УДК 519.6; 514.174.6

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИКЕ ПРИМИТИВНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ $\mathbf{R}^3$ И $\mathbf{R}^4$

Г. Г. Рябов[1]

Решеточные модели и симплициальные комплексы продолжают играть важную роль в теоретической физике, и интерес к ним возрос особенно в последние годы в связи с методами динамической триангуляции в построении квантовой модели гравитации. Кусочно-линейные (PL — Piecewise Linear) комплексы и бизвездные (bistellar) преобразования с появлением нового поколения суперкомпьютеров стали предметом и инструментом вычислительных методов в комбинаторной геометрии и топологии. В предлагаемой статье рассматриваются случайные "перестройки" (flips) примитивной триангуляции в пространстве $\mathbf{R}^3$ (с вершинами, принадлежащими целочисленному множеству $\mathbf{Z}^3$) как марковские цепи и исследуются их свойства периодичности, разложимости и эргодичности, тем самым устанавливается асимптотическое поведение триангулированного пространства в целом. Предложены близкие методы для примитивных триангуляций в пространстве $\mathbf{R}^4$.

Ключевые слова: примитивная триангуляция, диофантовы уравнения, марковские цепи, кодирование триангулированных разверток, спектр вершинных полиэдров, статистика Бозе–Эйнштейна.

В последние годы методы динамической и примитивной триангуляции получили широкое распространение как эффективные инструментальные средства для решения задач комбинаторной геометрии и топологии [1–8]. Узловым моментом для компьютерной реализации примитивных триангуляций является корректное (в смысле аксиоматики Колмогорова) вычисление переходных вероятностей в марковской цепи, для чего строится полное множество элементарных событий и борелевских подмножеств на нем с помощью кодирования триангулированных разверток кубов $\mathbf{I}^3$ и $\mathbf{I}^4$, которое, по существу, является изоморфным отображением. В этом отношении настоящая статья продолжает исследования, результаты которых представлены в [7–10].

1. Случай пространства $\mathbf{R}^3$. Рассматривается триангуляция пространства $\mathbf{R}^3$ с вершинами в целых точках из $\mathbf{Z}^3$ и множеством V_1 ребер, коллинеарных примитивным векторам с максимальным модулем координат, равным 1. По сравнению с определенной в [1] примитивной триангуляцией для пространства $\mathbf{R}^n$ как триангуляцией, при которой все симплексы имеют объем $1/n!$, рассматриваемый случай расширен, в частности, для $\mathbf{R}^3$ включением разбиения единичного куба на четыре симплекса объемом $1/6$ и один симплекс объемом $1/3$.

Вначале на единичном кубе $\mathbf{I}^3$ рассмотрим процесс проведения диагоналей во всех его гранях. При проведении в каждой грани одной из двух возможных диагоналей каждая вершина куба $\mathbf{I}^3$ будет иметь от нуля до трех сходящихся к ней диагоналей. Будем называть это число диагональной степенью вершины (дсв) и обозначать через i. Пусть x_i — число вершин куба с диагональной степенью i. Тогда справедливы соотношения: $\sum x_i = 8$ и $\sum i\, x_i = 12$, где $i = 0, 1, 2, 3$. Рассматривая эти соотношения как систему диофантовых уравнений, выпишем все их решения в виде дсв-векторов (x_0, x_1, x_2, x_3):

$$(0,4,4,0),\quad (0,6,0,2),\quad (1,3,3,1),\quad (2,0,6,0),\quad (2,2,2,2),\quad (2,3,0,3),\quad (3,0,3,2),\quad (3,1,1,3),\quad (4,0,0,4).$$

Учитывая дополнительные ограничения (сумма диагональных степеней вершин, инцидентных одному ребру, больше или равна 2 и меньше или равна 4, а сумма диагональных степеней вершин, образующих каждую грань, равна 6), решения $(2,3,0,3)$, $(3,0,3,2)$ и $(3,1,1,3)$ не соответствуют никаким способам проведения диагоналей в гранях и поэтому исключаются из дальнейшего рассмотрения. Естественно, что триангуляции куба, соответствующие различным дсв-векторам, не конгруэнтны.

Для дсв-векторов $(0,6,0,2)$, $(1,3,3,1)$, $(2,0,6,0)$ и $(2,2,2,2)$ триангуляции куба завершаются проведением наибольшей диагонали куба в плоскости, рассекающей куб на две треугольные призмы (рис. 1). Все эти триангуляции состоят из шести симплексов, каждый объемом $1/6$.

