УДК 533.6:628.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ВХОДЕ В ЭКРАНИРОВАННЫЙ ПЛОСКИЙ КАНАЛ

И. Н. Логачев[1], **К. И. Логачев**[1], **О. А. Аверкова**[1]

В рамках теории струй идеальной несжимаемой жидкости исследовано влияние экрана, расположенного параллельно плоскости всасывающей щели, встроенной в плоскую безграничную стенку, на аэродинамические характеристики всасываемого потока. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08–08–13687–офи_ц) и Совета по грантам Президента РФ (код проекта МК–2729.2010.8).

Ключевые слова: теория струй идеальной несжимаемой жидкости, метод Жуковского, коэффициент местных сопротивлений.

Введение. В прикладных задачах промышленной аэродинамики чаще всего уделяется внимание снижению аэродинамического сопротивления всасывающей щели [1–4]. Однако не менее важной задачей является увеличение этого сопротивления. Прежде всего, это касается практики снижения подсоса газообразной среды через отверстия, когда исчерпаны возможности их герметизации. Одним из технических средств уменьшения нежелательных подсосов воздуха является применение специальных экранов, повышающих сопротивление и уменьшающих коэффициенты расхода воздуха, поступающего через минимизированные отверстия. С этими задачами, например, сталкиваются специалисты в области локализации вредных выделений с помощью местной вытяжной вентиляции [5, 6], а также во многих теплоэнергетических установках.

Целью статьи является определение характеристик потока вблизи всасывающей щели, встроенной в плоскую безграничную стенку, в зависимости от расположения экрана, установленного параллельно плоскости отверстия.

Для решения задачи используется теория струй идеальной несжимаемой жидкости, позволяющая получить четкую границу отрывного течения и величину толщины струи δ_∞ на бесконечности, широко используемой в качестве основного параметра при оценке аэродинамического сопротивления отверстия. Другие методы дают "размытую" границу течения, что не позволяет с достаточной точностью определить значение δ_∞.

1. Вывод расчетных соотношений. Рассмотрим потенциальное отрывное течение воздуха при входе в плоский канал, перед которым перпендикулярно его оси установлены два экрана (рис. 1): экран AA' непроницаемый, а другой экран — с отверстием HH'. В силу симметрии будем рассматривать течение в верхней полуплоскости физической плоскости $z = x + i\,y$. На этом рисунке представлены границы течения, область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\,\psi$, представляющая собой полосу $0 \leqslant \psi \leqslant q$ с разрезом MHA ($\psi = kq$, $-\infty < \varphi < -\xi$), область изменения функции Жуковского $\omega = \ln\bigl(u_0/u\bigr) + i\theta$, представляющая собой полуполосу $\{\ln\bigl(u_0/u\bigr) > 0;\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 0\}$, и верхняя вспомогательная полуплоскость комплексной переменной $t_1 = x_1 + i\,y_1$.

Осуществим конформное отображение верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,(t_1) > 0$ на внутренность многоугольных областей изменения комплексного потенциала w и функции Жуковского ω.

Воспользовавшись интегралом Кристоффеля–Шварца с учетом принятого соответствия точек, а также определяя константы интеграла с помощью перехода сингулярных точек по полуокружностям бесконечно малого радиуса, получим следующие формулы:

$$w = (1-k)\,\frac{q}{\pi}\,\ln\!\left(\frac{t_1 - m}{m}\right) + k\,\frac{q}{\pi}\,\ln(t_1 - 1), \tag{1}$$

$$\omega = -\frac{1}{2}\,\ln\!\left(\frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{p}}{\sqrt{t_1} + \sqrt{p}}\right) = \ln\!\left(\frac{\sqrt{t_1} + \sqrt{p}}{\sqrt{t_1 - p}}\right),$$

[1] Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, ул. Костюкова, 46, 308012, г. Белгород; И. Н. Логачев, профессор, e-mail: kilogachev@intbel.ru; К. И. Логачев, профессор, e-mail: kilogachev@intbel.ru; О. А. Аверкова, доцент, e-mail: olga_19572004@mail.ru

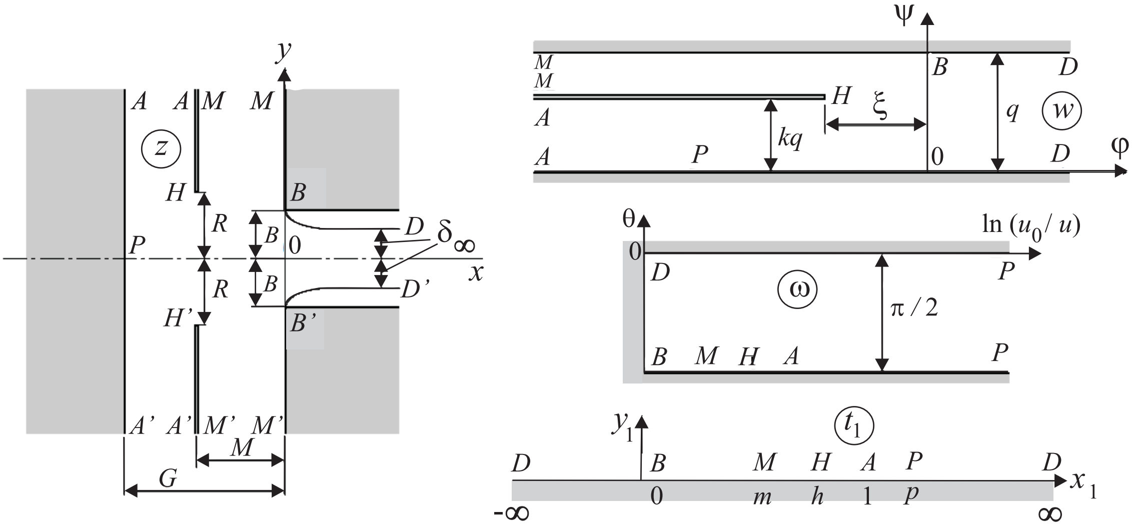

Рис. 1. К определению параметров отрывного течения у плоской щели с экраном

$$z = i + (1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m + k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1; \quad k = \frac{1-h}{1-m}, \tag{2}$$

$$\frac{dw}{dz} = u_x - i\,u_y = u_0 e^{-\omega(t_1)} = u_0\,\frac{\sqrt{t-p}}{\sqrt{t}+\sqrt{p}}\,, \tag{3}$$

