УДК 519.632.6

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

А. Н. Боголюбов[1], М. Д. Малых[1], А. А. Панин[1]

Получены алгоритмически простые гарантированные двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа в областях, представляющих собой выпуклые многоугольники. Оценки применены к исследованию вопроса о существовании ловушечных мод волноведущих систем и к нахождению диапазонов частот, на которых происходит излучение волн без резонанса.

Ключевые слова: собственные значения оператора Лапласа, двусторонние оценки, ловушечные моды волноведущих систем, диапазоны частот, волноводы, отсечки.

1. Введение. В последние десятилетия резко возросли возможности вычислительной техники. Как следствие, в математическом моделировании вырос удельный вес численных расчетов по сравнению с аналитическими решениями. При этом особое значение приобретает, с одной стороны, получение численных результатов с гарантированной точностью, а с другой — их использование в тех задачах, когда одной только сходимости численного метода принципиально недостаточно.

В настоящей статье получены двусторонние оценки собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа в плоской области. В том случае, когда область представляет собой выпуклый многоугольник, предлагаемые оценки являются алгоритмически несложными и вычисляются с помощью разработанного авторами сценария в среде MatLab, который использует данные о сетке, построенной в пакете PDE Toolbox. Этот сценарий может быть встроен в PDE Toolbox и использован для оценки аппроксимативных характеристик пространства конечных элементов, используемых в этом пакете. В свою очередь, эти характеристики входят в оценки погрешности приближенных решений [1, 2].

Таким образом, характерной особенностью предлагаемых оценок является удобство их практического применения (ср. [3]).

Кроме того, в данной работе полученные оценки применены к исследованию волноведущих систем. Теоретические исследования волноведущих систем ведутся довольно давно. Начало их изучению было положено классическими работами А. Н. Тихонова и А. А. Самарского. Дальнейшее активное развитие этой области математической физики в нашей стране связано с именами Г. В. Кисунько, П. Е. Краснушкина, Е. И. Моисеева, А. Г. Свешникова, Р. В. Хохлова, В. П. Шестопалова и ряда других ученых. Из зарубежных специалистов можно назвать Ф. Реллиха, Д. Джонса, П. Вернера, П. Экснера.

Введем некоторые термины. *Полубесконечной трубой* или просто *трубой* будем называть множество вида $T = \Omega \times \mathbb{R}_+$, где Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$, или образ такого множества при любом движении. *Волноведущей системой* V назовем связную область в $\mathbb{R}^3$, вне некоторого шара представляющую собой объединение конечного числа непересекающихся труб.

Краевая задача о возбуждении такой системы гармоническим током $f(x)e^{-i\omega t}$ в скалярном приближении имеет вид

$$\begin{cases} \triangle u + k^2\big(q(x)+1\big)u = f, \\ u\big|_{\partial V} = 0, \quad \text{условия излучения [4],} \end{cases}$$

где V — полость волноведущей системы, функции f и q финитны, а аргумент x обозначает вектор всех пространственных координат. Кроме того, важно исследовать наличие ловушечных мод, т.е. таких функций $u \not\equiv 0$, что

$$\int\limits_V (q+1)|u|^2\,dx < \infty, \quad \int\limits_V \big|\nabla u\big|^2\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \begin{cases} \triangle u + k^2\big(q(x)+1\big)u = 0, \\ u\big|_{\partial V} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 119992, Москва; А. Н. Боголюбов, профессор, e-mail: bogan7@yandex.ru; М. Д. Малых, ассистент, e-mail: malykham@mtu-net.ru; А. А. Панин, аспирант, e-mail: a-panin@yandex.ru

Значения k^2, при которых такое ненулевое решение u существует, называются собственными значениями, а u — собственными функциями спектральной задачи (1). Эта тема восходит к работам Реллиха, который указал на возможность существования собственных значений у спектральных задач в неограниченных областях [5]. Джонсом введено понятие непрерывного спектра и получен ряд результатов относительно его непустоты, а также относительно наличия собственных значений [6]. Оказалось, что непрерывный спектр волновода представляет собой луч $\left[\lambda_1;\, +\infty\right)$ (соответственно $\left[\sqrt{\lambda_1};\, +\infty\right)$, если в качестве параметра рассматривать величину k, пропорциональную частоте). Здесь $\lambda_1 = \min\limits_i \lambda_1^{(i)}$ — наименьшее из собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа в поперечных сечениях Ω_i полубесконечных труб T_i:

$$\begin{cases} \triangle_\perp u + \lambda^{(i)} u = 0, \\ u\big|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad u \not\equiv 0. \end{cases}$$

Индекс i в дальнейшем будем опускать. Квадратные корни из этих собственных значений, т.е. числа $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots$, получили название частот отсечки, потому что при переходе частоты возбуждения регулярного и локально нерегулярного волновода через каждую из них добавляется новая мода распространяющихся в волноводе волн [4]. Кроме того, при гармоническом возбуждении регулярного волновода на частотах, равных частотам отсечки, за исключением случая, когда возбуждение ортогонально соответствующей собственной функции сечения, в волноводе не устанавливается режим гармонических колебаний, а происходит рост амплитуды поля пропорционально $\sqrt{t}$ [7–9]. Если же частота возбуждения отлична от частоты отсечки, то устанавливается гармоническое поле, т.е. распространяющиеся волны. Поскольку нормальным режимом работы волновода как передатчика энергии (информации) является не резонансный режим, а распространение волн, то именно последний случай представляет наибольший практический интерес.

Резонансное множество регулярного волновода исчерпывается частотами отсечки, а в нерегулярных (деформированных или со вставкой, т.е. при $q(x) \not\equiv 0$) волноводах могут существовать упомянутые выше ловушечные моды. С конца 80-х — начала 90-х годов начинается серия работ, посвященных наличию ловушечных мод у изогнутых волноводов постоянного сечения, само появление которых оказалось некоторой неожиданностью. Так, в статье Экснера и Шебы [10] это показано для плоского (двумерного) волновода с достаточно гладкой границей, а в диссертации Крейцирика [11] — для двумерной полосы, которая изогнута в пространстве. В то же время для широкого класса двумерных и трехмерных волноводов, в том числе с негладкой границей, а также волноведущих систем с резонатором доказать существование ловушечных мод, лежащих ниже непрерывного спектра, можно конструктивно, в чем состоит одна из целей данной работы.

2. Постановка задачи о собственных значениях. Прежде всего для краткости условимся всюду ниже в обозначении пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$ опускать область и писать H_0^1.

