УДК 512.643

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

О. Н. Переславцева[1]

Рассматриваются алгоритмы вычисления точных значений коэффициентов характеристических полиномов матриц больших порядков. Даются рекомендации по применению этих алгоритмов в зависимости от размера матрицы. Обсуждается параллельная реализация алгоритмов. Приводятся результаты экспериментов для последовательных и параллельных вычислительных систем.

Ключевые слова: вычисление характеристического полинома, вычислительная сложность, параллельные алгоритмы.

1. Введение. Характеристические полиномы матриц впервые появляются в трудах Лапласа, Якоби и Леверье. За прошедшие полтора столетия они нашли приложения в самых разных теоретических и прикладных областях (для определения "вековых" неравенств в движении планет [1], для исследования устойчивости и качества линейных систем [2], в теории матриц [3, 5], при анализе колебательных движений [4], для вычисления собственных значений матриц и др.).

Главная трудность заключается в том, что при использовании приближенных вычислений точность вычисления коэффициентов характеристического полинома быстро уменьшается с ростом размера матриц. Одним из способов борьбы с накоплением погрешности является использование точных вычислений.

В настоящей статье рассматриваются известные точные алгоритмы вычисления характеристического полинома с точки зрения сложности алгоритмов и их практической реализации на последовательных и параллельных вычислительных системах.

Известно достаточно много различных алгоритмов для точного вычисления коэффициентов характеристического полинома матрицы. В этих алгоритмах нет операции деления с округлением, а все операции происходят в кольце, порожденном элементами исходной матрицы. Эти алгоритмы можно сравнивать как по числу кольцевых операций без учета разрядности чисел, так и по числу бит-операций с учетом роста разрядности. Первая оценка показывает эффективность алгоритма при использовании модулярных вычислений, основанных на китайской теореме об остатках (КТО), а вторая оценка показывает эффективность прямых вычислений.

Были выбраны семь точных алгоритмов вычисления характеристического полинома. Изучались теоретические оценки числа операций в этих алгоритмах. Экспериментально сравнивались их программные реализации. Исследовалась эффективность распараллеливания и экспериментально сравнивались параллельные программы.

2. Оценки количества мультипликативных операций. Для оценки количества бит-умножений в алгоритмах принята следующая вычислительная модель. При умножении двух чисел, содержащих l и m бит, получается число, содержащее $l+m$ бит; при сложении n чисел, каждое из которых содержит m бит, получается число, содержащее $\bigl(m+[\log_2 n]\bigr)$ бит, где $[\log_2 n]$ — округление к большему целому. Пусть $\varphi_n = [\log_2 n]$ и пусть коэффициенты матрицы A содержат k бит; тогда элементы матрицы A^2 содержат $2k+\varphi_n$ бит, а элементы матрицы A^t содержат $tk+(t-1)\varphi_n$ бит.

Были исследованы семь алгоритмов, для которых получена оценка числа кольцевых операций, т.е. числа операций над элементами матрицы, и оценка количества бит-умножений. Полученные значения сведены в приведенную ниже таблицу (n — порядок матрицы).

Оценки сложности в бит-операциях позволяют выбрать лучший из прямых алгоритмов вычисления коэффициентов характеристического полинома. Алгоритм Сейфуллина быстрее алгоритма Чистова в два раза и быстрее алгоритма Леверье–Фаддеева в пять раз. Количество бит-умножений в алгоритме Берковича на порядок выше, чем в алгоритмах Леверье, Леверье–Фаддеева, Сейфуллина и Чистова. Однако еще быстрее растут промежуточные результаты в алгоритме Малашонка и в новом алгоритме. Следовательно, среди рассмотренных прямых методов вычисления характеристического полинома для матриц с рациональными коэффициентами лучшим прямым алгоритмом является алгоритм Сейфуллина.