где u_x, u_y — проекции вектора скорости, u_0 — скорость на “на свободной” линии тока BD, t — точка верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,(t_1) > 0$, соответствующая заданной точке $t_z(x,y)$ физической плоскости z, и

$$N_m = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{p}}{\sqrt{t_1-p}}\,\frac{dt_1}{t_1-m}\,, \quad N_1 = \int\limits_0^t \frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{p}}{\sqrt{t_1-p}}\,\frac{dt_1}{t_1-1}\,. \tag{4}$$

Эти интегралы несложно выражаются через элементарные функции. При замене переменной интегрирования по формуле $v = \dfrac{\sqrt{t_1}+\sqrt{p}}{\sqrt{t_1-p}}$ на $t_1 = p\left(\dfrac{v^2+1}{v^2-1}\right)^2$ интеграл N_m сводится к рациональной функции $P_m = -\dfrac{8p}{p-m}\,\dfrac{v^2(v^2+1)}{(v^2-1)\big[(v/n)^2+1\big]\big[(vn)^2+1\big]}$. С учетом того, что $p = m\left(\dfrac{1+n^2}{1-n^2}\right)$ и $\dfrac{8p}{p-m} = 2\left(\dfrac{1+n^2}{n}\right)^2$, эта функция после несложных преобразований примет вид $P_m = -2\left(\dfrac{2}{v^2-1} + \dfrac{1}{(v/n)^2+1} + \dfrac{1}{(vn)^2+1}\right)$.

Тогда интеграл N_m можно представить в виде интеграла от суммы дробей:

$$N_m = -2\int\limits_{-i}^{v} \left[\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{v/n-i} - \frac{1}{v/n+i}\right) + \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{vn-i} - \frac{1}{vn+i}\right)\right] dv.$$

Окончательным результатом представления интегралов (4) станут выражения

$$N_m = F_m(t) - F_m(0); \quad N_1 = N_m\big|_{m=1} = F_1(t) - F_1(0); \tag{5}$$

$$F_m(t) = \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + \frac{n}{i}\,\ln\frac{v/n+i}{v/n-i} + \frac{1}{in}\,\ln\frac{vn+i}{vn-i}\,; \quad F_m(0) = \frac{\pi}{n} + i\left[\pi + \left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1+n}{1-n}\right)\right];$$

$$F_1(t) = F_m(t)\big|_{n=n_1}; \quad F_1(0) = F_m(0)\big|_{n=n_1}, \tag{6}$$

где для простоты записи приняты обозначения:

$$v = \frac{\sqrt{t}+\sqrt{p}}{\sqrt{t-p}}, \quad n = \frac{\sqrt{p-m}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1}. \tag{7}$$

Для выяснения физического смысла параметров n и n_1 воспользуемся соотношением (3) и очевидными выражениями для расхода воздуха:

$$u_M M = (1-k)q = (1-k)u_0\delta_\infty, \quad u_A(G-M) = kq = ku_0\delta_\infty, \tag{8}$$

где u_M и u_A — скорости в точках M (при $t = m$) и A (при $t = 1$), м/с; u_0 — скорость на граничной линии тока BD, м/с. Определив скорости u_M и u_A с помощью (3), получим соотношения $\overline{u}_M \equiv \dfrac{u_M}{u_0} = \dfrac{\sqrt{p-m}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}} \equiv n$ и $\overline{u}_A \equiv \dfrac{u_A}{u_0} = \dfrac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1} \equiv n_1$, объясняющие физический смысл обозначений (7).

Подставив полученные выражения для скоростей $\overline{u}_M$ и $\overline{u}_A$ в уравнения (8) и воспользовавшись равенством (2), найдем соотношения

$$\frac{u_A}{u_M} = \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1}\,\frac{\sqrt{p}+\sqrt{m}}{\sqrt{p-m}} = \frac{h-m}{1-h}\left(\frac{G}{M}-1\right), \quad \delta_\infty = \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1}\,(G-M) + \frac{\sqrt{p-m}}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}\,M, \tag{9}$$

связывающие параметры p, m, h задачи с геометрическими размерами δ_∞, G, M физической области течения.

Заметим, что при $h \to m$ на основании (2) имеем $k \to 1$, т.е. внутренний экран HM сливается с вертикальной стенкой BM ($M \to 0$). Воздух в этом случае подтекает к отверстию через полосу шириной G, и поэтому $\dfrac{\delta_\infty}{G} = \dfrac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1}$, откуда следует, что при удалении непроницаемого экрана в бесконечность при $G \to \infty$ параметр $p \to 1$.

Для замыкания системы уравнений (9), которая содержит кроме двух известных геометрических размеров G и M три неизвестных параметра p, m и h, а также неизвестную полувысоту δ_∞ струи на бесконечности, рассмотрим соответствие границ течения в полуплоскостях z и t_1.

Для определения величины δ_∞ рассмотрим свободную линию тока BD, которой соответствуют точки отрицательной оси OX_1 ($t_1 = x_1 \leqslant 0$).