[1] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; зав. лабораторией, e-mail: gen-ryabov@yandex.ru

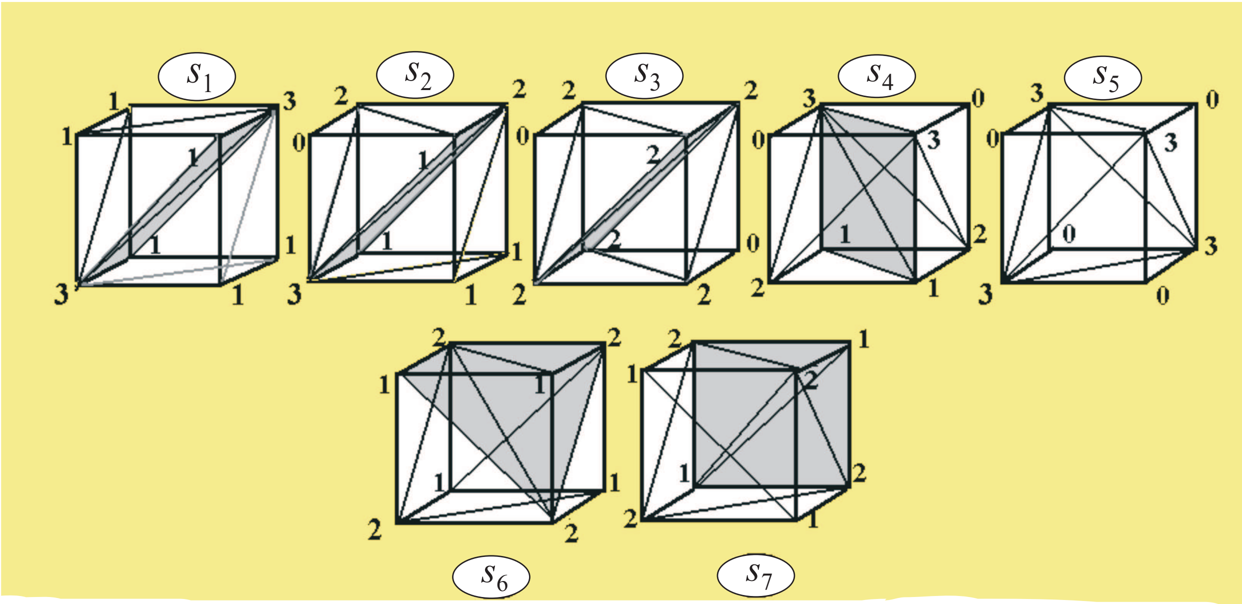


Рис. 1. Пять типов полной триангуляции и два типа неполной триангуляции куба $\mathbf{I}^3$. Рядом с вершинами указаны диагональные степени вершин

Для дсв-вектора $(4, 0, 0, 4)$ триангуляция разбивает куб на тетраэдр со стороной $\sqrt{2}$ и объемом 1/3 и четыре пирамиды, объем каждой из которых равен 1/6 (рис. 1).

Для дсв-вектора $(0, 4, 4, 0)$ не существует никаких "полных" триангуляций куба, т.е. представления куба как нормального симплициального комплекса. Возможны варианты частичной триангуляции, когда 1/3 объема куба есть симплициальный комплекс (из двух симплексов), а 2/3 объема — нет (рис. 1).

Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться все возможные положения диагоналей в гранях, то и эти "неполные" триангуляции будут учитываться. Будем обозначать типы триангуляций, соответствующие дсв-векторам, через s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 (полно триангулированы) и s_6, s_7 (неполно триангулированы).

Для дальнейшего рассмотрения будем считать, что для каждого единичного куба в $\mathbf{R}^3$ задана одна и та же развертка, в которой задана единая нумерация граней $f1$, $f2$, ..., $f6$. В случае проведения каким-то способом диагоналей в гранях куба условимся диагональ, идущую в одном направлении, обозначать через 0, а в другом — через 1. Тогда шестиразрядный двоичный код однозначно соответствует каждому из возможных способов проведения диагоналей в гранях. Значение (0 или 1) i-го разряда кода соответствует направлению диагонали в грани fi. Изменение направления диагонали в грани fi приводит к изменению значения в i-м разряде с 0 на 1 или наоборот с 1 на 0, что соответствует сложению 1 со значением разряда по модулю 2. Таким образом, число всех способов положений диагоналей в гранях равно $2^6 = 64$, каждый из которых соответствует одному из типов s_i. Ниже приведены данные по числу кодов, соответствующих s_i:

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
4	24	4	12	2	9	9

Выбор наудачу одного из этих 64 кодов можно интерпретировать как случайный выбор одного из единичных кубов случайно гранетриангулированного $\mathbf{R}^3$. Тогда вероятности того, что этот куб окажется полно триангулированным $P(+)$ и неполно триангулированным $P(-)$, определяются равенствами $P(+) = P(Us_i;\ i = 1, \ldots, 5) = 23/32$ и $P(-) = P(s_6, s_7) = 1 - P(+) = 9/32$.

