УДК 519.63

АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ (СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ) ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

П. Н. Вабищевич[1]

Рассматриваются разностные аппроксимации по времени при приближенном решении задачи Коши для специальной системы эволюционных уравнений первого порядка. Построены безусловно устойчивые двухслойные операторно-разностные схемы с весами. Второй класс разностных схем базируется на формальном переходе к явным операторно-разностным схемам для эволюционного уравнения второго порядка при явно-неявных аппроксимациях отдельных уравнений системы. Обсуждаются вопросы регуляризации таких схем для получения безусловно устойчивых операторно-разностных схем. Построены схемы расщепления, которые связаны с решением простейших задач на каждом шаге по времени. Статья рекомендована к печати программным комитетом международной научной конференции “Математическое моделирование и вычислительная физика 2009” (MMCP2009, http://mmcp2009.jinr.ru).

Ключевые слова: задача Коши, системы эволюционных уравнений, операторно-разностные схемы, устойчивость.

1. Введение. При решении прикладных проблем часто приходится иметь дело с краевыми задачами для систем нестационарных уравнений в частных производных. Аппроксимация по пространству проводится на основе разностных методов, метода конечных элементов и метода конечных объемов. Особые требования предъявляются к выбору аппроксимаций по времени при численном решении задач для систем уравнений. Помимо общих условий аппроксимации и устойчивости необходимо иметь в виду и вопросы вычислительной реализации построенных схем — решение соответствующей сеточной задачи на новом временнóм слое. В этом плане наиболее обнадеживающие результаты связываются с построением специальных аддитивных операторно-разностных схем (схем расщепления) [1–3].

Различные классы аддитивных схем построены для векторных задач. Типичной является ситуация, когда отдельные компоненты вектора неизвестных связаны друг с другом. Использование тех или иных схем расщепления ориентировано на то, чтобы получить хорошие задачи для отдельных компонент решения на новом временнóм слое. Для параболических и гиперболических систем уравнений с самосопряженным эллиптическим оператором аддитивные схемы построены в [1] на основе принципа регуляризации.

Для систем уравнений эффективные схемы расщепления могут строиться на основе попеременно-треугольного метода А. А. Самарского. Например, аддитивные схемы для нестационарных векторных уравнений первого и второго порядка, типичных для задач электродинамики, построены в работе [4].

Многие прикладные математические модели имеют факторизованно-сопряженную структуру, когда оператор задачи представляется в виде произведения сопряженных друг другу операторов [5]. Такие постановки задач математической физики непосредственно связаны с использованием систем уравнений с сопряженными операторами.

В настоящей статье рассматривается задача Коши для линейной системы уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве с кососимметричным оператором задачи. В рассматриваемом операторном виде записываются типичные задачи акустики и электродинамики. Рассмотрены классические схемы с весами и построены новые аддитивные схемы для таких задач.

2. Постановка задачи. Пусть H_α, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — конечномерные действительные гильбертовы пространства, в которых скалярное произведение и норма суть $(\cdot, \cdot)_\alpha$ и $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, соответственно. Отдельные компоненты решения обозначим через $u_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, для каждого t $(0 \leqslant t \leqslant T > 0)$. Ищется решение системы эволюционных уравнений первого порядка

$$\frac{du_\alpha}{dt} + A_\alpha u_p = f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad \frac{du_p}{dt} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* u_\alpha = f_p, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

[1] Институт математического моделирования РАН, Миусская пл., 4А, 125047, Москва; главн. науч. сотр., e-mail: vabishchevich@gmail.com

где $f_\alpha(t) \in H_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, — заданы, а A_α — линейный постоянный (не зависящий от t) оператор из H_p в H_α для всех $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$. Система уравнений (1) дополняется начальными условиями

$$u_\alpha(0) = v_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Простейшая априорная оценка для решения задачи Коши (1), (2), выражающая устойчивость решения по начальным данным и правой части, имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \left\| u_\alpha(t) \right\|_\alpha^2 \leqslant \exp(t) \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| v_\alpha^0 \right\|_\alpha^2 + \int\limits_0^t \exp(t-\theta) \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| f_\alpha(\theta) \right\|_\alpha^2 d\theta. \tag{3}$$

В некоторых случаях удобно интерпретировать систему уравнений (1) как одно эволюционное уравнение для вектора $\boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