[1] Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Институт физики, математики и информатики, ул. Интернациональная, 33, 392000, Тамбов; e-mail: pereclavtseva@rambler.ru

Метод	Число кольцевых операций	Число бит-умножений
Метод Леверье [1]	$\sim 2n^4$	$\sim \dfrac{k}{2}\,(k+\varphi_n)n^5$
Метод Леверье–Фаддеева [6]	$\sim 2n^4$	$\sim \dfrac{k}{2}\,(k+\varphi_n)n^5$
Алгоритм Чистова [7]	$\sim \dfrac{2}{3}\,n^4$	$\sim \dfrac{k}{96}\,(19k+3\varphi_n)n^5$
Алгоритм Сейфуллина [8, 9]	$\sim \dfrac{1}{4}\,n^4$	$\sim \dfrac{k}{10}\,(k+\varphi_n)n^5$
Алгоритм Берковича [10]	$\sim \dfrac{1}{2}\,n^4$	$\sim \dfrac{k}{12}\,(k+\varphi_n)n^6$
Алгоритм Малашонка [11]	$\sim \dfrac{8}{3}\,n^3$	$\sim$ экспонента
Новый алгоритм [12]	$\sim \dfrac{7}{3}\,n^3$	$\sim$ экспонента

Оценки сложности в кольцевых операциях показывают, что наименьшую сложность имеет новый алгоритм: $\dfrac{7}{3}\,n^3 + O(n^2)$ операций. Следовательно, этот алгоритм должен показывать лучшее асимптотическое время вычисления характеристического полинома при использовании китайской теоремы об остатках (КТО).

3. Вычислительные эксперименты. Среди рассмотренных прямых методов вычисления характеристического полинома для матриц с рациональными коэффициентами лучшим прямым алгоритмом является алгоритм Сейфуллина, а при использовании КТО — асимптотически лучшее время имеет новый алгоритм.

Однако для модулярной арифметики можно использовать и другие методы, в которых характеристический полином вычисляется для матриц над конечными числовыми полями. Так, в работе [13] метод Данилевского [14] рекомендуется как наиболее эффективный способ точного вычисления характеристического многочлена.

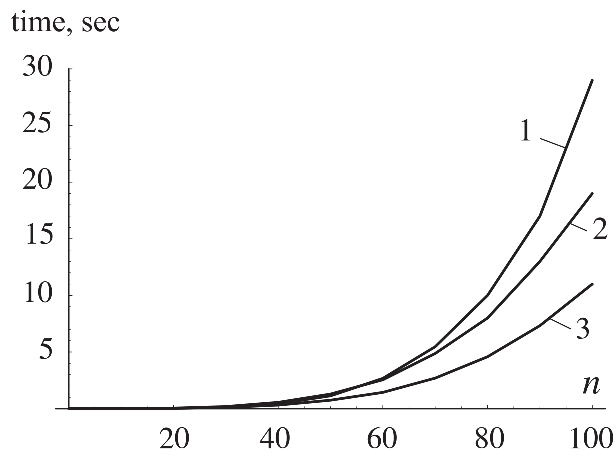

Рис. 1. Время вычисления характеристического полинома с использованием алгоритма Сейфуллина (1), нового алгоритма с применением КТО (2), алгоритма Данилевского с применением КТО (3) для $40 < n < 100$, $k = 20$ бит

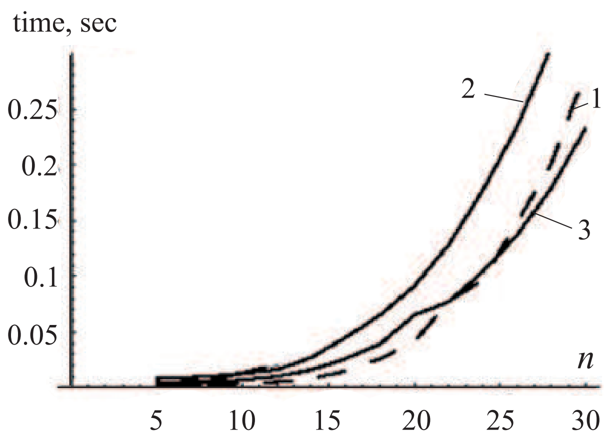

Рис. 2. Время вычисления характеристического полинома с использованием алгоритма Сейфуллина (1), нового алгоритма с применением КТО (2), алгоритма Данилевского с применением КТО (3) для $5 < n < 30$, $k = 50$ бит