Пусть задана некоторая триангуляция граней единичного куба как один из шестиразрядных двоичных кодов, соответствующий типу s_i, и пусть направление диагонали в одной из граней случайно меняется. Будем называть такое изменение единичной диагональной перестройкой. Тогда в принципе возможны два варианта: изменение типа s_i или сохранение прежнего типа. Для дальнейшего рассмотрения каждому типу s_i поставим в соответствие i-е состояние системы в дискретные моменты времени, связанные с диагональными перестройками и переводящими систему в одно из своих состояний $\{s_1, s_2, \ldots, s_7\}$. Таким образом, для полного и корректного задания цепи Маркова необходимо определить матрицу переходных вероятностей. Считая равновероятным изменение направления диагонали в любой грани, можно определить все множество элементарных исходов для каждого из типов s_i при изменении в каждой грани.

Для однозначности достаточно задать на некоторой зафиксированной развертке куба $\mathbf{I}^3$ номера граней, которые совпадают с номерами двоичных разрядов в шестиразрядном коде, и поставить в соответствие направлениям диагоналей 0 и 1. Каждому элементарному исходу при изменении положения диагонали в одной грани однозначно соответствует пара шестиразрядных двоичных кодов к1 и к2, где к1 — код исходного положения диагоналей, а к2 — код получившегося положения после перестройки (рис. 2а). Аналогично кодируется 3d-развертка для куба $\mathbf{I}^4$ (рис. 2б).

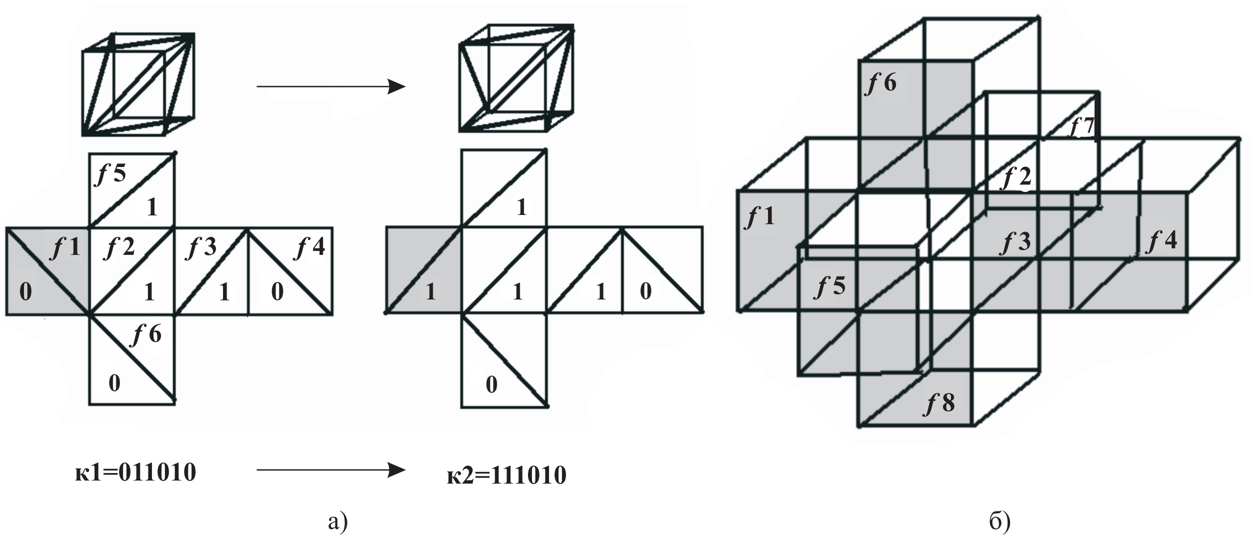


Рис. 2. Триангуляции куба $\mathbf{I}^3$, связанные с изменением диагонали в одной грани; соответствующие развертки для кодирования (грань изменения затемнена) и коды триангуляций; номера граней соответствуют номерам разрядов в кодах (а). Изображение 3d-развертки куба $\mathbf{I}^4$ (б)