в котором $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$, а для элементов операторной матрицы A имеем представление

$$A = \{A_{\alpha\beta}\}, \quad A_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \beta = 1, 2, \ldots, p-1, \\ A_\beta, & \alpha = p, \quad \beta = 1, 2, \ldots, p-1, \\ -A_\alpha^*, & \alpha = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \beta = p, \\ 0, & \alpha = p, \quad \beta = p. \end{cases} \tag{5}$$

На прямой сумме пространств $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_p$ положим $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} (u_\alpha, v_\alpha)_\alpha$, $\|\boldsymbol{u}\|^2 = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \|u_\alpha\|_\alpha^2$, при этом $A = -A^*$ в H и оценка (3) переписывается в виде

$$\left\| \boldsymbol{u}(t) \right\|^2 \leqslant \exp(t) \left\| \boldsymbol{v}^0 \right\|^2 + \int\limits_0^t \exp(t-\theta) \sum_{\alpha=1}^{p} \left\| \boldsymbol{f}(\theta) \right\|^2 d\theta, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{v}^0 = \{v_1^0, v_2^0, \ldots, v_p^0\}$.

Второй класс априорных оценок для задачи (1), (2) связан с переходом к одному эволюционному уравнению второго порядка для u_p. Дифференцирование последнего уравнения системы (1) с учетом стационарности операторов A_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, дает $\dfrac{d^2 u_p}{dt^2} - \sum\limits_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \dfrac{du_\alpha}{dt} = \dfrac{df_p}{dt}$.

Принимая во внимание первые $p-1$ уравнения системы (1), получим

$$\frac{d^2 u_p}{dt^2} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha u_p = s_p(t), \quad 0 < t \leqslant T, \tag{7}$$

где $s_p = \dfrac{df_p}{dt} + \sum\limits_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* f_\alpha$. Начальные условия для уравнения (7), которые следуют из (2) и последнего уравнения системы (1), имеют вид

$$u_p(0) = v_p^0, \quad \frac{du_p}{dt}(0) = w_p^0 \equiv \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* v_\alpha^0 + f_p. \tag{8}$$

Нетрудно получить априорную оценку для задачи (7), (8):

$$\left\| u_p(t) \right\|_*^2 \leqslant \exp(t) \left(\left\| w_p^0 \right\|^2 + \sum_{\alpha=1}^{p-1} \left\| A_\alpha v_p^0 \right\|_p^2 \right) + \int\limits_0^t \exp(t-\theta) \left\| s_p(\theta) \right\|^2 d\theta, \tag{9}$$

а также априорные оценки для u_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p-1$.

3. Схемы с весами. Для приближенного решения дифференциально-операторной задачи (1), (2) будем использовать обычные схемы с весами. Пусть $\overline{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{T\} = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, \dots, N,\ \tau N = T\}$ — равномерная сетка по времени. Положим $y^n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$. При использовании двухслойной схемы уравнения (1) аппроксимируются разностными уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + A_\alpha\bigl(\sigma y_p^{n+1} + (1-\sigma) y_p^n\bigr) = f_\alpha^{n+1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^*\bigl(\sigma y_\alpha^{n+1} + (1-\sigma) y_\alpha^n\bigr) = f_p^{n+1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,\end{gathered} \tag{10}$$

где σ — числовой параметр (вес), который обычно удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. С учетом (2) дополним (10) начальным условием

$$y_\alpha^0 = v_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \tag{11}$$

Теорема 1. *Операторно-разностная схема* (10) *безусловно устойчива при* $\sigma \geqslant 1/2$, *и для разностного решения имеет место оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \bigl\|y_\alpha^{n+1}\bigr\|_\alpha^2 \leqslant \exp\left(\frac{4\tau}{T}\right) \sum_{\alpha=1}^{p} \bigl\|y_\alpha^n\bigr\|_\alpha^2 + \tau T \exp\left(\frac{2\sigma - 1}{T}\,\tau\right) \sum_{\alpha=1}^{p} \bigl\|f_\alpha^{n+1/2}\bigr\|_\alpha^2. \tag{12}$$

Априорная оценка (12) выступает в качестве сеточного аналога оценки (3) и обеспечивает безусловную устойчивость разностной схемы с весами (10), (11) при естественных ограничениях $\sigma \geqslant 1/2$. Рассматривая соответствующую задачу для погрешности стандартным образом [1], убеждаемся в сходимости решения операторно-разностной задачи (10), (11) к решению дифференциально-разностной задачи (1), (2) в H при $\sigma \geqslant 1/2$ с порядком $O\bigl((2\sigma - 1)\tau + \tau^2\bigr)$. При $\sigma = 1/2$ имеем второй порядок сходимости по τ.