Метод Данилевского требует выполнения $2n^3 + O(n^2)$ операций над элементами матриц над полем. Используя его в сочетании с КТО, можно получить асимптотически лучший алгоритм для вычисления характеристического полинома. Он будет лучшим для вычисления характеристического полинома при использовании КТО и будет быстрее алгоритма [12] в 7/6 раз.

Были разработаны программы [15], реализующие следующие алгоритмы:

1) алгоритм Сейфуллина,

2) новый алгоритм [12] с применением КТО,

3) алгоритм Данилевского с применением КТО.

В экспериментах использовались плотные матрицы над целыми числами длиной 20 бит и 50 бит, которые выбирались случайным образом. Порядок n матриц менялся в пределах от 10 до 350. Кривые, характеризующие время вычисления характеристического полинома, представлены на рис. 1 и 2.

Алгоритм Данилевского с применением КТО выигрывает для $k = 20$ при $n > 30$ у остальных рассматриваемых алгоритмов. Например, при $n = 50$ он быстрее в 1,7 раза алгоритма [12] с применением КТО, в 1,5 раза алгоритма Сейфуллина; при $n = 100$ — в 1,7 и в 2,6 раза соответственно; при $n = 200$ — в 1,6 и в 4,4 раза соответственно; при $n = 300$ — в 1,6 и в 6 раз соответственно.

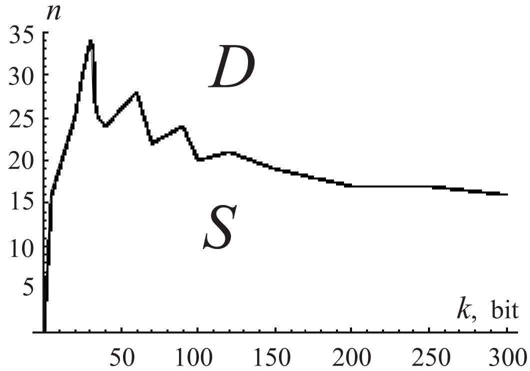

Рис. 3. Граничная линия, разделяющая плоскость на две области S и D, k — разрядность коэффициентов матрицы, n — порядок матрицы

Экспериментально была получена кривая, которая разбивает плоскость с координатами k и n, где k — разрядность коэффициентов матрицы и n — порядок матрицы, на две области S и D. В области S под линией лежат матрицы, для которых время вычисления алгоритма Сейфуллина меньше, чем время вычисления алгоритма Данилевского с применением КТО. Область D над линией — это область, где лежат матрицы, для которых время вычисления алгоритма Данилевского с применением КТО меньше, чем время вычисления алгоритма Сейфуллина. Эта кривая и области S и D изображены на рис. 3. Из графика видно, что с ростом разрядности растет преимущество алгоритма Данилевского с применением КТО.

Отдельный интерес представляет вопрос сравнения этих алгоритмов с теми, которые реализованы в системах Mathematica 5.1 и Maple 9.5. Алгоритм Данилевского с применением КТО вычисляет характеристический полином быстрее, чем Maple 9.5 и Mathematica 5.1. Так, например, для $n = 50$ Mathematica 5.1 проигрывает в 5,95 раза алгоритму Данилевского с применением КТО, а Maple 9.5 проигрывает в 11,53 раза. Для $n = 100$ алгоритм Данилевского с применением КТО быстрее, чем Mathematica 5.1 в 13,1 раза и Maple 9.5 — в 13,8 раза, а для $n = 200$ — в 26 и 16,43 раза соответственно.

Как видно из рис. 3, при $n > 35$ предпочтительнее алгоритм Данилевского с применением КТО, а для матриц, у которых $n < 15$, преимущество имеет алгоритм Сейфуллина.