На множестве Ω всех элементарных исходов (пар кодов) определяются переходные вероятности p_{ij} марковской цепи, а затем изучаются свойства таких марковских цепей (возвратность, периодичность, разложимость и эргодичность) при различном числе одновременно изменяемых в один момент дискретного времени граней в $\mathbf{I}^3$. Поэтому ниже рассматривается несколько вариантов и дается краткая характеристика процесса для каждого варианта.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix};$$

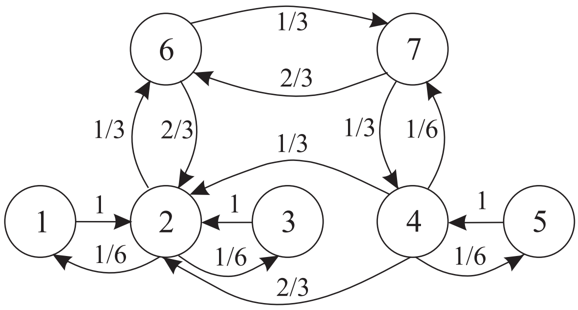


Рис. 3. Схема системы

$$A_0^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_0^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 3/8 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1/16 & 0 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

1. Рассматриваются все семь состояний системы, в каждый дискретный момент времени случайно меняется диагональ в одной из граней. На рис. 3 показаны состояния системы и переходные вероятности между состояниями: A_0 — матрица переходных вероятностей за один шаг по времени, A_0^{2n} и A_0^{2n+1} —

соответственно матрицы для четных и нечетных моментов дискретного времени при больших n. Цепь возвратная, периодическая.

2. Во всех последующих вариантах рассматриваются пять состояний системы, соответствующие полным триангуляциям $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$. В каждый дискретный момент времени может случайно измениться диагональ в одной из граней с условием, что это не переводит куб в состояние неполной триангуляции (s_6, s_7). Если возможное изменение именно такое, то в этот момент система остается в предыдущем состоянии (на диаграммах это графически изображено петлей). Ниже приведены результаты для случаев, когда в дискретный момент времени случайно меняются h граней куба $(h = 1, 2, \dots, 6)$.

2.1. $h = 1$, A_1 и A_1^n — матрицы переходных вероятностей (рис. 4). Цепь эргодическая.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1^n = \begin{pmatrix} 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \\ 0.0870 & 0.5217 & 0.0870 & 0.2609 & 0.0434 \end{pmatrix}.$$

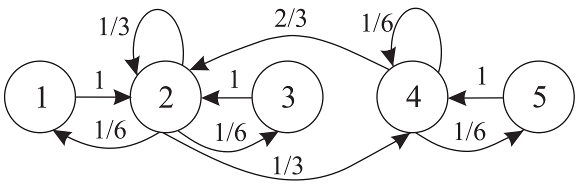


Рис. 4. Случайное изменение в одной грани $(h = 1)$

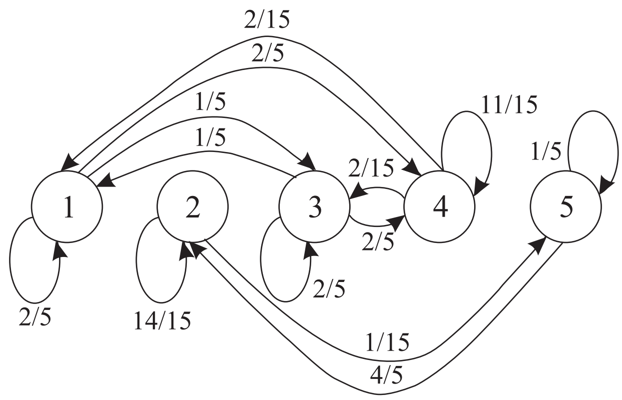


Рис. 5. Случайное изменение в двух гранях $(h = 2)$

2.2. $h = 2$, A_2 и A_2^n — матрицы переходных вероятностей (рис. 5). Цепь распалась на две цепи с состояниями $(1, 3, 4)$ и $(2, 5)$, каждая из которых эргодическая.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 14/15 & 0 & 0 & 1/15 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 2/15 & 0 & 2/15 & 11/15 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}; \quad A_2^n = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.9230 & 0 & 0 & 0.0770 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.9230 & 0 & 0 & 0.0770 \end{pmatrix}.$$

2.3. $h = 3$, A_3 и A_3^n — матрицы переходных вероятностей (рис. 6). Цепь эргодическая.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3/10 & 3/5 & 0 & 0 & 1/10 \\ 1/10 & 2/5 & 1/10 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}; \quad A_1^n = A_3^n = A_5^n.$$

2.4. $h = 4$, A_4 и A_4^n — матрицы переходных вероятностей (рис. 7). Цепь распалась на две цепи.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 14/15 & 0 & 0 & 1/15 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0 \\ 2/15 & 0 & 2/15 & 11/15 & 0 \\ 0 & 12/15 & 0 & 0 & 3/15 \end{pmatrix}; \quad A_4^n = A_2^n.$$

2.5. $h = 5$. Цепь эргодическая, поскольку $A_1 = A_5$ и поэтому $A_1^n = A_5^n$.