Определение. Будем говорить, что функция ψ, принадлежащая пространству H_0^1 и не равная его нулевому элементу, является собственной функцией оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле, отвечающей собственному значению λ, если при любом $w \in H_0^1$ верно тождество

$$\big(\nabla\psi, \nabla w\big) = \lambda(\psi, \rho w), \tag{2}$$

где функцию $\rho(x) : \Omega \to \mathbb{R}$ будем называть "весом". Задача состоит в построении надежных и несложных с алгоритмической точки зрения двусторонних оценок собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа. Хорошо известно [12], что собственные значения задачи (2) положительны и образуют счетное множество с точкой накопления $+\infty$, а собственные функции составляют базис в H_0^1 и в $L^2(\Omega)$.

3. Дискретизация задачи. Свойства конечномерных подпространств. В пространстве H_0^1 рассмотрим семейство конечномерных подпространств S_N^0, натянутых на линейно независимые функции $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^N$. Для всякого $v \in H_0^1$ определим H_0^1-проекцию $P_N v \in S_N^0$ условием $\big(\nabla(v - P_N v), \nabla\varphi_{\mathrm{discr}}\big)_{L^2} = 0$ для всех $\varphi_{\mathrm{discr}} \in S_N^0$. Существование такой проекции гарантируется теоремой Рисса.

Введем множество $X(\Omega)$, состоящее из тех элементов $v \in H_0^1$, для которых существует такая функция $f_v \in L^2(\Omega)$, что при всяком $w \in H_0^1$ верно равенство

$$(\nabla v, \nabla w) = -(f_v, w). \tag{3}$$

Тогда на $X(\Omega)$ определим оператор $\triangle : X(\Omega) \to L^2(\Omega)$, сопоставляющий каждой функции $v \in X(\Omega)$ функцию $f_v \in L^2(\Omega)$ по формуле (3). Рассмотрение такого множества и изучение свойств аппроксимации его элементов естественно, поскольку ему принадлежит решение эллиптической задачи, где старшая часть представлена оператором Лапласа [1]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \equiv -\triangle u + \boldsymbol{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f, \quad x \equiv (x_1,\dots,x_n) \in \Omega, \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

если считать, что $f \in L^2(\Omega)$, $b_i \in W^1_\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, где $\boldsymbol{b}(x) \equiv \big(b_1(x),\dots,b_n(x)\big)$ и $x = (x_1,\dots,x_n)$.

Для оценки качества приближения функций $v \in X(\Omega)$ будем использовать константу $C(N)$: пусть для любого $v \in X(\Omega)$ верно неравенство

$$\big\|v - P_N v\big\|_{H^1_0} \leqslant C(N)\big\|\triangle v\big\|_{L^2}. \tag{4}$$

Это основное и единственное требование, которому должны удовлетворять конечномерные подпространства S^0_N. С помощью леммы Обэна–Нитше ([13], с. 139) из (4) можно вывести оценку

$$\big\|u - P_N u\big\|_{L^2} \leqslant C(N)\big\|u - P_N u\big\|_{H^1_0} \tag{5}$$

с той же самой константой $C(N)$, где u — произвольная функция из H^1_0. Здесь $\|w\|_{H^1_0}$ обозначает $\big\|\nabla w\big\|_{L^2}$.

Оценки вида (4) обоснованы, в частности, для кусочно-линейных конечных элементов на отрезке [14] (см. также [2], раздел 3) и в двумерной выпуклой многоугольной области [15]. Нам потребуется

Теорема 1 (Наттерер [15]). *Пусть в треугольнике Δ со сторонами a, b и углом между ними $0 < \omega < \pi$ задана функция $u \in H^2$, а $P'_h u$ — ее линейная интерполянта, т.е. функция вида $Ax + By + C$, совпадающая с функцией u в вершинах треугольника. Пусть*

$$h^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}\,, \tag{6}$$

$\big|\Delta\big| = \dfrac{1}{2}\,ab\sin\omega$ *— площадь треугольника Δ и* $d = 2\,\dfrac{|\Delta|}{h^2}$. *Тогда верно неравенство*

$$\big\|\nabla(u - P'_h u)\big\|_{L^2(\Delta)} \leqslant hc(\Delta)|u|_{H^2(\Delta)}, \tag{7}$$

причем

$$c(\Delta) = \overline{c}\,\frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - d^2}}} \quad \text{и} \quad 0{,}46 \leqslant \overline{c} \leqslant 0{,}807. \tag{8}$$

Заметим (см., в частности, формулу (6)), что величина $hc(\Delta)$ зависит, вообще говоря, от выбора того, какие две из трех сторон треугольника взяты за a и b. Поэтому для каждого треугольника Δ триангуляции $\mathcal{T}$ в целях получения наиболее оптимальной оценки необходимо сначала найти минимальную из трех величин $hc(\Delta)$, получающихся при том или ином выборе двух из трех сторон треугольника.

Если область Ω является выпуклой, то решение из H^1_0 принадлежит пространству H^2 и верно неравенство [12]

$$|u|_{H^2} \leqslant \big\|\triangle u\big\|. \tag{9}$$

Возводя (7) в квадрат, суммируя по всем $\Delta \in \mathcal{T}$ и используя (9), для выпуклой многоугольной области Ω получаем $\big\|\nabla(u - P'_h u)\big\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \Big(\max\limits_{\Delta\in\mathcal{T}} hc(\Delta)\big\|\triangle u\big\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2$. Эта оценка, верная для кусочно-линейной интерполяции $P'_h u \in S^0_N$ произвольной функции $u \in X(\Omega)$ (с учетом условия выпуклости области Ω), тем более верна для ее ортогональной проекции $P_N u$ на то же пространство в смысле произведения $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)$. Следовательно, верны оценки (4) и (5) с $C(N) = \max\limits_{\Delta\in\mathcal{T}} hc(\Delta)$. Окончательно с учетом замечания, сделанного в предыдущем абзаце, имеем:

$$C(N) = \max_{\Delta\in\mathcal{T}} \min_{\substack{\text{выбор двух из} \\ \text{трех сторон}}} hc(\Delta). \tag{10}$$

4. Двусторонние оценки собственных значений. Для простоты изложения сначала рассмотрим случай, когда “вес” $\rho \equiv 1$.