В этой области при $p > 1$, $0 < m < 1$, $-\infty < t < 0$ получим $N_m = A_m + iB_m$ и $N_1 = A_1 + iB_1$, где

$$\begin{aligned}
A_m &= \ln\frac{1+\mu_1}{1-\mu_1} + n\left(\operatorname{arctg}\frac{n-\mu_2}{\mu_1} + \operatorname{arctg}\frac{n+\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{1}{n}\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{n^{-1}-\mu_2}{\mu_1} + \operatorname{arctg}\frac{n^{-1}+\mu_2}{\mu_1}\right),\\
B_m &= \pi - 2\left(\operatorname{arctg}\frac{\mu_2}{1+\mu_1} + \operatorname{arctg}\frac{\mu_2}{1-\mu_1}\right) + \left(n+\frac{1}{n}\right)\left(\ln\frac{1-n}{1+n} - \ln\sqrt{\frac{W-\mu_2}{W+\mu_2}}\right),\\
\mu_1 &= \frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{p-t}}, \quad \mu_2 = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-t}}, \quad W = \frac{1+n^2}{2n}; \quad W_1 = \frac{1+n_1^2}{2n}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Величину интеграла N_1, его действительную и мнимую части определим следующей подстановкой в соотношения (10): $m = 1$ ($n = n_1$), $N_1 = N_m\big|_{\substack{m=1\\(n=n_1)}}$, $A_1 = A_m\big|_{\substack{m=1\\(n=n_1)}}$, $B_1 = B_m\big|_{\substack{m=1\\(n=n_1)}}$.

Тогда параметрическое уравнение свободной линии тока BD на основании (2) примет вид

$$x_{BD} = \operatorname{Re}(z_{BD}) = (1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,A_m + k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,A_1, \quad y_{BD} = \operatorname{Im}(z_{BD}) = 1 + (1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,B_m + k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,B_1.$$

Из условия $y_{BD} \to \delta_\infty$ при $t \to -\infty$ ($\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 0$) найдем

$$\delta_\infty = \frac{\pi}{\pi + B}, \tag{11}$$

где

$$B = (1-k)\left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n} + k\left(n_1+\frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}, \tag{12}$$

или $B = (1-k)\,\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-m}}\,\ln\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{p-m}}{\sqrt{p}-\sqrt{p-m}} + k\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}}\,\ln\dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}$.

В частности, при $k = 0$, устремляя последовательно вначале $m \to 1$, а затем $p \to 1$ ($n \to 0$), получим $B = 2$ и $\delta_\infty = \dfrac{\pi}{\pi+2} \approx 0.611$, т.е. случай плоской щели в вертикальной стенке (без всяких экранов). Тот же результат получим при $k = 1$, устремляя $p \to 1$ ($n_1 \to 0$).

Прежде чем исследовать соответствие границ в области $t \geqslant 0$, рассмотрим поведение интегралов N_m и N_1 в точках M и A. Осуществляя переход точек по дугам окружностей $t = m + \varepsilon_m e^{i\varphi}$ и $t = 1 + \varepsilon_a e^{i\varphi}$ (при $\varphi = \pi, \ldots, 0$) с бесконечно малыми радиусами ($\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_a \to 0$), получим на основании (2) и (4) следующие выражения для приращения функции Δz в этих точках:

$$\Delta z_M = (1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\left(-\pi\,\frac{\sqrt{m}+\sqrt{p}}{\sqrt{p-m}}\right); \quad \Delta z_A = k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\left(-\pi\,\frac{1+\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}}\right).$$

С другой стороны, анализ рис. 1 показывает, что при таком переходе имеем $\Delta z_M = -M$ и $\Delta z_A = -(G-M)$; поэтому

$$(1-k)\,\delta_\infty\,\frac{\sqrt{m}+\sqrt{p}}{\sqrt{p-m}} = (1-k)\,\frac{\delta_\infty}{n} = M, \tag{13}$$
$$k\,\delta_\infty\,\frac{1+\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}} = k\,\frac{\delta_\infty}{n_1} = G-M,$$

или $(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{n} + k\,\dfrac{\delta_\infty}{n} = G$. Исключая k, с учетом (2) получим следующее важное соотношение между параметрами задачи и геометрическими размерами физической области течения:

$$\frac{1-h}{h-m}\,\frac{1+\sqrt{p}}{\sqrt{p-1}}\,\frac{\sqrt{p-m}}{\sqrt{m}+\sqrt{p}} = \frac{G}{M} - 1.$$

Рассмотрим теперь положительную действительную полуось комплексной плоскости t_1: $t = x_1 > 0$. Очевидно, что переменная v является положительной действительной величиной при $t > p$ ($x_1 > p$), а при $t < p$ ($x_1 < p$) — чисто мнимой:

$$v = \begin{cases} -i\,\mu & \text{при} \quad x_1 < p; \\ \dfrac{\sqrt{t}+\sqrt{p}}{\sqrt{t-p}} & \text{при} \quad x_1 \geqslant p, \end{cases} \tag{14}$$

где $\mu = \dfrac{\sqrt{t}+\sqrt{p}}{\sqrt{p-t}}$. Подставляя (14) в (5) и (6), получим на границе $BMHAP$ следующее значение интеграла N_m:

а) на отрезке BM ($1 < \mu < 1/n$):

$$N_m = 4i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\mu} - in\,\ln\frac{\mu/n-1}{\mu/n+1} - \frac{i}{n}\,\ln\frac{1-\mu n}{\mu n+1} - i\left(\pi + \left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right); \tag{15}$$

б) на отрезках MH, HA, AP ($1/n < \mu < \infty$):

$$N_m = 4i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\mu} - in\,\ln\frac{\mu/n-1}{\mu/n+1} - \frac{i}{n}\,\ln\frac{\mu n-1}{\mu n+1} - \frac{\pi}{n} - i\left(\pi + \left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right). \tag{16}$$

Второй интеграл на этой границе имеет аналогичный вид:

а) на интервале $1 < \mu < 1/n_1$:

$$N_1 = 4i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\mu} - in_1\,\ln\frac{\mu/n_1-1}{\mu/n_1+1} - \frac{i}{n_1}\,\ln\frac{1-\mu n_1}{\mu n_1+1} - i\left(\pi + \left(n_1+\frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right); \tag{17}$$

б) на интервале $1/n_1 < \mu < \infty$:

$$N_1 = 4i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{\mu} - in_1\,\ln\frac{\mu/n_1-1}{\mu/n_1+1} - \frac{i}{n_1}\,\ln\frac{\mu n_1-1}{\mu n_1+1} - \frac{\pi}{n_1} - i\left(\pi + \left(n_1+\frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right). \tag{18}$$