4. Параллельная реализация алгоритмов. Для алгоритма Данилевского и нового алгоритма с применением КТО были написаны параллельные программы [16]. Был использован естественный параллелизм, который предполагает модулярная арифметика. Вычисление характеристического полинома по каждому простому модулю происходит независимо и параллельно.

Ниже приведены результаты экспериментов, в которых использовались матрицы малой разрядности (7 бит), поскольку в этом случае можно было быстро получить результаты большого числа экспериментов и сравнить алгоритмы при разных размерах матриц. Это не означает, что появляются трудности, если входные данные имеют большую разрядность. Например, на 16-процессорном кластере Тамбовского государственного университета (ТГУ) характеристический полином матрицы размера 500×500 над числами длиной 100 бит с помощью алгоритма Данилевского с применением КТО вычисляется за 34 минуты.

Для экспериментов, кроме графиков зависимости времени вычисления от количества процессоров nProc, приведены графики ускорения (рис. 5 и 7). Ускорение откладывается на оси ординат. Для эксперимента на кластере Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН под ускорением, достигаемым на nProc процессорах, понимается отношение времени вычисления на $m = 16$ процессорах к времени вычисления на nProc процессорах (рис. 5). Для эксперимента на кластере ТГУ было выбрано $m = 2$ (рис. 7). Ускорение можно измерять в процентах. Для этого ускорение следует умножить на $100\,\frac{m}{n}$. На рис. 5 и 7 приведены дополнительно две прямые линии: верхняя линия соответствует ускорению 100 %, нижняя линия соответствует ускорению 50 %.

Эксперимент 1 проводился на кластере Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН. В этом эксперименте использовались плотные матрицы размера 1000×1000. Количество процессоров менялось

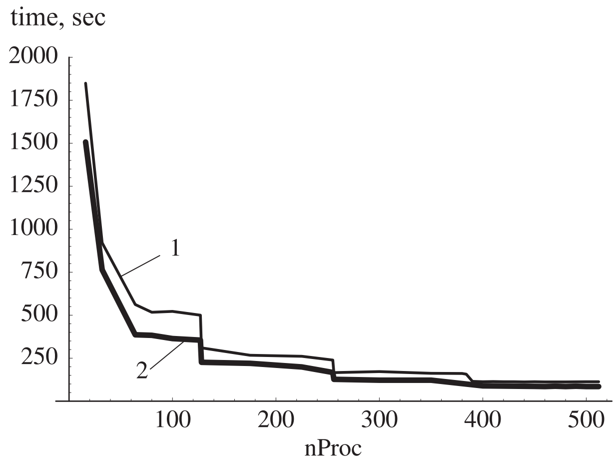

Рис. 4. Время вычисления характеристического полинома с использованием нового алгоритма с применением КТО (1) и алгоритма Данилевского с применением КТО (2) для матриц размера 1000×1000

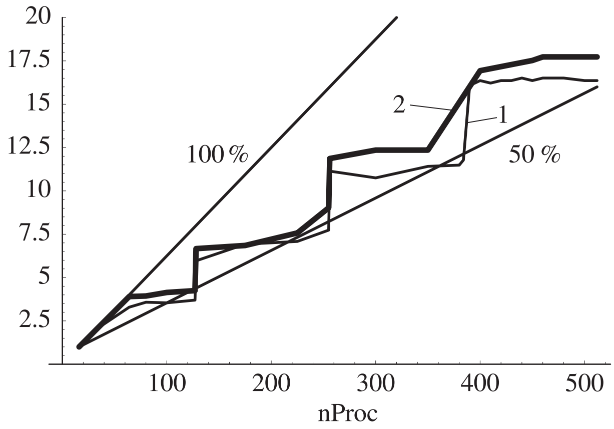

Рис. 5. Ускорение вычислений по сравнению с вычислениями на 16 процессорах для нового алгоритма с применением КТО (1) и для алгоритма Данилевского с применением КТО (2), $n = 1000$, $k = 7$ бит

от 16 до 512. Результаты экспериментов приведены на рис. 4 и 5.