2.6. $h = 6$ (полная инверсия диагоналей в гранях), A_6 — матрица переходных вероятностей. Диаграмма цепи приведена на рис. 8.

Обобщением приведенных результатов могут служить следующие утверждения.

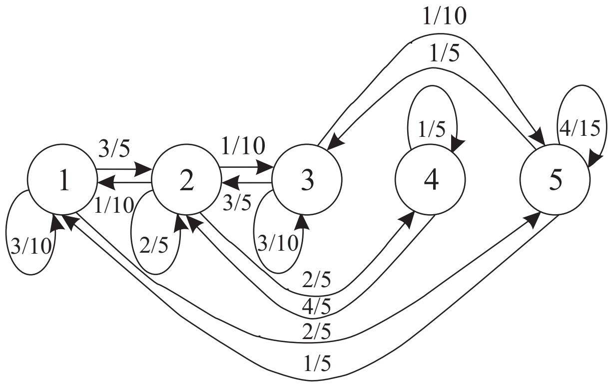


Рис. 6. Случайное изменение в трех гранях ($h = 3$)

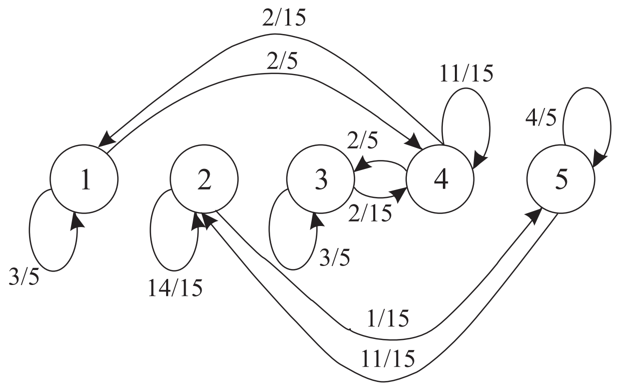


Рис. 7. Случайное изменение в четырех гранях ($h = 4$)

1. Случайные перестройки диагоналей в гранях примитивной триангуляции в пространстве $\mathbf{R}^3$ индуцируют марковскую цепь с конечным числом состояний и дискретным временем.

2. При допущении всех типов триангуляции граней и при одиночной перестройке в каждый момент времени процесс является периодическим.

3. При допущении только тех типов триангуляции граней, которым соответствует полная триангуляция куба $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, процесс для нечетного числа меняющихся граней в единицу дискретного времени является эргодическим с одинаковым стационарным распределением. Для четного числа меняющихся граней процесс распадается на подцепи с эргодическими свойствами.

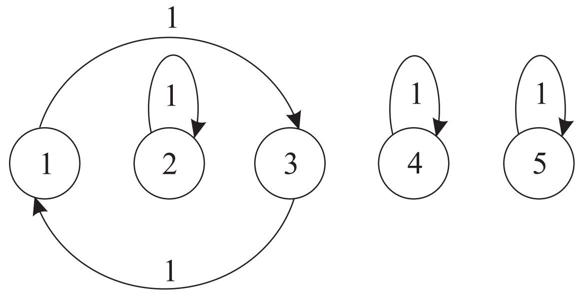


Рис. 8. Изменение диагоналей во всех шести гранях

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В трехмерном случае методом двоичного кодирования двумерных граней можно перечислить все варианты вершинных полиэдров при примитивной триангуляции на множестве ребер V_1, контролируя и отбрасывая при перечислении коды, не соответствующие полным нормальным триангуляциям. Поскольку рассматриваются восемь октантов (кубов) с общим числом граней 36, общее число всех вариантов расположения диагоналей в них равно 2^{36}. Расчеты на компьютере дали следующие результаты. Каждый допустимый код отображался в λ-вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, где λ_i соответствует i-му кубу и равен номеру типа триангуляции $(s_1, s_2, \ldots, s_5)$. Пусть Λ — множество, которое содержит и векторы, соответствующие конгруэнтным триангуляциям. Определенную характеристику этого множества можно получить, проведя следующую группировку. Определим множество M μ-векторов $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_5)$, где μ_k — число кубов с триангуляцией k-го типа и $\sum \mu_k = 8$. Тогда каждому λ-вектору соответствует некоторый μ-вектор, а каждому μ-вектору может соответствовать один или несколько λ-векторов, или вообще ни одного λ-вектора, при этом для $\mu_1 \neq \mu_2$ соответствующие им триангуляции заведомо не конгруэнтны.