4.1. Простейший случай. Согласно принципу минимакса в виде, сформулированном в [16], m-е собственное значение задачи (2) при $\rho \equiv 1$ выражается формулой

$$\lambda_m^{-1} = \inf_{\{\psi_1,\dots,\psi_{m-1}\}} \sup_{\substack{u\in H^1_0, \\ u\perp\psi_1,\,\dots,\psi_{m-1}}} \frac{(u,u)}{(\nabla u, \nabla u)}\,, \tag{11}$$

где $\{\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$ — наборы из $m-1$ функций, принадлежащих H_0^1 (их линейная независимость не требуется).

Собственное значение задачи, суженной на подпространство S_N^0, может быть записано так ([16], с. 342–344):

$$\overline{\lambda}_m^{-1} = \inf_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}\}} \sup_{\substack{u\in S_N^0 \\ u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}}} \frac{(u,u)}{(\nabla u, \nabla u)}, \tag{12}$$

где $\{\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$ — наборы из $m-1$ функций, принадлежащих H_0^1.

Из (12) следует, что $\overline{\lambda}_m^{-1} \leqslant \lambda_m^{-1}$. Действительно, в обоих выражениях (11) и (12) внешний инфимум берется по одному и тому же семейству наборов $\{\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$, а внутренний супремум в (12) — по более узкому множеству. Оценим λ_m^{-1} сверху. Заметим сначала, что

$$(u,u) = \big(P_N u, P_N u\big) + 2\big(P_N u, P_\perp u\big) + \big(P_\perp u, P_\perp u\big), \tag{13}$$

где $P_\perp := I - P_N$ и средний член, вообще говоря, нулю не равен, поскольку образы проекторов P_N и $P_\perp$ ортогональны в смысле произведения $\big(\nabla\cdot, \nabla\cdot\big)$, а не $(\cdot,\cdot)$. Из оценки (5) и того факта, что $P_\perp$ — ортопроектор относительно $\big(\nabla\cdot, \nabla\cdot\big)$, получаем: $\big\|P_\perp u\big\| \leqslant C(N)\big\|\nabla P_\perp u\big\| \leqslant C(N)\big\|\nabla u\big\|$. В свою очередь, отсюда и из тождества (13) с учетом неравенства Коши–Буняковского имеем:

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in H_0^1,\, \|\nabla u\|=1}} (u,u) &= \sup_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in H_0^1,\, \|\nabla u\|=1}} \Big[\big(P_N u, P_N u\big) + 2\big(P_N u, P_\perp u\big) + \big(P_\perp u, P_\perp u\big)\Big] \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in H_0^1,\, \|\nabla u\|=1}} \Big[\big(P_N u, P_N u\big) + 2C(N)\big\|P_N u\big\| + \big(C(N)\big)^2\Big] = \\
&= \sup_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in S_N^0,\, \|\nabla u\|=1}} \Big[\big(P_N u, P_N u\big) + 2C(N)\big\|P_N u\big\| + \big(C(N)\big)^2\Big] = \\
&= \sup_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in S_N^0,\, \|\nabla u\|=1}} \Big[(u,u) + 2C(N)\|u\| + \big(C(N)\big)^2\Big].
\end{aligned}$$

Взяв от обеих частей этого неравенства инфимум по всевозможным наборам $\{\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\} \subset H_0^1$, будем иметь $\lambda_m^{-1} \leqslant \inf\limits_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}\}} \sup\limits_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in S_N^0,\, \|\nabla u\|=1}} \Big[(u,u) + 2C(N)\|u\| + \big(C(N)\big)^2\Big]$.

Для дальнейшего понадобится

Лемма. *Пусть f — монотонно возрастающая непрерывная функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, $x \in X$ — любые элементы, для которых определена функция $g(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$. Тогда $\sup\limits_{x\in X} f\big(g(x)\big) = f\big(\sup\limits_{x\in X} g(x)\big)$ и аналогично для точной нижней грани.*

Доказательство. Пусть $a = \sup\limits_{x\in X} g(x) \Leftrightarrow \Big(\forall x \in X\ g(x) \leqslant a,\ \exists\big\{x_n\big\} : x_n \in X,\ g(x_n) \to a\Big)$. Тогда в силу монотонности f для всех $x \in X$ выполнено неравенство $f\big(g(x)\big) \leqslant f(a)$, а в силу непрерывности f имеем для той же последовательности $f(g(x_n)) \to f(a)$, что и доказывает утверждение леммы для точной верхней грани. Утверждение относительно точной нижней грани доказывается аналогично. Лемма доказана.

Применим лемму два раза. Сначала положим $X = S_N^0 \ominus L(\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}) \cap \Big\{u \in S_N^0 \,\Big|\, \big\|\nabla u\big\| = 1\Big\}$, $x = u$, $g(u) = \|u\|^2$ и $f(t) = t + 2C(N)\sqrt{t} + \big(C(N)\big)^2$, где L означает линейную оболочку. Затем возьмем $x = \{\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$, в качестве X возьмем семейство всех наборов $m-1$ элементов пространства H_0^1, $g\big(\{\psi_1 \ldots, \psi_{m-1}\}\big) = \sup\limits_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in S_N^0,\, \|\nabla u\|=1}} (u,u)$, функция $f(t) = t + 2C(N)\sqrt{t} + \big(C(N)\big)^2$ та же.

Поскольку (см. (12)) $\inf\limits_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}\}} \sup\limits_{\substack{u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}, \\ u\in S_N^0,\, \|\nabla u\|=1}} (u,u)$ и есть в точности $\overline{\lambda}_m^{-1}$, то, применяя дважды только что доказанную лемму, получим $\lambda_m^{-1} \leqslant \overline{\lambda}_m^{-1} + 2C(N)\sqrt{\overline{\lambda}_m^{-1}} + \big(C(N)\big)^2$. Если же $m = 1$, то внешний inf в (11) и (12) исчезает и лемма применяется лишь один раз.