На луче PD ($t > p$, $v > 0$) эти интегралы имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} N_m &= \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + 2n\operatorname{arctg}\frac{n}{v} + \frac{2}{n}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{nv} - \frac{\pi}{n} - i\left(\pi + \left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right); \\ N_1 &= \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + 2n_1\operatorname{arctg}\frac{n_1}{v} + \frac{2}{n_1}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{n_1 v} - \frac{\pi}{n_1} - i\left(\pi + \left(n_1+\frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Воспользовавшись этими соотношениями, можем проверить соответствие точек оси OX_1 и границ течения физической области. Так, точка $B(t=0,\ \mu=1)$ соответствует точке $z_B=i$ (поскольку при $\mu=1$ из равенств (15) и (17) имеем $N_m=0$ и $N_1=0$). Точке M^-, принадлежащей отрезку BM, при $t=m-\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, $\mu=\dfrac{1}{n}-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\to 0$ соответствует точка $z_{M^-}=i+(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m\big|_{t=m-\varepsilon}+k\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1\big|_{t=m-\varepsilon}=i\,L_{M^-}$, где L_{M^-} — положительное бесконечно большое число, возникающее при предельном значении третьего слагаемого уравнения (15): $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ n\neq 0}}\left(-\dfrac{1}{n}\,\ln\dfrac{1-(1/n-\varepsilon_1)n}{2}\right)=+\infty$.

Другой "части" этой точки, M^+, принадлежащей отрезку MH, при $t=m+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, $\mu=\dfrac{1}{n}+\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\to 0$ соответствует точка $z_{M^+}=i+(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m\big|_{t=m+\varepsilon}+k\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1\big|_{t=m+\varepsilon}=i\,L_{M^+}-(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{n}$; учитывая (13), получим $z_{M^+}=i\,L_{M^+}-M$, $L_{M^+}\to\infty$. Природа "бесконечности" здесь та же, что и для точки M^-.

Точке H, принадлежащей лучу MH, при $t=h$, $m<h<1$, $\dfrac{1}{n}<\mu<\dfrac{1}{n_1}$ соответствует точка

$$z_H=i+(1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m(H)+k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1(H),$$

где

$$H=\mu(h)=\frac{\sqrt{h}+\sqrt{p}}{\sqrt{p-h}}\,, \tag{20}$$
$$N_m=4i\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{H}-in\ln\frac{H/n-1}{H/n+1}-\frac{i}{n}\ \ln\frac{Hn-1}{Hn+1}-i\left(\pi+\left(n+\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right)-\frac{\pi}{n}\,,$$
$$N_1=4i\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{H}-in_1\ \ln\frac{H/n_1-1}{H/n_1+1}-\frac{i}{n_1}\ \ln\frac{1-Hn_1}{Hn_1+1}-i\left(\pi+\left(n_1+\frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right).$$

С другой стороны, как очевидно из рис. 1, $z_H=-M+i\,R$; поэтому можем записать уравнение

$$R=\frac{\delta_\infty}{\pi}\left(4\,\mathrm{arctg}\ \frac{1}{H}-(1-k)\left(n\ \ln\frac{H/n+1}{H/n-1}+\frac{1}{n}\ \ln\frac{Hn+1}{Hn-1}\right)+\right.$$
$$\left.+\,k\left(n_1\ \ln\frac{H/n_1+1}{H/n_1-1}+\frac{1}{n_1}\ \ln\frac{Hn_1+1}{1-Hn_1}\right)\right), \tag{21}$$

связывающее параметр h с R. Предполагается, что точка отрыва линии тока на экране совпадает с его нижней точкой H. В задачах струйного обтекания пластин конечной длины [7] показаны возможные случаи, когда эти точки не совпадают.

Точке A^-, принадлежащей лучу HA, при $t=1-\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, $\mu=\dfrac{1}{n_1}-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\to 0$ соответствует точка $z_{A^-}=i+(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m\left(\dfrac{1}{n_1}-\varepsilon_1\right)+k\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1\left(\dfrac{1}{n_1}-\varepsilon_1\right)=-M+i\,L_A$, где L_A — положительное бесконечно большое число, возникающее при предельном значении третьего слагаемого в уравнении (17): $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ n_1\neq 0}}\left(-\dfrac{1}{n_1}\ \ln\dfrac{1-(1/n_1-\varepsilon_1)n_1}{2}\right)=+\infty$.

Точке A^+, принадлежащей лучу AP, при $t=1+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$, $\mu=\dfrac{1}{n_1}+\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\to 0$ соответствует точка $z_{A^+}=i+(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m\left(\dfrac{1}{n_1}+\varepsilon_1\right)+k\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1\left(\dfrac{1}{n_1}+\varepsilon_1\right)=i\,L_{A^+}-(1-k)\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,\dfrac{\pi}{n}-k\,\dfrac{\delta_\infty}{\pi}\,\dfrac{\pi}{n_1}$; учитывая (13), получим $z_{A^+}=-G+i\,L_{A^+}$, где L_{A^+} — бесконечно большое положительное число, возникающее при предельном значении третьего слагаемого уравнения (18): $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ n_1\neq 0}}\left(-\dfrac{1}{n_1}\ \ln\dfrac{(1/n_1+\varepsilon_1)n_1-1}{2}\right)=+\infty$.

Точке P^-, принадлежащей лучу AP ($t=p-\varepsilon$, $\mu=+\infty$), соответствует точка

$$z_P=i+(1-k)\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m(+\infty)+k\,\frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_1(+\infty);$$

учитывая, что в силу (16) и (18) имеем

$$N_m(+\infty) = -\frac{\pi}{n} - i\left(\pi + \left(n + \frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right); \quad N_1(+\infty) = -\frac{\pi}{n_1} - i\left(\pi + \left(n_1 + \frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right),$$

и учитывая соотношения (12) и (13), получим $z_P = -G + i\left(1 - \delta_\infty + \frac{\delta_\infty}{\pi}(-B)\right) = -G$.