Число μ-векторов в нашем случае равно числу размещения восьми частиц в пяти ящиках без ограничений (статистическая модель Бозе–Эйнштейна) и равно $\dfrac{(8+5-1)!}{8!4!} = 495$. Если расположить все μ-векторы в лексикографическом порядке вдоль оси x, а по оси y откладывать число λ-векторов (логарифмическая шкала), соответствующих каждому μ-вектору, то получим результат, изображенный на рис. 9, который можно рассматривать как спектр частот неконгруэнтных вершинных полиэдров при примитивной триангуляции в $\mathbf{R}^3$. Отметим, что для μ-векторов $(1,0,1,0,6)$, $(1,0,7,0,0)$, $(3,0,5,0,0)$, $(5,0,3,0,0)$ и $(7,0,1,0,0)$ не существует ни одной полной триангуляции. Для μ-векторов $(0,5,0,3,0)$, $(0,5,1,2,0)$, $(0,6,0,2,0)$ и $(1,5,0,2,0)$ число различных полиэдров равно максимальному числу 188 116 992. Близкий к фрактально-периодическому характер спектра, с одной стороны, обусловлен порядком расположения μ-векторов, с другой стороны, коррелирует с числом типов s_2 и s_3 (“минимально симметричных” среди s_1, s_2, s_3, s_4 и s_5).

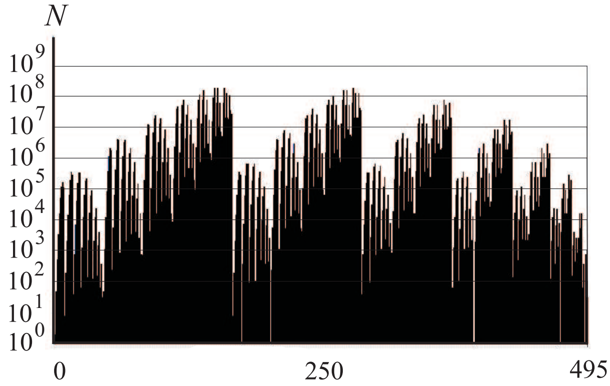


Рис. 9. Распределение вершинных полиэдров при примитивных триангуляциях в $\mathbf{R}^3$

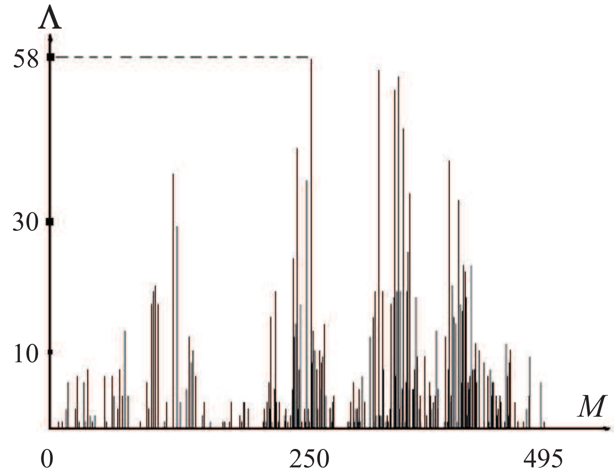


Рис. 10. Распределение вершинных полиэдров при примитивных триангуляциях в $\mathbf{R}^4$

2. Случай $\mathbf{R}^4$. Примитивная полная триангуляция единичного куба в $\mathbf{R}^4$ естественно определяет в каждой его трехмерной грани полную примитивную триангуляцию, которая может быть одной из пяти типов, определенных в предыдущем разделе. Следовательно, в случае перечисления всех неконгруэнтных типов полной примитивной триангуляции в $\mathbf{R}^4$ можно рассматривать все возможные восьмизначные (по числу трехмерных граней в кубе $\mathbf{I}^4$) пятеричные числа (по числу типов) с проверкой “совместимости” диагоналей в двумерных гранях, при этом требуется учесть все варианты ориентации трехмерных граней.