В итоге, с учетом ранее установленного неравенства $\overline{\lambda}_m^{-1} \leqslant \lambda_m^{-1}$, доказана

Теорема 2. *Пусть для выбранной дискретизации верна оценка* (5)*. Тогда для собственных значений* λ_m ($m \leqslant N = \dim S_N^0$) *оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и их ритцевских приближений* $\overline{\lambda}_m$ *в пространстве* S_N^0*, где обе серии собственных значений упорядочены по возрастанию с учетом кратности, имеем*

$$\lambda_m^{-1} \in \left[\overline{\lambda}_m^{-1};\, \overline{\lambda}_m^{-1} + 2C(N)\sqrt{\overline{\lambda}_m^{-1}} + \big(C(N)\big)^2\right]. \tag{14}$$

4.2. Задача “с весом”. Рассмотрим теперь задачу на собственные значения “с весом”, а именно

$$\triangle\psi + \lambda\rho\psi = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{15}$$

Считаем, что вес отграничен от нуля и ограничен сверху:

$$\rho_1 \geqslant \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0. \tag{16}$$

Тогда, рассматривая в L^2 новое скалярное произведение $(\rho v, w)$, которое в силу (16) эквивалентно стандартному, и сохраняя прежний проектор P_N, из (5) и (16) при любом $u \in H_0^1$ имеем неравенство $\big(\rho(u - P_N u), (u - P_N u)\big) \leqslant \rho_1 \big(C(N)\big)^2 \big\|\nabla(u - P_N u)\big\|^2$.

Поскольку для собственных значений рассматриваемой задачи выполняется принцип минимакса (11), если заменить (u, u) на $(\rho u, u)$, то, заменив теперь во всех предыдущих выкладках $\|u - P_N u\|$ на выражение $\|u - P_N u\|_\rho \equiv \sqrt{(u - P_N u, u - P_N u)_\rho} \equiv \sqrt{\big(\rho(u - P_N u), u - P_N u\big)}$, получим оценку

$$\lambda_m^{-1} \in \left[\overline{\lambda}_m^{-1}; \overline{\lambda}_m^{-1} + 2C(N)\sqrt{\rho_1}\,\sqrt{\overline{\lambda}_m^{-1}} + \big(C(N)\big)^2 \rho_1\right]. \tag{17}$$

Итак, доказана

Теорема 3. *При тех же условиях на пространство* S_N^0*, что в теореме* 2*, для собственных значений задачи* (15) *и их ритцевских приближений, упорядоченных с учетом кратности, верны оценки* (17).

Замечание. При условии $C(N) \to 0$, которое в случае (10) выполняется, длина отрезка в (14) и (17) стремится к нулю.

4.3. Примеры. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение предлагаемой двусторонней оценки. В некоторых из них собственные значения могут быть получены аналитически, и эти случаи мы рассматриваем как верификацию метода.

С целью вычисления оценок был написан сценарий в MatLab'е, на вход которого передавались данные о сетке, экспортированные из среды PDE Toolbox. Сценарий вычисляет $C(N)$ по формуле (10) (используя, в свою очередь, для этого (6), (8) и данные о сетке), после чего возможно непосредственное применение формулы (14).

4.3.1. Квадрат. Рассмотрим квадрат $[0;1] \times [0;1]$, первые шесть собственных значений которого равны $2\pi^2$, $5\pi^2$, $5\pi^2$, $8\pi^2$, $10\pi^2$, $10\pi^2$. Была построена триангуляция, состоящая из прямоугольных треугольников, со значением $C(N) \leqslant 4{,}45808 \times 10^{-3}$ (табл. 1). Здесь и далее в таблицах нижняя оценка округлена с недостатком, а верхняя — с избытком.

Таблица 1

Величина	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\underline{\lambda_m}$	18,9808	46,4013	46,4013	73,0684	90,5244	90,5244
λ_m	19,7392	49,3480	49,3480	78,9568	98,6960	98,6960
$\overline{\lambda}_m$	19,7402	49,3534	49,3534	78,9727	98,7216	98,7217

4.3.2. Треугольники. Рассмотрен прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. Последовательным измельчением сетки была получена триангуляция, состоящая из треугольников с катетами $1/2^9$, что дало $h = 1/2^9$ и $C(N) \leqslant 1{,}57617 \times 10^{-3}$. Оценки собственных значений представлены в табл. 2.

Заметим, что если достроить равнобедренный треугольник до квадрата, отразив треугольник относительно гипотенузы, и собственные функции треугольника отобразить при этом нечетным образом, то получим собственные функции квадрата (не все). Поэтому набор собственных значений треугольника с катетами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ является подмножеством собственных значений квадрата со стороной $\sqrt{2}$, в частности

Таблица 2

Величина	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\underline{\lambda}_m$	24,2923	48,2738	62,5641	81,5230	95,6797	119,165
$\overline{\lambda}_m$	24,6742	49,3489	64,1539	83,8939	98,6997	123,375

первое собственное значение треугольника есть второе собственное значение квадрата. Таким образом, табл. 1 и 2 можно рассматривать как тест метода.

Кроме того, рассмотрен равносторонний треугольник со стороной 1. Была построена сетка из равносторонних треугольников со стороной $\dfrac{1}{3\times 2^8}$. Тогда $h = \dfrac{1}{3\times 2^8}$ и $C(N) \leqslant 2{,}22904\times 10^{-3}$. Получаем оценки, представленные в табл. 3.

Таблица 3

Величина	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\underline{\lambda}_m$	50,9760	116,972	116,972	197,568	213,486	213,486
$\overline{\lambda}_m$	52,6382	122,824	122,824	210,557	228,104	228,104

В случае прямоугольного треугольника с катетами $1/2$, 1 на сетке с $C(N) \leqslant 1{,}85937\times 10^{-3}$, полученной шестью сгущениями из сетки, сгенерированной автоматически, имеем оценки, представленные в табл. 4.

Таблица 4

Величина	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\underline{\lambda}_m$	106,810	189,458	280,385	304,521	394,093	442,628
$\overline{\lambda}_m$	111,038	199,542	298,696	325,288	424,881	479,403

Таблица 5

Величина	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$\underline{\lambda}_m$	$9{,}20309\times 10^{-2}$	$4{,}79072\times 10^{-1}$	$9{,}84556\times 10^{-1}$	1,66651	2,80140	3,87787
$\overline{\lambda}_m$	$9{,}24687\times 10^{-2}$	$4{,}84295\times 10^{-1}$	1,00000	1,70064	2,87612	4,00000

4.3.3. Отрезок с непостоянным ρ. В качестве численного примера к задаче на собственные значения “с весом” рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$u'' + \lambda\rho u = 0, \quad x\in[-\pi,\pi], \quad u(-\pi) = u(\pi) = 0$$

с ρ, равным 1 на отрезке $[-\pi;0]$ и 4 на полуинтервале $(0;\pi]$. Очевидно, одним из ее собственных значений является 1, соответствующая собственной функции $u = \begin{cases} \sin x, & x\in[-\pi;0], \\ \dfrac{1}{2}\sin 2x, & x\in[0;\pi]. \end{cases}$

Величина $C(N)$ для линейных конечных элементов, согласно [14], равна $C(N) = \dfrac{h}{\pi}$, где h — шаг сетки. По формуле (17) имеем $[\underline{\lambda}_m;\overline{\lambda}_m] \equiv \left[\left(\overline{\lambda}_m^{-1} + 2C(N)\sqrt{\rho_1}\sqrt{\overline{\lambda}_m^{-1}} + \big(C(N)\big)^2\rho_1\right)^{-1}; \overline{\lambda}_m\right]$. Поскольку $\max\rho(x) = 4$, получаем, например при $h = \pi/2^8$, оценки, представленные в табл. 5.