Аналогичный результат получим с учетом уравнений (19) и для точки P^+, принадлежащей лучу PD, при $t = p + \varepsilon$, $\mu = +\infty$. Учитывая, что

$$N_m(1+\varepsilon) = \infty - i\left(\pi + \left(n + \frac{1}{n}\right)\ln\frac{1+n}{1-n}\right); \quad N_1(1+\varepsilon) = \infty - i\left(\pi + \left(n_1 + \frac{1}{n_1}\right)\ln\frac{1+n_1}{1-n_1}\right),$$

для точки D на луче PD при $t \to \infty$, $v = 1 + \varepsilon$ имеем $z_D = \infty - i\cdot 0$. Для произвольной точки, принадлежащей этому лучу, можем записать

$$z_{PD} = -G + \frac{\delta_\infty}{\pi}\ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + (1-k)\frac{\delta_\infty}{\pi}\left(2n\,\mathrm{arctg}\,\frac{n}{v} + \frac{2}{n}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{nv}\right) + k\frac{\delta_\infty}{\pi}\left(2n_1\,\mathrm{arctg}\,\frac{n_1}{v} + \frac{2}{n_1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{n_1 v}\right).$$

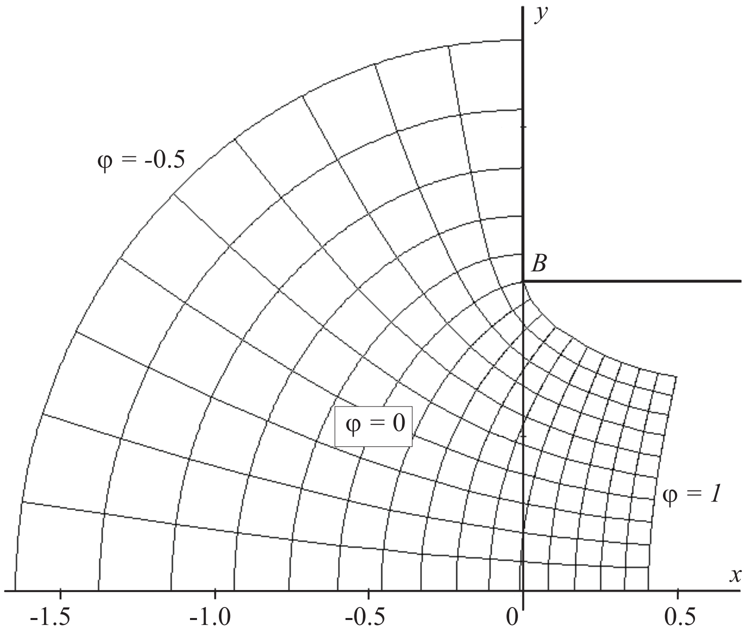

Рис. 2. Линии тока всасывающего факела щели, оснащенной глухим экраном, находящимся на расстоянии $G = 10$

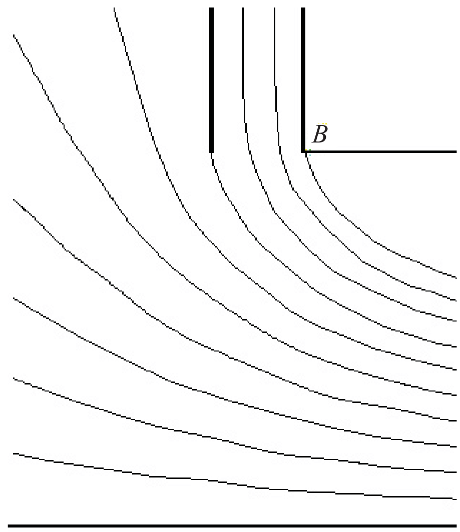

Рис. 3. Линии тока всасывающего факела щели, оснащенной экраном с центральным отверстием высотой, равной высоте щели (при $M = 0.25$, $G = 10$ и $R = 1$)

Полученные соотношения (2), (7), (11)–(13), (21) дают возможность решить прямую задачу. По известным геометрическим размерам G, M и R физической области течения решением системы, состоящей из уравнения (21) и равенства

$$Mn + (G - M)n_1 = \frac{\pi}{\pi + B}\,, \tag{22}$$

найдем неизвестные параметры m и p, а следовательно, и вспомогательные величины n и n_1 (по формулам (7)), и затем определим величину k по формуле

$$k = \frac{(G-M)n_1}{(G-M)n_1 + Mn}\,, \tag{23}$$

величину B — по формуле (12) и важный параметр δ_∞ — по формуле (11). Равенство (22) записано на основании (11) и (13). Здесь и далее линейные размеры G, M, R и δ_∞ физической области отнесены к полувысоте B. Заметим, что уравнения (21) и (22) сводятся к уравнениям, зависящим также от m и p путем замены (23), (12), (11), (20) и $h = 1 - k(1 - m)$, вытекающей из соотношения (2).

Определив параметры задачи m, p и k, можно построить гидродинамическую сетку потенциального течения и поле скоростей. Например, функция тока имеет вид $\psi = \ln(w) - \mathrm{const}$; с учетом (1) имеем

$$\frac{\psi}{q} = \frac{1-k}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\ln\frac{t_1 - m}{m}\right] + \frac{k}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\ln(t_1 - 1)\right] - \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Линии тока строятся следующим образом. Задается величина $\dfrac{\psi}{q}$ и одна из координат x_1 или y_1 точки $t = x_1 + iy_1$. Из уравнения (24) определяется вторая координата этой точки, принадлежащей заданной линии тока.

2. Результаты расчета и их обсуждение. На рис. 2 и 3 представлены линии тока для двух случаев: для щели, оснащенной глухим экраном (рис. 2), и случая двух экранов (рис. 3), причем экран с отверстием, равным высоте щели, удален от входного сечения на расстояние $M = 0.25$.