Однако воспользуемся более прозрачной схемой перечисления из предыдущего раздела, т.е. будем рассматривать все возможные положения диагоналей в двумерных гранях куба $\mathbf{I}^4$. Тогда для некоторой общей для всех случаев развертки куба $\mathbf{I}^4$ перенумеруем все двумерные грани (их 24) и этот номер будет номером двоичного (по числу положений диагонали в двумерной грани) разряда в 24-разрядном числе. Таким образом, число всех возможных вариантов проведения диагоналей в двумерных гранях куба $\mathbf{I}^4$ равно 2^{24}. Для каждого такого кода надо проверить, полна ли триангуляция для всех трехмерных граней. Совпадение диагоналей в двумерных гранях, общих для трехмерных граней, реализуется автоматически, поскольку такая грань представлена одним разрядом.

Соответствующая программа была разработана, и были перечислены все типы полных примитивных триангуляций куба $\mathbf{I}^4$ в виде векторов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8)$, где λ_k равно i как номеру типа триангуляции данной (k-й) трехмерной грани ($i = 1, \ldots, 5$). Таких различных λ-векторов оказалось 2494 из общего числа $|\Omega| = 2^{24} = 16\,777\,216$. Обозначим это множество через Λ.

Как и в предыдущем разделе, отобразим множество Ω на множество M. Проведенные компьютерные расчеты дали следующие результаты.

Имеем $|\Lambda| = 2494$ и $|M| = 495$. Число различных μ, которым соответствует хотя бы одна примитивная триангуляция куба $\mathbf{I}^4$, равно 295. Частоты наборов изменяются в диапазоне от 0 до 58. Спектр частот наборов при лексикографическом упорядочении векторов из M по оси x иллюстрируется на рис. 10. Дополнительно приведем распределение в этом множестве нормальных триангуляций $\mathbf{I}^4$ типов $s_1, \ldots, s_5$ для трехмерных граней: $s_1 = 444$, $s_2 = 621$, $s_3 = 352$, $s_4 = 749$ и $s_5 = 328$.

Для анализа свойств марковских процессов принципиально можно применить методы из предыдущего раздела, хотя это и связано с определенными техническими трудностями. Кратко охарактеризуем их.

1. Для вычисления переходных вероятностей в системе из 2494 состояний с изменением k диагоналей в 24 гранях потребуется порядка $2494 \times 2^{24} \approx 10^{11}$ операций.

2. Одноразовое перемножение матриц порядка 2494 потребует $10^{11} \div 10^{12}$ операций, а при исследовании эргодичности и многократном умножении — примерно $10^{13} \div 10^{14}$ операций.

Таким образом, речь может идти о расчетах на суперкомпьютерах при высокой распараллеливаемости задачи, для которой здесь есть все основания.

3. Обсуждение результатов.

1. Методы отображения примитивных триангуляций в двоичные коды дают возможность в ряде случаев ($\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$) перечислять на компьютере все элементарные исходы перестроек и вычислять точно элементы матриц переходных вероятностей, с помощью которых устанавливать основные свойства мар-

ковских процессов.

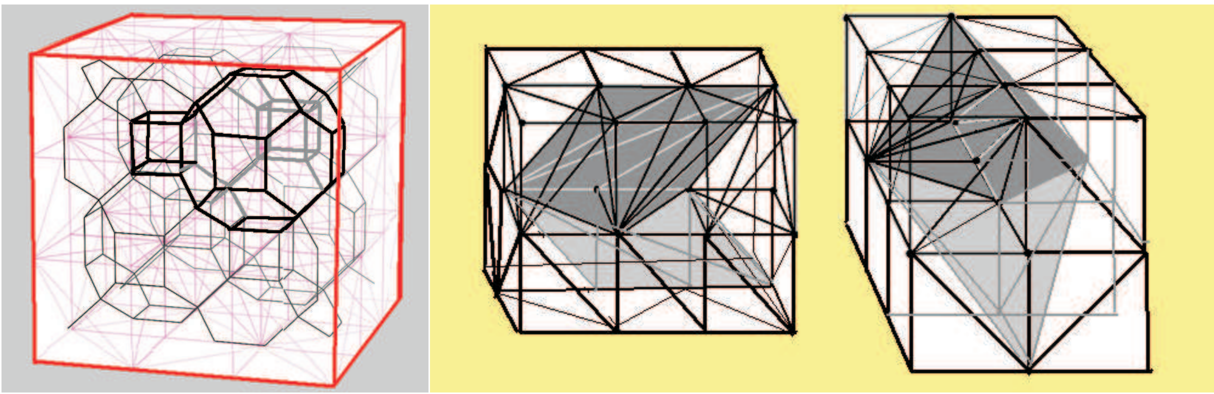
2. Примитивные триангуляции и их перестройки как марковские процессы могут быть моделью для динамики триангуляций более общего вида, в частности динамических триангуляций в квантовых моделях (3d+1)-размерной гравитации [2].