В этом примере собственные значения могли бы быть получены как решения некоторого трансцендентного уравнения, но очевидно, что метод работает для функции $\rho(x)$ гораздо более общего вида.

5. Спектральные свойства волноведущих систем.

5.1. Ловушечные моды. Подобно (11), для собственных значений μ_j неограниченной области V,

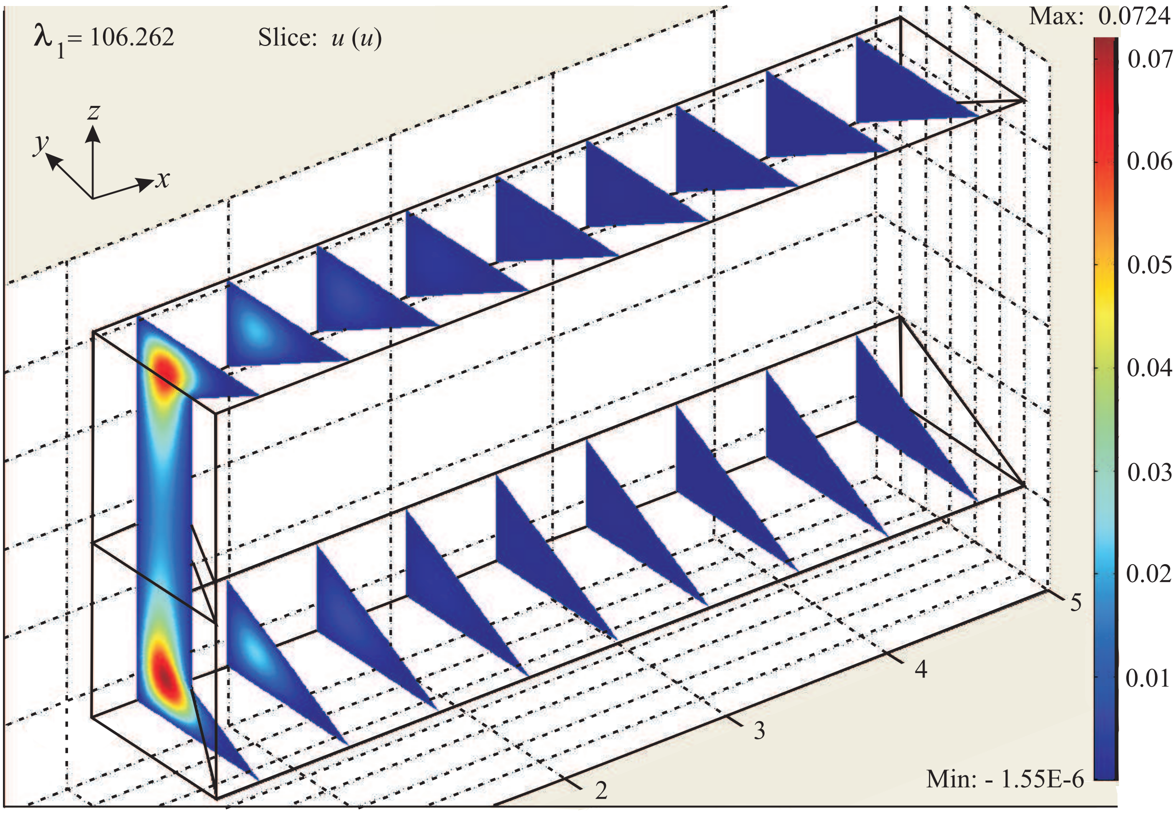

Рис. 1. Ловушечная мода. Пример 1, симметричная мода: $\widetilde{\mu} = 106{,}262$, $\lambda_1 > 106{,}810$