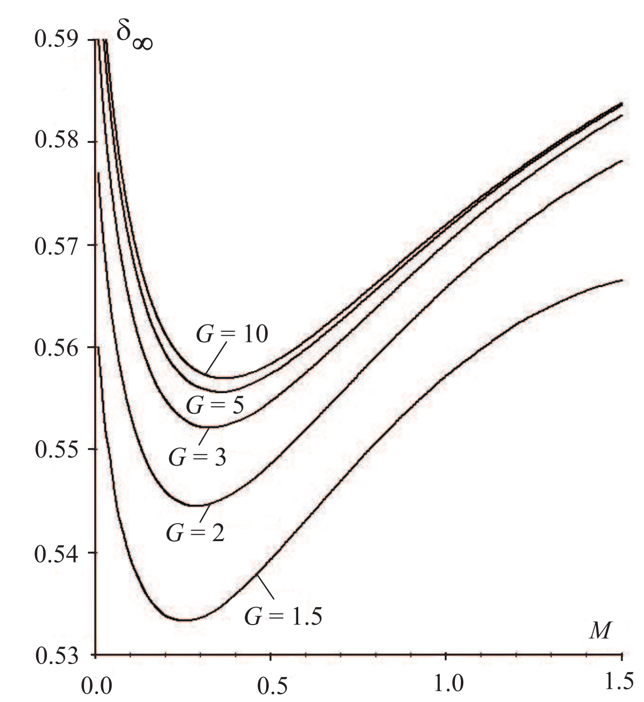

Рис. 4. Изменение толщины струи отрывного течения δ_∞ при нахождении экрана (с центральным отверстием высотой $R = 1$) на расстоянии M от входного сечения струи

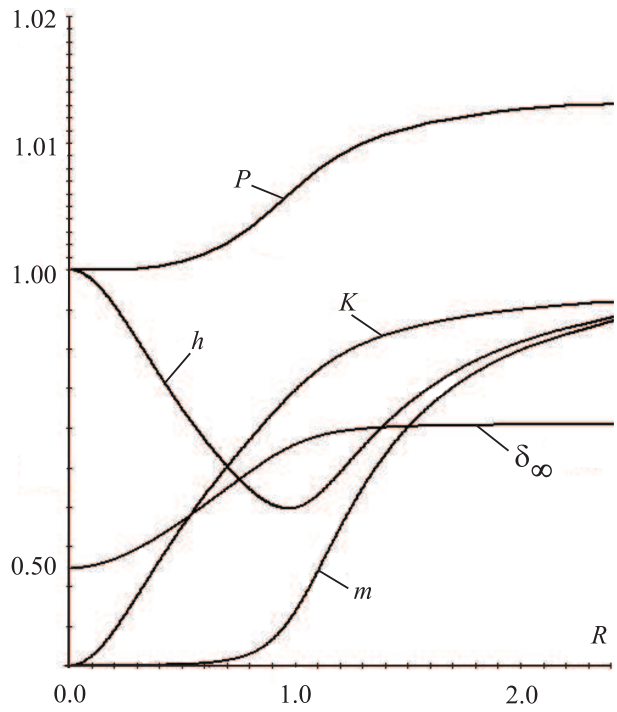

Рис. 5. Изменение параметров задачи при увеличении размера отверстия внутреннего экрана (при $M = 0.25$ и $G = 10$)

В последнем случае заметна часть потока, отсеченная этим экраном, с явно выраженным вертикальным направлением и повышенной скоростью, что и обеспечивает шибирующий эффект для остальной части потока. Вследствие этого и поджимается поток к оси OX, уменьшая высоту струи в щели на бесконечности δ_∞ по сравнению с этой высотой при $G \to \infty$ и $M \to \infty$ ($\delta_\infty = 0.611$ для случая щели в стене без всяких экранов). Анализируя степень этого поджатия (рис. 4) в зависимости от удаления экрана с отверстием, видим, что наибольший эффект достигается при $M = 0.2 \div 0.4$.

При уменьшении отверстия (рис. 5) также увеличивается степень поджатия струи (при этом уменьшается расход основного потока).

Для выяснения роли внутреннего экрана рассмотрим частный случай течения воздуха в щели с одним непроницаемым экраном. Осуществляя предельный переход $m \to 1$ ($h \to 1$), получим $k = 0$ и следующие расчетные соотношения:

$$w = \frac{q}{\pi}\,\ln(t_1 - 1); \quad z = i + \frac{\delta_\infty}{\pi}\,N_m;$$

$$n = n_1 = \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+1}\,; \quad M = G = \frac{\delta_\infty}{n_1}\,; \tag{25}$$

$$\delta_\infty = \frac{\pi}{\pi + B}\,; \quad B = \left(n_1 + \frac{1}{n_1}\right) \ln \frac{1+n_1}{1-n_1}\,; \tag{26}$$

$$N_m = N_1 = \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + \frac{n_1}{i}\,\ln\left(\frac{v/n_1+i}{v/n_1-i}\right) + \frac{1}{i\,n_1}\,\ln\left(\frac{vn_1+i}{vn_1-i}\right) - \frac{\pi}{n_1} - i(\pi+B).$$