Вычислительная реализация схемы (10), (11) связана с решением следующей сеточной задачи на новом $n+1$ временно́м слое:

$$y_\alpha^{n+1} + \sigma\,\tau\,A_\alpha y_p^{n+1} = \chi_\alpha^{n+1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \quad y_p^{n+1} - \sigma\,\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1} = \chi_p^{n+1/2} \tag{13}$$

при заданных $\chi_p^{n+1/2}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Подставляя y_α^{n+1} из первых $p-1$ уравнений системы (13) в последнее уравнение, получим

$$y_p^{n+1} + \sigma^2\,\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha y_p^{n+1} = \chi_p^{n+1/2} + \sigma\,\tau \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \chi_\alpha^{n+1/2}. \tag{14}$$

Другие компоненты приближенного решения вычисляются после решения сеточной задачи (14) по явным формулам — первые $p-1$ уравнения системы (13).

4. Явно-неявные схемы. Второй класс операторно-разностных схем связан с использованием явно-неявных аппроксимаций для отдельных уравнений системы (1). Начнем с простейшей схемы этого типа, когда для первых $p-1$ уравнений используются явные аппроксимации:

$$\begin{gathered}\frac{y_\alpha^{n+1} - y_\alpha^n}{\tau} + A_\alpha y_p^n = f_\alpha^{n+1/2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1} = f_p^{n+1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.\end{gathered} \tag{15}$$

Для сохранения второго порядка аппроксимации часто ориентируются на использование различных сеток по времени для отдельных компонент решения. Примером может служить следующий вариант схемы (15):

$$\begin{gathered}\frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} + A_\alpha y_p^n = f_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \\ \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1/2} = f_p^{n+1/2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.\end{gathered} \tag{16}$$

Хотя последнее уравнение системы (15) (а также (16)) записано как формально неявная схема, сам переход на новый временной слой базируется на явных реализациях.

Рассматривая последнее уравнение системы (16) на двух временны́х слоях, придем к уравнению

$$\frac{y_p^{n+1} - 2y_p^n + y_p^{n-1}}{\tau^2} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \, \frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} = \frac{f_p^{n+1/2} - f_p^{n-1/2}}{\tau}\,.$$

Принимая во внимание $p-1$ первых уравнений системы (16), получим

$$\frac{y_p^{n+1} - 2y_p^n + y_p^{n-1}}{\tau^2} + \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha y_p^n = \xi_p^n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{17}$$

где $\xi_p^n = \dfrac{f_p^{n+1/2} - f_p^{n-1/2}}{\tau} + \sum\limits_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* f_\alpha^n$. Тем самым приходим к явной аппроксимации эволюционного уравнения второго порядка (см. (7)). Уравнение (17) дополняется начальными условиями

$$y_p^0 = v_p^0, \quad \frac{y_p^1 - y_p^0}{\tau} = w_p^0, \tag{18}$$

которые следуют из (11). Аппроксимация второго начального условия (18) со вторым порядком по τ проводится на решениях системы (1).

Для трехслойных операторно-разностных схем, к которым относится схема (17), получены [1, 6] законченные (совпадающие необходимые и достаточные условия) результаты по устойчивости. Трехслойная разностная схема

$$B\,\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + Ay^n = f^n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{19}$$

с операторами $A(t) = A = A^* > 0$ и $B(t) = B = B^* > 0$ в действительном конечномерном гильбертовом пространстве H устойчива при

$$B > \frac{\tau^2}{4} A\,. \tag{20}$$

Соответствующая априорная оценка имеет вид

$$\begin{aligned} \|y^{n+1}\|_*^2 &\leqslant \exp\left(\frac{4\tau}{T}\right)\|y^n\|_*^2 + \tau\, T\left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}\,A\right)^{-1} f^n, f^n\right), \\ \|y^n\|_*^2 &= \left(\left(B - \frac{\tau^2}{4}\,A\right)\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}\,, \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}\right) + \left(A\,\frac{y^n + y^{n-1}}{2}\,, \frac{y^n + y^{n-1}}{2}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Схема (17) записывается в виде (19) при

$$B = E, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha, \tag{22}$$

где E — единичный (тождественный) оператор. Критерий устойчивости (20) приводит к ограничениям на шаг разностной схемы (17): $\tau^2 < \dfrac{4}{\|A\|}$.