Как видно из рис. 4, график зависимости времени вычисления от количества процессоров носит ступенчатый характер. Скачкообразное уменьшение времени вычисления наблюдается, когда количество процессоров кратно 2^p, где p — натуральное число.

Эксперимент 2 проводился на кластере из 16 процессоров Intel Xeon 3 ГГц, 1 Гб, установленном в лаборатории алгебраических вычислений ТГУ. В экспериментах использовались плотные матрицы размера 400×400 над 20-разрядными числами. График зависимости времени от количества процессоров приведен на рис. 6. Графики ускорения вычислений с ростом числа процессоров для двух рассматриваемых методов практически совпали (рис. 7).

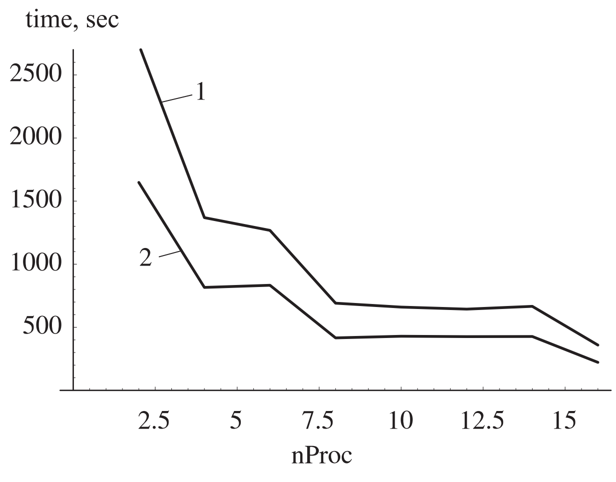

Рис. 6. Время вычисления характеристического полинома с использованием нового алгоритма с применением КТО (1) и алгоритма Данилевского с применением КТО (2), $n = 400$, $k = 20$ бит

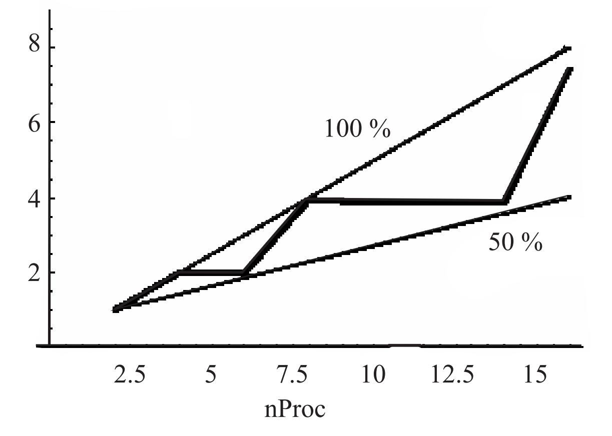

Рис. 7. Ускорение вычислений по сравнению с вычислениями на двух процессорах для нового алгоритма с применением КТО и для алгоритма Данилевского с применением КТО, $n = 400$, $k = 20$ бит

Как показывают эксперименты, результаты которых приведены на рис. 7, ускорение находится в пределах от 50 % до 98 %. Наилучшее ускорение достигается, если количество процессоров является степенью числа 2. Для эксперимента 1 ускорение составило 75 %, а для эксперимента 2 — 94 %. В эксперименте 1 разрядность чисел составляла 7 бит, в эксперименте 2 — 20 бит. Надо предполагать, что с ростом разрядности ускорение приближается к 100 %.

5. Заключение. Полученные выражения для сложности алгоритмов вычисления коэффициентов характеристических полиномов показывают, что среди прямых алгоритмов наилучшим является алгоритм Сейфуллина. Если применять модулярные (КТО) вычисления, то лучшими алгоритмами становятся алгоритм Данилевского и новый алгоритм. Эксперименты показали, что для матриц 35-го порядка и больше выигрывает алгоритм Данилевского, для матриц 15-го порядка и меньше — алгоритм Сейфуллина, а в интервале 15 – 35 надо учитывать разрядность коэффициентов матрицы — с ростом разрядности преимущество растет у алгоритма Данилевского.

