таких же условиях закрепления концов значение коэффициента длины $\mu = 0.699$.

Условие заделки порождает, в силу подстановки (3), ограничение вида $\int_0^l G'_t(0, s)\psi^{-1}(s)\mathbf{z}(s) ds = 0$;

отсюда с точностью до постоянного множителя имеем $\mathbf{l}^1(t) = (t-l)(a+b-(a-b)\cos \pi t, -(a-b)\sin \pi t)^\top$, $\mathbf{l}^2(t) = (t-l)(-(a-b)\sin \pi t, a+b+(a-b)\cos \pi t)^\top$. Для удобства применения пакета **L2** мы ортогонализировали эту систему векторов и заменили полученные вектор-функции их кусочно-полиномиальными аппроксимациями $\tilde{\mathbf{l}}^i$; затем рассчитывали относительную погрешность аппроксимации $\frac{\|\tilde{\mathbf{l}}^i - \mathbf{l}^i\|}{\|\mathbf{l}^i\|}$. Для

порожденного ими проектора $\tilde{\mathbf{P}}$ погрешность $\|\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}\|$ оценивалась с помощью следующей леммы, справедливость которой проверяется прямым вычислением.

Лемма. Пусть \mathbf{P} — ортогональный проектор на линейную оболочку ортонормированной системы векторов $\mathbf{l}^1, \dots, \mathbf{l}^m$. Если $\|\tilde{\mathbf{l}}^i - \mathbf{l}^i\| \leq \varepsilon$ для $i = 1, \dots, m$, где $m(2+\varepsilon)\varepsilon < 1$, и $\tilde{\mathbf{P}}$ — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\tilde{\mathbf{l}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{l}}^m$, то $\|\tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{P}\| \leq \varepsilon \frac{m(m+1)(2+\varepsilon)}{1-2m\varepsilon-m\varepsilon^2}$.

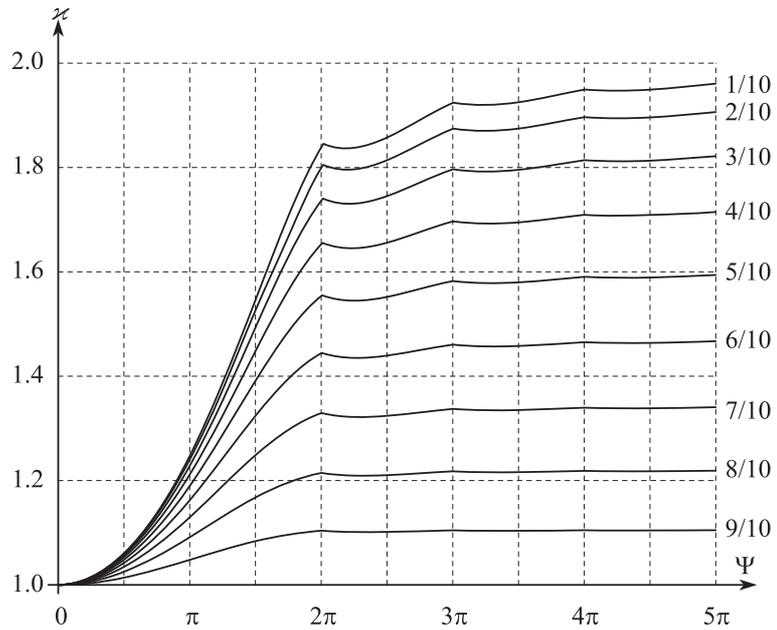


Рис. 4. Зависимость \varkappa от Ψ для значений b/a от $1/10$ до $9/10$

На этом основании получили оценку погрешности

$$\Delta r \stackrel{\text{def}}{=} \left| r\left((I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}(I - \tilde{\mathbf{P}})\right) - r\left((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P})\right) \right|. \quad (10)$$

Далее, спектральный радиус для оператора $(I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}$ в пространстве Z вычисляется методом, рассмотренным в теореме 2. В результате получается интервальная оценка для $r((I - \tilde{\mathbf{P}})\mathbf{BGB}(I - \tilde{\mathbf{P}}))$, расширение которой в силу оценки погрешности (10) дает интервал для $r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))$.

Сравнивая этот интервал с результатами расчетов в случае двух шарнирно закрепленных концов, мы получаем двустороннюю (интервальную) оценку параметра $\mu = \sqrt{\frac{r((I - \mathbf{P})\mathbf{AGA}(I - \mathbf{P}))}{r(\mathbf{AGA})}}$ при условии, что \varkappa зависит только от формы стержня, а не от условий закрепления его концов. Длины полученных интервалов позволяют выписать значение μ с ошибкой, не превосходящей 0.5×10^{-3} (табл. 2).

Для плоского стержня (т.е. для $\Psi = 0$) контрольный расчет трехмерной задачи нашими методами легко дал значение $\mu = 0.699156 \pm 0.5 \times 10^{-6}$, что соответствует значению $\mu = 0.699$ из [2].

Таким образом, значение μ зависит как от полного угла закрученности Ψ , так и от b/a , т.е. от отношения главных изгибных жесткостей.