Параметры задачи

G	p	B	δ_∞	Δu	G	p	B	δ_∞	Δu
0.20	75900	12.62	0.1993	4.018	2	1.408	2.236	0.5842	0.7117
0.25	3800	9.630	0.2460	3.065	2.5	1.253	2.154	0.5933	0.6855
0.30	589.3	7.771	0.2879	2.474	3	1.173	2.108	0.5985	0.6710
0.35	171.6	6.548	0.3242	2.084	3.5	1.126	2.080	0.6017	0.6620
0.40	72.19	5.698	0.3554	1.814	4	1.095	2.061	0.6038	0.6561
0.45	38.08	5.080	0.3821	1.617	4.5	1.075	2.049	0.6053	0.6521
0.50	23.28	4.612	0.4052	1.468	5	1.061	2.039	0.6064	0.6492
0.55	15.75	4.248	0.4251	1.352	5.5	1.050	2.033	0.6072	0.6470
0.60	11.47	3.957	0.4426	1.260	6	1.042	2.027	0.6078	0.6454
0.65	8.813	3.721	0.4578	1.184	6.5	1.036	2.023	0.6082	0.6441
0.70	7.062	3.525	0.4712	1.122	7	1.031	2.020	0.6086	0.6431
0.75	5.847	3.362	0.4831	1.070	7.5	1.027	2.018	0.6089	0.6422
0.80	4.970	3.223	0.4936	1.026	8	1.023	2.015	0.6092	0.6416
0.85	4.316	3.105	0.5030	0.9882	8.5	1.021	2.014	0.6094	0.6410
0.90	3.815	3.002	0.5113	0.9557	9	1.019	2.012	0.6096	0.6405
0.95	3.423	2.914	0.5188	0.9275	9.5	1.017	2.011	0.6097	0.6401
1.00	3.109	2.836	0.5255	0.9028	10	1.015	2.010	0.6098	0.6398
1.05	2.854	2.768	0.5316	0.8811	10.5	1.014	2.009	0.6099	0.6395
1.10	2.644	2.708	0.5371	0.8619	11	1.012	2.008	0.6100	0.6392
1.15	2.469	2.654	0.5421	0.8448	11.5	1.011	2.008	0.6101	0.6390
1.20	2.321	2.606	0.5466	0.8296	12	1.010	2.007	0.6102	0.6388
1.25	2.195	2.564	0.5507	0.8160	12.5	1.010	2.006	0.6103	0.6386
1.30	2.087	2.525	0.5544	0.8037	13	1.009	2.006	0.6103	0.6385
1.35	1.993	2.490	0.5578	0.7927	13.5	1.008	2.005	0.6104	0.6384
1.40	1.911	2.459	0.5610	0.7827	14	1.008	2.005	0.6104	0.6382
1.45	1.839	2.430	0.5638	0.7736	14.5	1.007	2.005	0.6105	0.6381
1.50	1.776	2.404	0.5665	0.7653	15	1.007	2.004	0.6105	0.6380

Таким образом, в этом случае остается один неизвестный параметр p (или n_1), определяющий гидродинамическую картину отрывного течения. Для ее определения необходимо решить трансцендентное уравнение (25) с учетом (26). Результаты численного решения этого уравнения при заданном G (или M) представлены в таблице. Как видно из этих данных, толщина струи на бесконечности особенно заметно

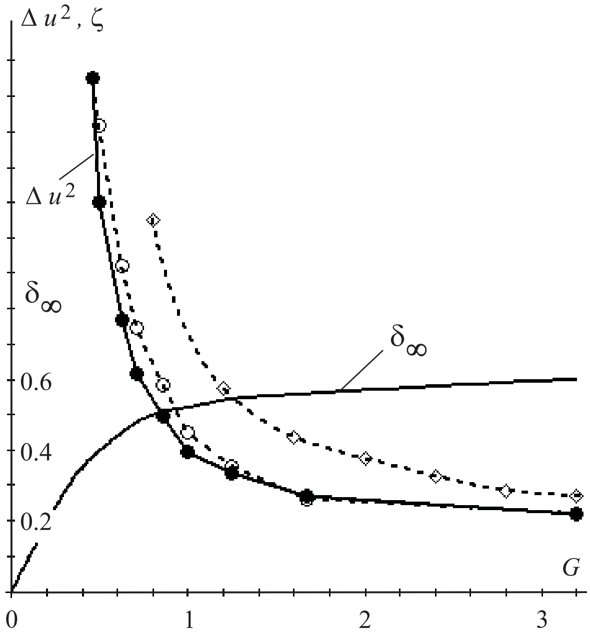

Рис. 6. Изменение толщины струи δ_∞ и Δu в зависимости от расстояния до глухого экрана G

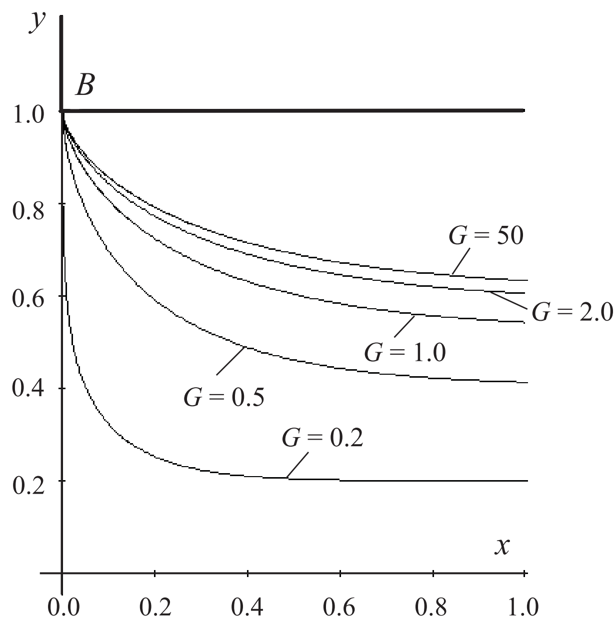

Рис. 7. Изменение свободной линии тока в зависимости от расстояния до глухого экрана G

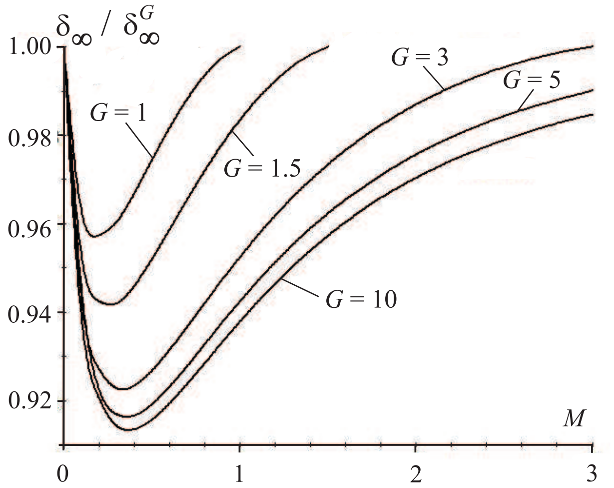

Рис. 8. Изменение относительной высоты струи в щели в зависимости от удаления экрана с центральным отверстием $R/B = 1$