Параллельная реализация алгоритмов позволяет решать задачи с большими данными. Поэтому важно эффективно распараллелить алгоритм. Алгоритм Данилевского с применением КТО распараллелен по отдельным модулям. Граф алгоритма представлен в виде бинарного дерева. Поэтому выгодно использовать параллельную машину на 2^p процессорах. Действительно, эксперименты показали, что при переходе от 2^p к 2^{p+1} процессорам ускорение вычислений наибольшее и составляет от 75 % до 94 %. Кроме того, чем больше разрядность коэффициентов исходной матрицы, тем выше ускорение. Например, если длина коэффициентов $k = 7$ бит, то ускорение составляет 75 %, а при $k = 20$ бит — 94 %.

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют дать следующие рекомендации.

Для *однопроцессорных* машин будет иметь преимущество алгоритм Сейфуллина, когда размер матрицы меньше 15 или когда порядок матрицы меньше 25 и при этом разрядность элементов меньше 100 бит. В остальных случаях преимущество имеет алгоритм Данилевского с применением КТО.

Для *многопроцессорных* машин преимущество всегда имеет алгоритм Данилевского. Как показали эксперименты, ускорение вычислений составляет от 50 % до 95 % при большом количестве процессоров в кластере и большом размере матрицы. Наилучшие результаты достигаются, когда количество процессоров равно степени числа 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Verrier U.J.J.* Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planétes principales: Mercure, Venus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus // J. de Mathématiques Pures et Appliquees. 1840. N 4. 220–254.
2. *Воронов В.С.* Показатели устойчивости и качества робастных систем управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 6. 49–54.
3. *Robuk V.N.* A constructive formula for function of matrix. Alternative to the Lagrange–Silvester formula // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. 2004. **A 534**. 319–323.
4. *Крылов А.Н.* О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. Собрание сочинений. Т. 5. М.: Изд-во АН СССР, 1937.
5. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Л.: Физматлит, 1963.
7. *Chistov A.L.* Fast parallel calculation of the rank of matrices over a field of arbitrary characteristic // Proc. FCT'85. Springer Lecture Notes in Computer Science. Volume 199. Berlin: Springer, 1985. 147–150.
8. *Сейфуллин Т.Р.* Вычисление определителя, присоединенной матрицы и характеристического полинома без деления // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 5. 18–42.
9. *Переславцева О.Н.* Об оценке коэффициентов характеристического полинома // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. “Естественные и технические науки”. 2008. **13**, вып. 1. 124–126.
10. *Berkowitz S.J.* On computing the determinant in small parallel time using a small number of processors // Information Processing Letters. 1984. **18**. 147–150.
11. *Малашонок Г.И.* A computation of the characteristic polynomial of an endomorphism of a free module // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1999. **258**. 101–114.
12. *Переславцева О.Н.* Метод вычисления характеристического полинома матрицы // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. “Естественные и технические науки”. 2008. **13**, вып. 1. 131–133.
13. *Икрамов Х.Д.* О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре // Программирование. 1994. № 1. 56–69.
14. *Данилевский А.М.* О численном решении векового уравнения // Матем. сб. 1937. **2(44)**, № 1. 169–172.
15. *Переславцева О.Н.* Вычислительные эксперименты с алгоритмами вычисления характеристических полиномов матриц // Вестник Тамбовского ун-та. Сер. “Естественные и технические науки”. 2007. **12**, вып. 1. 126–128.
16. *Переславцева О.Н.* Вычисление характеристического полинома в кольце целых чисел // Proc. Int. Conf. on Polynomial Computer Algebra. Санкт-Петербург, 2008. 57–61.

Поступила в редакцию
07.07.2008