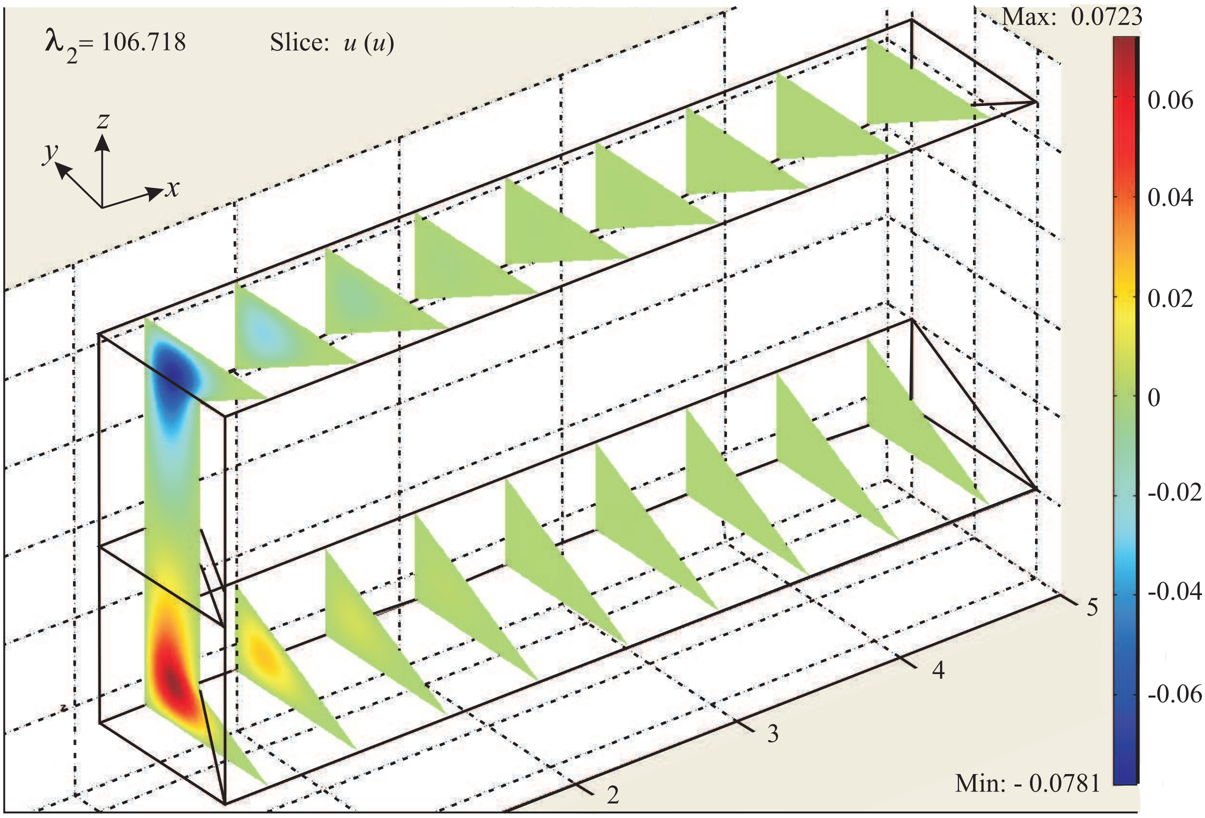

Рис. 2. Ловушечная мода. Пример 1, антисимметричная мода: $\widetilde{\mu}_2 = 106{,}718$, $\lambda_1 > 106{,}810$

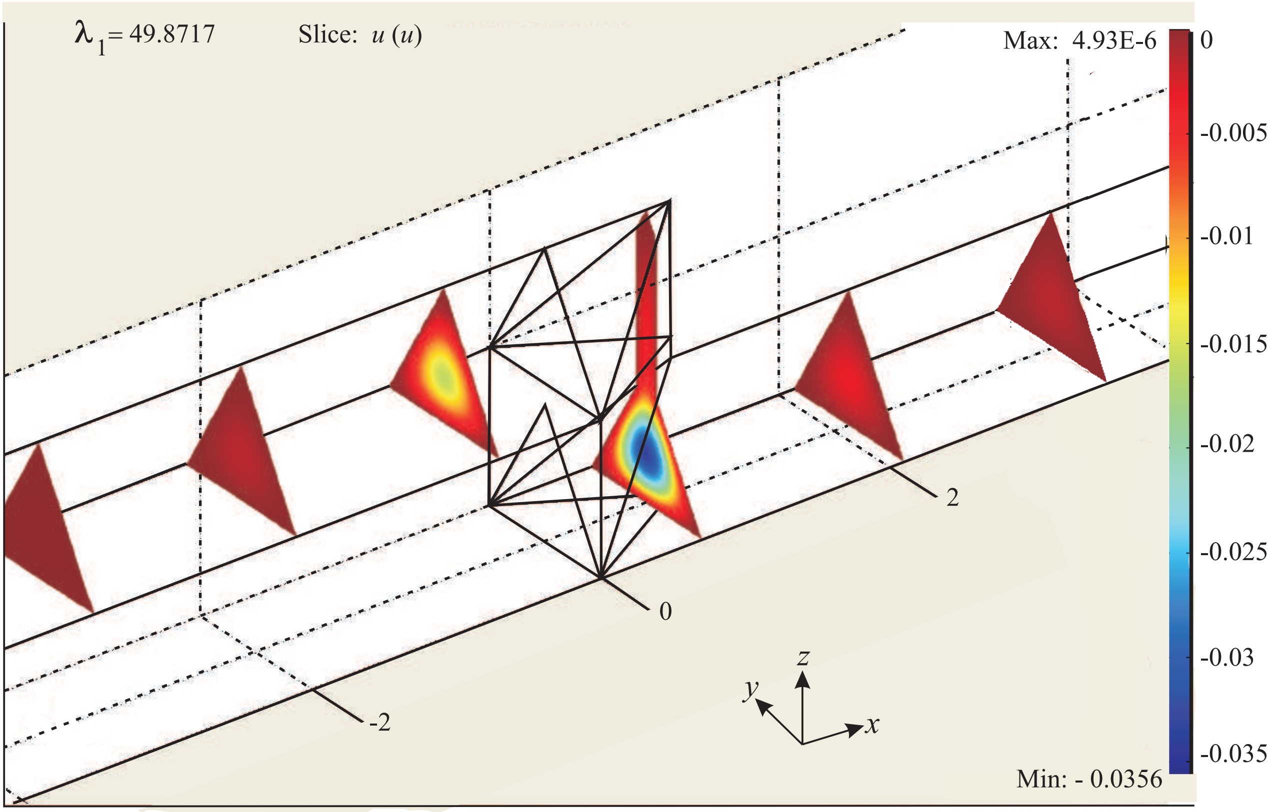

Рис. 3. Ловушечная мода. Пример 2: $\widetilde{\mu} = 49{,}8717$, $\lambda_1 > 50{,}9760$

лежащих ниже непрерывного спектра, верно равенство (см. [17], с. 91, 92)

$$\mu_j = \sup_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{j-1}\}} \inf_{u\in H_0^1(V), u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}} \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(qu, u)}.$$

Для их ритцевских приближений верна формула

$$\widetilde{\mu}_j = \sup_{\{\psi_1,\ldots,\psi_{j-1}\}} \inf_{\substack{u\in S_N^0,\\ u\perp\psi_1,\ldots,\psi_{m-1}}} \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(qu, u)}, \tag{18}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1} \in H_0^1(V)$. Существенно, чтобы проекционный метод был конформным, т.е. $S_N^0 \subset H_0^1(V)$. Тогда $\widetilde{\mu}_j \geqslant \mu_j$ для всех собственных значений ниже непрерывного спектра. Поэтому, если первые M $(M = 0, 1, 2, \ldots)$ значений $\widetilde{\mu}$ оказались ниже нижней границы непрерывного спектра, можно сделать вывод о наличии как минимум M ловушечных мод, лежащих ниже этой границы. Итак, численное доказательство существования ловушечных мод в волноведущей системе можно провести в два этапа:

— с помощью оценки (14) для первых собственных значений λ_1 всех полубесконечных труб, входящих в данную систему, оцениваем снизу нижнюю границу ее непрерывного спектра;

— вычисляя с помощью конформного проекционного метода для достаточно большой ограниченной подобласти $\widetilde{V} \subset V$ ее приближенные собственные значения (18) (с условиями Дирихле на всей границе $\partial\widetilde{V}$), сравниваем их с $\min\limits_{T_i} \underline{\lambda_1}$, вычисленным согласно (14), где все T_i — полубесконечные трубы, входящие в состав системы V.