3. Анализ динамики примитивной триангуляции включен в инструментальную систему “топологический процессор” [7–11].

4. Результаты перечисления позволяют представить дуальную картину триангуляций в виде соответствующих вершинных многогранников. Пример такой дуализации для λ-вектора $(0,0,0,0,8)$ представлен на рис. 11а.

5. Предложенное кодирование дает возможность представить реальные границы применения таких методов для современных суперкомпьютеров кластерного типа. Так, для перечисления всех возможных примитивных триангуляций в кубе $\mathbf{I}^5$ подобными методами потребуется рассмотреть 280 вариантов, поскольку для $\mathbf{I}^5$ число двумерных граней равно 80. Это число вариантов примерно равно 10^{24}, что превосходит возможности современных компьютерных систем. Однако если ограничить число рассматриваемых типов до двух из $\{s_1,\ldots,s_5\}$ типов трехмерной триангуляции, то для $\mathbf{I}^5$ число всех возможных типов можно оценить как 2^N, где $N = \mathrm{C}_5^3\,2^2 = 40$, т.е. число рассматриваемых вариантов не более 10^{13}, что делает компьютерные расчеты реальными.

6. Расширение множества V_p $(p = 1,2,3,\ldots)$ при примитивных триангуляциях в $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^4$ можно рассматривать как одновременные перестройки двух или более двумерных граней вместе с их смежными ребрами (в том числе и единичными). Так, на рис. 11б показано образование симплициального комплекса с примитивными ребрами из V_2 и V_3, не затрагивающее общей триангуляции на V_1 вне параллелепипеда из $3\times2\times2$ кубов.



а) б)

Рис. 11. Дуальные многогранники для $\lambda=(0,0,0,0,8)$ (а); локальная перестройка в примитивной триангуляции в $\mathbf{R}^3$ с включением ребер из V_2 и V_3 (б)

4. Заключение. Рассмотрение марковских процессов может служить инструментом оценки статистической картины поведения при случайных перестройках в гранях примитивно триангулированных пространств $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^4$, в том числе и метрики, соответствующей кратчайшим путям по ребрам таких случайных триангуляций. Так, применение методов двоичного кодирования к представлению кратчайших путей в случайном примитивно триангулированном пространстве $\mathbf{R}^3$ позволило на суперкомпьютере СКИФ – МГУ “Чебышев” (60 терафлопс) рассчитывать метрику Хаусдорфа между подмножествами на трехмерных решетках с числом вершин 10^{10} и числом ребер $10^{13}\div10^{14}$ за десятки минут машинного времени (при параллельной работе 128 процессоров и 256 Гбайт оперативной памяти).

Автор приносит благодарность Л. Н. Королеву, А. В. Тихонравову и Б. Н. Четверушкину за внимание и обсуждение тематики работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Steingrimsson E.* Permutations statistics of indexed and poset permutations. Cambridge: MIT-Press, 1992.
2. *Negami S.* Diagonal flips of triangulations on surfaces // Yokohama Math. J. 1999. **47**. 1–40.
3. *Малышев В.А.* Вероятность вокруг квантовой гравитации: планарная гравитация // Успехи матем. наук. 1999. **54**, № 4. 3–46.

4. *Collet P., Eckman J.-P.* Dynamics of triangulations // J. of Statistical Physics. 2005. **121**, N 5. 1073–1081.
5. *Ambjorn J., Jurkevich J., Loll R.* Reconstructing the Universe // Phys. Review D **72**. 2005. Paper N 064014.
6. *Бухштабер В.М., Панов Т.Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
7. *Рябов Г.Г.* Алгоритмические основы топологического процессора // Тр. II Всероссийской научной конференции “Методы и средства обработки информации”. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005. 53–58.
8. *Рябов Г.Г., Серов В.А.* Отображения целочисленных множеств и евклидовы приближения // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 14–23.
9. *Рябов Г.Г.* О путевом кодировании k-граней в n-кубе // Вычислительные методы и программирование. 2008. **9**, № 1. 20–22.
10. *Ryabov G., Serov V.* Simplicial-lattice model and metric-topological constructions // Proc. of the IX Conf. on Pattern Recognition and Information Processing. Minsk, 2007. Vol. 2. 135–140.
11. *Рябов Г.Г., Серов В.А.* Компьютерные комбинаторно-топологические построения и их преобразования // Информационные технологии и вычислительные системы. 2008. № 2. 69–80.

Поступила в редакцию
23.11.2008