Отталкиваясь от явной схемы (17), можно строить безусловно устойчивые неявные схемы. Это просто сделать на основе принципа регуляризации разностных схем А. А. Самарского [1, 7] при возмущении операторов разностной схемы. Устойчивость схемы (19), (22) может быть обеспечена за счет увеличения оператора B или же за счет уменьшения оператора A.

При регуляризации оператора B положим

$$B = E + \sigma\tau^2 A, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha. \tag{23}$$

Схема (19), (23) остается в классе схем второго порядка аппроксимации и является безусловно устойчивой при $\sigma \geqslant 1/4$. Наибольший интерес представляется схема (19), (23) при $\sigma = 1/4$, когда норма разностного решения и априорная оценка решения (21) более всего близки к соответствующей норме и оценке для дифференциальной задачи (9). В этом случае в (21) имеем $B - 0{,}25\tau^2 A = E$.

К регуляризованной схеме (19), (23) мы приходим при использовании явно-неявной схемы

$$\begin{gathered}
\frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} + A_\alpha y_p^n = f_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \\
\left(E + \sigma\tau^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* A_\alpha\right) \frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1/2} = f_p^{n+1/2}
\end{gathered} \tag{24}$$

для приближенного решения задачи Коши для системы уравнений (1).

Теорема 2. *Регуляризованная разностная схема* (24) *безусловно устойчива при* $\sigma \geqslant 1/4$ *и аппроксимирует систему уравнений* (1) *со вторым порядком по* τ.

Вычислительная реализация этой схемы связана с обращением того же оператора (см. (14)), что и при использовании схем с весами (10).

5. Аддитивные схемы покомпонентного расщепления. Рассмотренные безусловно устойчивые операторно-разностные схемы (10) и (24) не очень удобны в вычислительном плане. Построим аддитивные схемы для задачи (1), (2), в которых переход на новый временной слой сочетался бы с решением более простых задач, связанных с обращением операторов с отдельными операторами $A_\alpha^* A_\alpha$ при $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, а не с их суммой (оператор A в (23)).

Будем ориентироваться на векторную запись (4) системы уравнений (1). Для оператора A с учетом (5) используем аддитивное представление при $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A^{(\alpha)}, \quad A^{(\alpha)} = -\big(A^{(\alpha)}\big)^*, \quad \text{где} \quad A^{(\alpha)} = \big\{A_{ij}^{(\alpha)}\big\}, \quad A_{ij}^{(\alpha)} = \begin{cases} A_\alpha, & i = \alpha, \ j = p, \\ -A_\alpha^*, & i = p, \ j = \alpha, \\ 0, & \text{в других случаях}. \end{cases} \tag{25}$$

Основное свойство введенных операторов $A^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, связано с их кососимметричностью. Это позволяет использовать для приближенного решения задачи Коши для уравнения (4), (25) различные классы безусловно устойчивых аддитивных операторно-разностных схем [2, 3]. Применительно к задаче Коши (1), (2) имеет смысл обратить внимание прежде всего на схемы второго порядка аппроксимации по τ.