Если $\widetilde{\mu}_j < \min\limits_{T_i} \underline{\lambda_1}$, $j = 1, \ldots, M$, можно сделать вывод о наличии не менее M ловушечных мод.

Обратимся к некоторым численным примерам. В примере 1 (рис. 1 и 2) сечением волновода является прямоугольный треугольник с катетами 1, 1/2, оценки собственных значений которого приведены в табл. 4. Удается установить наличие двух ловушечных мод. В примере 2 (рис. 3) сечение — правильный треугольник со стороной 1 (см. табл. 3). Продемонстрировано существование одной ловушечной моды.

В примере 3 (рис. 4) к полубесконечной трубе присоединен резонатор, представляющий собой прямоугольный параллелепипед размерами $1\times1\times0{,}5$. Его первое собственное значение равно $6\pi^2 \approx 59{,}2176$, что

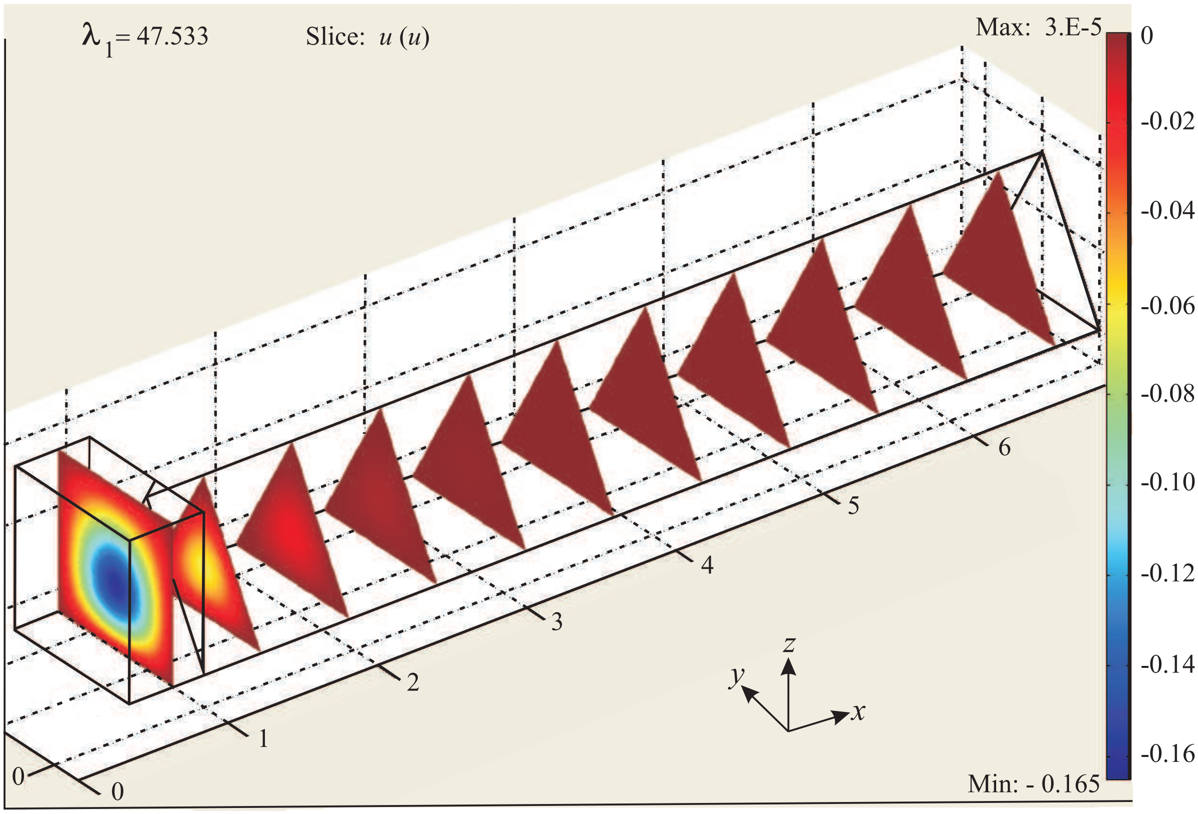

Рис. 4. Ловушечная мода. Пример 3, резонатор: $\widetilde{\mu} = 47{,}5330$, $\lambda_1 > 50{,}9760$

больше квадрата первой частоты отсечки. Однако если найти оценку для первого собственного значения большей, но ограниченной области $\widetilde{V}$, изображенной на рисунке, то доказать существование ловушечной моды удается. В примере 4 (рис. 5) также рассмотрен резонатор. В отличие от предыдущего случая, его первое собственное значение меньше квадрата первой частоты отсечки, поэтому существование первой ловушечной моды доказывается без применения проекционного метода к трехмерной области. Однако применив его, можно установить существование второй моды, лежащей ниже непрерывного спектра полубесконечной трубы. Сечением полубесконечной трубы в обоих случаях являлся правильный треугольник со стороной 1.

5.2. Временна́я асимптотика поля в регулярном волноводе. Хорошо известно [7–9, 18], что при гармоническом возбуждении на частотах, равных частотам отсечки, за исключением случая, когда возбуждение ортогонально соответствующей собственной функции сечения, в волноводе не устанавливается режим гармонических колебаний, а происходит рост амплитуды пропорционально $\sqrt{t}$. Если же частота возбуждения отлична от частоты отсечки, то устанавливается гармоническое поле. Таким образом, для того чтобы гарантировать отсутствие резонансного режима, достаточно доказать несовпадение этих частот. Поскольку нахождение частоты отсечки сводится к вычислению собственного значения сечения, то описанный в разделе 4 метод позволяет установить это несовпадение. Если для собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ показано, что $\lambda_i \in \left[\underline{\lambda_i}; \overline{\lambda}_i\right]$, причем для данного k верно $k^2 < \underline{\lambda_N}$ и ни при каком $i = 1, \ldots, N$ $k^2 \notin \left[\underline{\lambda_i}; \overline{\lambda}_i\right]$, то можно гарантировать, что k не совпадает ни с одной из резонансных частот и, следовательно, режима резонанса на данной частоте не будет. Практическая значимость этого факта велика, если учесть, что нормальным режимом работы волновода как передатчика энергии (информации) является именно режим распространения волны, а не резонанса.

В качестве примера рассмотрим регулярный волновод, сечением которого является правильный треугольник со стороной 1. Опираясь на данные табл. 3, можно утверждать, что при $k^2 < 50{,}9760$ распространяющихся волн в волноводе не будет, при $52{,}6382 < k^2 < 116{,}972$ гарантируется одномодовый режим, при $122{,}824 < k^2 < 197{,}568$ — трехмодовый, при $210{,}557 < k^2 < 213{,}486$ — четырехмодовый и т.д.