Таблица 3

Таблица 2

Ψ	$\mu, \pm 0.5 \times 10^{-3}$	
	$b/a = 4/9$	$b/a = 1/10$
0	0.699	0.699
$\frac{\pi}{20}$	0.698	0.671
$\frac{3\pi}{20}$	0.688	0.534
$\frac{\pi}{4}$	0.6705	0.4535

N	P_0	P_μ	μ	N	P_0	P_μ	μ
6	0.053442	0.2813	0.4358	24	0.053431	0.2640	0.4498
7	0.053435	0.2775	0.4388	25	0.053431	0.2639	0.4500
8	0.053434	0.2748	0.4410	26	0.053431	0.2637	0.4501
9	0.053432	0.2728	0.4426	27	0.053431	0.2635	0.4503
10	0.053432	0.2712	0.4438
11	0.053432	0.2700	0.4448	35	0.053431	0.2626	0.4510
12	0.053432	0.2690	0.4457	36	0.053431	0.2626	0.4511
13	0.053431	0.2682	0.4463
...	50	0.053431	0.2618	0.4518

0.053431 0.2602 0.4535

Возможно, для стержня с таким экстремально вытянутым сечением $b/a = 1/10$ рассмотренная модель недостаточно адекватна (можно подвергнуть сомнению гипотезу плоских сечений), но эти расчеты показывают теоретическую неприменимость концепции коэффициента длины для неплоских стержней.

7. Альтернативный расчет. Чтобы устранить естественно возникающие сомнения, был произведен расчет параметра μ для $\Psi = \frac{\pi}{4}$ и $b/a = 1/10$ методом типа Ритца–Галеркина. Конечномерная аппроксимация $x_1(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)$, $x_2(t) = \sum_{k=1}^N \xi_{N+k} \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{l} t\right)$ подставлялась непосредственно в задачи (2) и (9) — последняя с дополнительными ограничениями $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

В первой задаче в результате подстановки целевой функционал имеет вид $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T(M - PE)\boldsymbol{\xi}$, где E — единичная $(2N \times 2N)$ -матрица, а матрица M составлена из точных значений берущихся интегралов. Эта матрица симметрична и положительно определена. Таким образом, приближенное значение критической силы $P_{кр}$ определялось как минимальное из собственных значений матрицы M , вычисление которых было поручено пакету Maple V R4.

В случае второй задачи дополнительные ограничения $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ привели к тому, что задача минимизации функционала $\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi})$ рассматривается на подпространстве L пространства \mathbb{R}^{2N} , состоящем из векторов, ортогональных векторам $(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^N, 0, 0, \dots, 0)^T$ и $(0, 0, \dots, 0, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^N)^T$.

В подпространстве L выбран ортонормированный базис. Пусть координатами вектора $\boldsymbol{\xi} \in L$ в этом базисе является $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{N-1}, \eta_{N+1}, \dots, \eta_{2N-1})^T$. Пусть $(2N \times (2N - 2))$ -матрица A и $((2N - 2) \times 2N)$ -

матрица B таковы, что $\xi = A\eta$ и $\eta = B\xi$ — координаты ортогональной проекции вектора ξ на подпространство L . Тогда приближенное значение критической силы определяется как минимальное собственное значение $((2N - 2) \times (2N - 2))$ -матрицы BMA .

В табл. 3 приведены результаты вычисления критической силы P_0 при отсутствии заделки конца, критической силы P_μ при условии заделки конца стержня и соответствующие приближения к $\mu = \sqrt{\frac{P_0}{P_\mu}}$.

Внизу, под таблицей, указаны значения этих же параметров, полученные нашим новым методом. Как видим, приближения к P_μ сходятся недостаточно хорошо, но полученные приближенные значения μ подтверждают наш вывод о том, что $\mu \neq 0.699$.

В отличие от расчетов, описанных в разделе 6, здесь нам не удалось получить оценку погрешности.

8. Выводы.

1) Предложен эффективный метод решения задач с применением пакета \mathbf{L}_2 , позволяющий несложно получать результаты с легко контролируемой погрешностью. Эта технология стала доступной только при современном уровне развития компьютерной техники и программных средств.

2) В результате численных экспериментов были обнаружены новые качественные закономерности в зависимости критической силы от параметров витого стержня и характера закрепления его концов. Явление “зубцов” и “впадин” объясняется спектральными свойствами возникающих в задаче операторов в пространстве квадратично суммируемых функций. Объяснение с точки зрения механики как этого явления, так и смещения зубцов вправо, еще предстоит найти.

3) Концепция “коэффициента длины” очевидно применима в случае плоского стержня. Однако ее распространение на трехмерные стержни, а тем более использование значений μ из таблиц [2, гл. 1], рассчитанных для плоских стержней, приводит к ошибочным оценкам критической силы. По-видимому, вместо (1) следует писать просто $P_{кр} = \alpha \frac{\pi^2 B_y}{l^2}$ и для каждого варианта заделки концов (и дополнительных опор) отдельно описывать зависимость α от Ψ и b/a наподобие того, как представлено на рис. 4.

Выражаю свою благодарность Г. Г. Кравченко и Е. И. Бравому за интерес и моральную поддержку, стимулировавшие автора как на стадии исследования, так и в процессе написания статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002 (<http://shop.rcd.ru>).
4. *Азбелев Н.В., Культышев С.Ю., Цалок В.З.* Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2006 (<http://shop.rcd.ru>).
5. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
7. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
8. *Цалок В.З.* Проект \mathbf{L}_2 . Ресурс Интернет. 2008–2009 (<http://vts.math.kubsu.ru/l2/l2.htm>, <http://l2.pstu.ru/l2.htm>).
9. *Цалок В.З.* Архив `twisted.zip`. Ресурс Интернет. 2010 (<http://vts.math.kubsu.ru/3d/twisted.zip>).

Поступила в редакцию
22.03.2010