Для системы из трех уравнений ($p = 3$) можно использовать операторный аналог классической схемы Писмена–Рекфорда (схема переменных направлений). Для более общего случая, когда число уравнений системы (1) больше трех, аддитивные схемы строятся на основе понятия суммарной аппроксимации. Для построения схем второго порядка можно ориентироваться на организацию вычислений по схеме

$$\frac{1}{2} A^{(1)} \to \frac{1}{2} A^{(2)} \to \dots \to \frac{1}{2} A^{(p-1)} \to \frac{1}{2} A^{(p-1)} \to \frac{1}{2} A^{(p-2)} \to \dots \to \frac{1}{2} A^{(1)}.$$

Соответствующая аддитивная схема покомпонентного расщепления имеет вид

$$\begin{aligned}
&\text{для} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1 \\
&\qquad \frac{\boldsymbol{y}^{n+\alpha/(2p-2)} - \boldsymbol{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}}{\tau} + \frac{A^{(\alpha)}\big(\boldsymbol{y}^{n+\alpha/(2p-2)} + \boldsymbol{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}\big)}{2} = \boldsymbol{f}_\alpha^{n+1/2}, \\
&\text{для} \quad \alpha = p, p+1, \dots, 2p-2 \\
&\qquad \frac{\boldsymbol{y}^{n+\alpha/(2p-2)} - \boldsymbol{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}}{\tau} + \frac{A^{(2p-1-\alpha)}\big(\boldsymbol{y}^{n+\alpha/(2p-2)} + \boldsymbol{y}^{n+(\alpha-1)/(2p-2)}\big)}{2} = \boldsymbol{f}_\alpha^{n+1/2},
\end{aligned} \tag{26}$$

в которой $\boldsymbol{f}^{n+1/2} = \sum\limits_{\alpha=1}^{2p-2} \boldsymbol{f}_\alpha^{n+1/2}$.

Теорема 3. *Аддитивная схема суммарной аппроксимации* (26) *безусловно устойчива и аппроксимирует систему уравнений* (1) *со вторым порядком по* τ.

Вычислительная реализация рассматриваемых аддитивных схем значительно проще, чем реализация схем типа (13) и (24).

6. Регуляризованные аддитивные схемы. Основной недостаток аддитивных схем типа (26) связан с проблемами их обобщения на случай большого числа уравнений. Строгие результаты об устойчивости и сходимости удается получить только для частных задач с попарно-перестановочными операторами A_α, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, $p > 3$. Отметим некоторые возможности построения других схем расщепления для задачи (1), (2), которые относятся к классу регуляризованных аддитивных разностных схем [3].

Будем отталкиваться от явно-неявной схемы (16), которая записывается как (19), (22). Регуляризованную схему для (19), (22) теперь будем строить на основе уменьшения оператора A. Рассмотрим схему (19), в которой

$$B = E, \quad A = \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* \big(E + \sigma\tau^2 A_\alpha A_\alpha^*\big)^{-1} A_\alpha. \tag{27}$$

При такой регуляризации свойство самосопряженности оператора A и второй порядок аппроксимации в схеме (19), (27) сохранены. Сформулируем достаточные условия устойчивости этой регуляризованной схемы.

Реализация регуляризованной схемы (19), (27) может быть основана на решении системы операторно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} &\big(E + \sigma\tau^2 A_\alpha A_\alpha^*\big)\, \frac{y_\alpha^{n+1/2} - y_\alpha^{n-1/2}}{\tau} + A_\alpha y_p^n = f_\alpha^n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1, \\ &\frac{y_p^{n+1} - y_p^n}{\tau} - \sum_{\alpha=1}^{p-1} A_\alpha^* y_\alpha^{n+1/2} = f_p^{n+1/2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Неявные вычисления соотносятся с решением $p-1$ задач $y_\alpha^{n+1/2} + \sigma\tau^2 A_\alpha A_\alpha^* y_\alpha^{n+1/2} = y_\alpha^{n-1/2} + \tau f_\alpha^n - \tau A_\alpha y_p^n$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, связанных с отдельными операторами A_α, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$.

Теорема 4. *Регуляризованная аддитивная схема* (28) *безусловно устойчива при* $\sigma \geqslant (p-1)/4$, *аппроксимирует систему уравнений* (1) *со вторым порядком по* τ.

Предложенная операторно-разностная схема расщепления (28) имеет, в отличие от схем суммарной аппроксимации (26), ясную и прозрачную конструкцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1989.
3. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 1999.
4. *Вабищевич П.Н.* Разностные схемы для решения нестационарных векторных задач // Дифференциальные уравнения. 2004. **40**, № 7. 936–943.
5. *Коновалов А.Н.* Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики. 1998. **1**, № 1. 25–57.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
7. *Самарский А.А.* О регуляризации разностных схем // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1967. **7**, № 2. 62–93.

Поступила в редакцию
07.11.2009