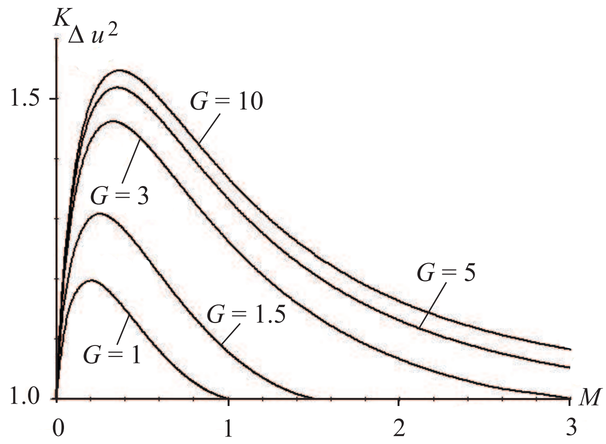

Рис. 9. Изменение относительного коэффициента инерционности струи в щели при удалении экрана с центральным отверстием $R/B = 1$

изменяется при близком размещении глухого экрана (при $G < 1$). При уменьшении расстояния до экрана в этом диапазоне заметно снижается δ_∞ и резко возрастает гидравлическое сопротивление (рис. 6), причем характер этого роста удовлетворительно согласуется с изменением инерционности потока в момент срыва с вертикальной стенки (в точке B)

$$\Delta u^2 = \left(\frac{u_0 - u_{\text{ср}}}{u_{\text{ср}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta_\infty} - 1\right)^2, \tag{27}$$

где $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость в щели, и с экспериментальными данными И. Е. Идельчика [4] для острого колена (как при $L = \infty$, так и при $L = 4G$, где L — размер прямоугольных колен перпендикулярно плоскости симметрии), а также для входа в прямоугольную трубу с глухим экраном. На рис. 6 сплошными линиями нанесены графики функций (26) и (27); пунктирными — экспериментальные данные Идельчика для коэффициента местного сопротивления колена при $L = \infty$ ($\bullet$) и при $L = 4G$ ($\circ$), а также для входа в прямоугольную трубу с глухим экраном ($\diamond$).

При увеличении расстояния до экрана высота струи возрастает (рис. 7), причем чем меньше G, тем быстрее эта высота достигает своего предельного значения δ_∞ на бесконечности. Так, при $G = 0.2$ текущая высота $\delta = 1.1\,\delta_\infty$ наблюдается уже на расстоянии $x_{1.1} = 0.3$, а при $G = 5$ — на расстоянии $x_{1.1} = 0.6$.

Для определения влияния внутреннего экрана на величину поджатия струи рассмотрим изменение относительной высоты струи $k_\delta = \dfrac{\delta_\infty}{\delta_\infty^G}$, где δ_∞^G — высота струи в щели при наличии только непроницаемого экрана, установленного на расстоянии G, и δ_∞ — высота струи в щели при наличии двух экранов, установленных на расстоянии G и M.

Аналогично для относительного коэффициента инерционности имеем $k_{\Delta u^2} = \dfrac{\left(1/\delta_\infty - 1\right)^2}{\left(1/\delta_\infty^G - 1\right)^2}$.

Графики изменения этих относительных величин в зависимости от G и M, представленные на рис. 8 и 9, показывают на наличие четких экстремумов в области $M = 0.2, \ldots, 0.4$, причем чем дальше удален непроницаемый экран, тем значительнее величина этих экстремумов. Так, минимальная величина коэффициента поджатия струи k_δ при наличии внутреннего экрана уменьшилась с 0.957 при $G = 1$ до 0.913 при $G = 10$, т.е. снизилась более чем на 4.5%, а максимальный коэффициент инерционности $k_{\Delta u^2}$ при этом увеличился на 28.3%.

Заключение.

1. Поджатие струи в щели заметно увеличивается при приближении непроницаемого экрана, что увеличивает инерционность потока и, как следствие, в момент срыва с вертикальной стенки вызывает рост величины коэффициента местного сопротивления при входе потока в щелевое отверстие. Наибольшее изменение высоты струи происходит при удалении экрана в диапазоне от 0 до полувысоты всасывающей щели.

2. Оснащение всасывающей щели экраном с отверстием такой же высоты усиливает поджатие струи, максимальная величина которого достигается при установке этого экрана на расстоянии 0.2–0.4 полувысоты щели, причем чем дальше удален непроницаемый экран, тем значительнее изменяется величина экстремального поджатия струи и коэффициента инерционности потока. При увеличении расстояния G от всасывающей щели до непроницаемого экрана от одной до 10 полувысот щели изменение минимальной высоты струи возрастает почти в два раза (от $1 - k_\delta = 0.043$ при $G = 1$ до $1 - k_\delta = 0.087$ при $G = 10$), а максимальный коэффициент инерционности и, следовательно, коэффициент местного сопротивления увеличивается на 28%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ханжонков В.Н.* Уменьшение аэродинамического сопротивления отверстий кольцевыми ребрами и уступами // Промышленная аэродинамика. 1959. № 12. 181–196.
2. *Идельчик И.Е.* Определение коэффициентов сопротивления при истечении через отверстия // Гидротехническое строительство. 1958. № 5. 31–36.
3. *Носова М.М.* Сопротивление входных и выходных раструбов с экранами // Промышленная аэродинамика. 1959. № 12. 197–215.
4. *Идельчик И.Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975.
5. *Логачев И.Н., Логачев К.И.* Аэродинамические основы аспирации. СПб: Химиздат, 2005.
6. *Логачев И.Н., Логачев К.И., Зоря В.Ю., Аверкова О.А.* Моделирование отрывных течений вблизи всасывающей щели // Вычислительные методы и программирование. 2010. **11**, № 1. 43–52.
7. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматлит, 1961.

Поступила в редакцию
01.02.2010