6. Заключение. Подытожим основные результаты работы. Получены гарантированные двусторон-

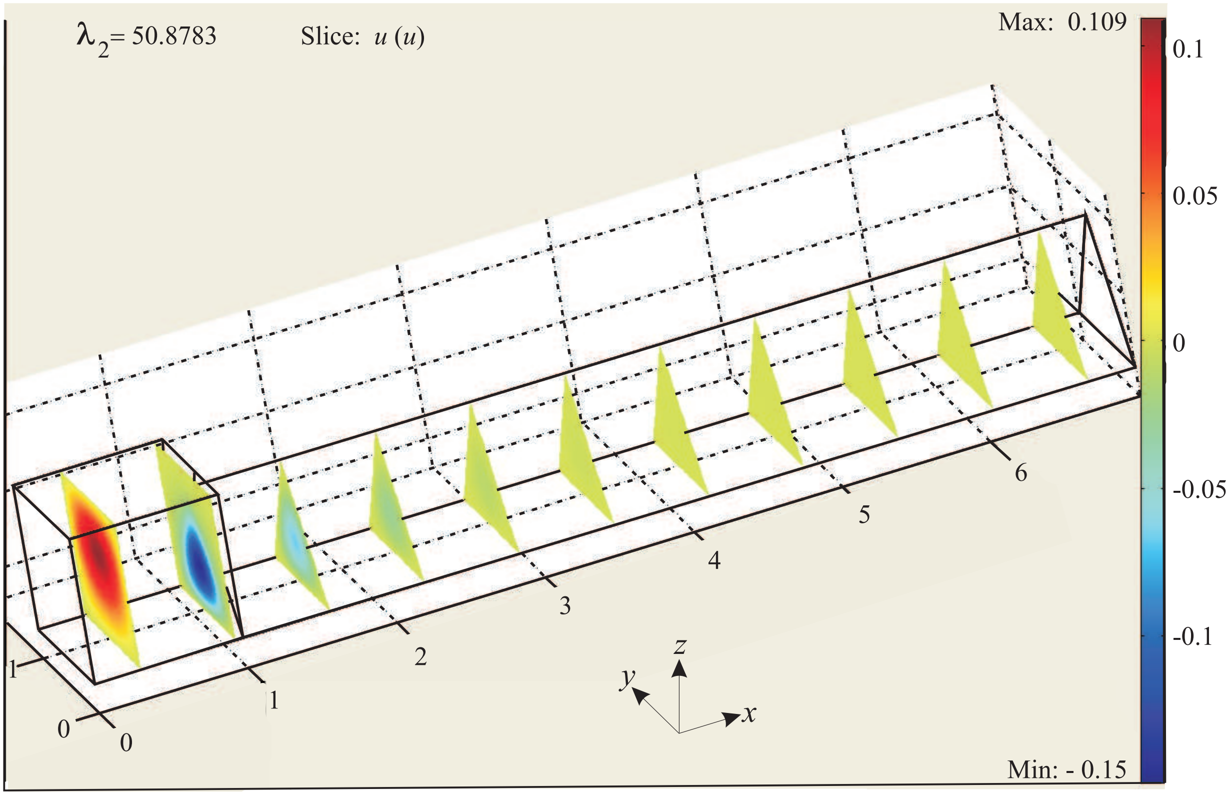

Рис. 5. Пример 4, резонатор, вторая мода: $\widetilde{\mu}_2 = 50{,}8783$, $\lambda_1 > 50{,}9760$

ние оценки (14) и (17) собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω. С целью применения этих оценок в случае, когда Ω представляет собой выпуклый многоугольник, построены и реализованы в виде сценария в среде MatLab явные алгоритмы вычисления константы $C(N)$, входящей в формулы (5), (14) и (17), и вычисления собственно оценок (14) и (17). Эти алгоритмы могут быть использованы при оценке погрешности приближенных решений других задач математической физики. Построенные алгоритмы применены к исследованию спектральных свойств волноведущих систем и использованы для получения гарантированных оценок частот отсечки, а также для доказательства существования ловушечных мод, лежащих ниже непрерывного спектра системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nakao M.T., Hashimoto K.* Constructive error estimates of finite element approximations for non-coercive elliptic problems and its applications (http://hdl.handle.net/2324/3405).
2. *Боголюбов А.Н., Панин А.А.* Об оценке погрешности приближенного решения эллиптических уравнений с некоэрцитивной билинейной формой // Вычислительные методы и программирование. 2009. **10**, № 1. 34–48.
3. *Knyazev A.V., Osborn J.E.* New a priori FEM error estimates for eigenvalues (`http://www-math.cudenver.edu/~aknyazev/research/papers/ko05/061304R.pdf`).
4. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высшая школа, 1991.
5. *Rellich F.* Das Eigenwertproblem von $\triangle u + \lambda u = 0$ in Halbröhren // Studies and Essays Presented to R. Courant. N.-Y., 1948. 329–344.
6. *Jones D.S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1953. **49**. 668–684.
7. *Werner P.* Resonance phenomena in cylindrical waveguides // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1987. **121**, N 1. 173–214.
8. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Панин А.А.* Временна́я асимптотика поля, возбуждаемого в волноводе гармоническим током // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2005. **45**, № 12. 2219–2231.
9. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Панин А.А.* Принцип предельной амплитуды для волновода // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. 2006. № 5. 9–13.
10. *Exner P., Seba P.* Bound states in curved quantum waveguides // J. Math. Phys. 1989. **30**, N 11. 2574–2580.

11. *Krejčiřík D.* Guides d'ondes quantiques bidimensionnels. Thèse de Doctorat. Université de Toulon et du Var, Université Charles de Prague. 2001.
12. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
13. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
14. *Nakao M.T., Yamamoto N., Kimura S.* On the best constant in the error bound for the H_0^1-projection into piecewise polynomial spaces // J. Approx. Theory. 1998. **93**, N 3. 491–500.
15. *Natterer F.* Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der Finiten Elemente // International Series of Numerical Mathematics. Vol. 28. Basel: Birkhäuser Verlag, 1975. 109–121.
16. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
17. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
18. *Werner P.* Aperiodic electromagnetic waves in cylindrical waveguides // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1987. **121**, N 1. 215–272.

Поступила в редакцию
29.01.2009