УДК 539.376:001.891.573

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ИМЕЮЩИХ РАЗНЫЕ СВОЙСТВА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

С. Н. Коробейников[1], А. И. Олейников[2], Б. В. Горев[1], К. С. Бормотин[2]

Предложен алгоритм численного решения задач ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. Пространственная дискретизация нелинейных уравнений механики деформируемого твердого тела осуществляется методом конечных элементов. Для решения трехмерных задач используются восьмиузловые изопараметрические конечные элементы с трилинейной аппроксимацией геометрии и перемещений по их значениям в узловых точках элемента. Пространственная дискретизация уравнений сочетается с шаговой процедурой интегрирования по времени уравнений квазистатического деформирования с итерационным уточнением решения на каждом дискретном моменте времени. Представлен алгоритм определения компонент тензора напряжений для определяющих соотношений ползучести с учетом разных свойств материала при растяжении и сжатии. Этот алгоритм реализован в новой модели материала пакета PIONER и в подпрограмме crplaw.f, предназначенной для введения пользователем в пакет MSC.Marc 2005 новых моделей ползучести. Решены задачи о кручении в условиях ползучести металлических пластин под действием постоянных сосредоточенных сил, приложенных в ее углах. Проведены сравнения полученных численных решений с данными натурного эксперимента. Показано, что новая модель материала позволяет добиться большего соответствия расчетов и данных эксперимента по сравнению с использованием стандартных моделей материала (с одинаковыми свойствами при растяжении и сжатии), имеющихся в библиотеках материалов пакетов PIONER и MSC.Marc 2005. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 05–08–01395, 07–01–00747, 07–01–12043) и программы № 4.12.2 фундаментальных исследований РАН на 2008 г.

Ключевые слова: математическое моделирование, ползучесть, метод конечных элементов.

Введение. Свойство ползучести материала, проявляющееся в деформировании конструкций из этого материала под действием постоянных приложенных сил, используется в технологических процессах для изготовления изделий с остаточными напряжениями, имеющими небольшой уровень по сравнению с аналогичными изделиями, изготовленными по стандартной методике деформирования изделий в режиме упругопластичности. Определяющие соотношения (т.е. соотношения между компонентами тензоров напряжений, деформаций и/или их скоростей) ползучести материалов, обладающих одинаковыми характеристиками при растяжении и сжатии, даны, например, в монографиях [1 – 4]. Основы математического моделирования процесса формообразования в режиме ползучести изделий из материалов, обладающих одинаковыми характеристиками при растяжении и сжатии, представлены, например, в [5 – 9]. Тем не менее, экспериментальные исследования показывают [10], что в ряде случаев в режиме ползучести происходит деформирование изделий, материал которых обладает разными характеристиками растяжения и сжатия.

Целью настоящего исследования является разработка определяющих соотношений ползучести металлических изделий, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии, алгоритмов численного решения задач ползучести такого класса и вычислительных программ, реализующих эти алгоритмы. Отправной точкой при разработке определяющих соотношений ползучести рассматриваемого класса материалов являлись теоретические исследования, представленные в [11].

При численном решении трехмерных задач квазистатического деформирования тел в режиме ползучести требуется проводить как пространственную дискретизацию уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ), так и дискретизацию этих уравнений по времени. В настоящее время наиболее универсальным методом аппроксимации уравнений по пространственным координатам для областей

[1] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. акад. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск; e-mail: S.N.Korobeynikov@mail.ru.

[2] Государственный технический университет, авиастроительный факультет, пр. Ленина, 27, 631013, г. Комсомольск-на-Амуре; e-mail: cvmi@knastu.ru.

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

произвольной формы является метод конечных элементов (МКЭ). Теоретические основы решения нелинейных задач МДТТ с использованием МКЭ представлены, например, в [5 – 9, 12]. Фактически, МКЭ представляет собой вариант метода Бубнова–Галеркина со специальными базисными функциями, имеющими финитные носители только в локальных подобластях исследуемой области — конечных элементах. Из большого набора известных конечных элементов [13] наиболее подходящими для решения трехмерных задач, рассматриваемых в настоящем исследовании, представляются восьмиузловые гексагональные изопараметрические элементы, которые и используются в настоящей работе. Для определения эволюции деформирования тел во времени в квазистатических процессах наиболее универсальным методом является пошаговое интегрирование уравнений МДТТ по явной схеме Эйлера с дальнейшим уточнением решения итерационной процедурой метода Ньютона–Рафсона (или его модификаций) [5 – 9, 12]. Этот метод интегрирования уравнений МДТТ по времени используется в настоящей работе.

Так как МКЭ основан на слабой форме дифференциальных уравнений, то при определении матриц и векторов разрешающей системы алгебраических уравнений требуется вычислить интегралы по подобласти, принадлежащей конечному элементу. Для этого надо определить компоненты тензора напряжений в конечном числе точек элемента — точках интегрирования по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра. В настоящей работе представлены алгоритмы вычисления компонент тензора напряжений при развитии процесса во времени с использованием определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. Эти алгоритмы вычисления компонент тензора напряжений реализованы в пакетах MSC.Marc 2005 [9] и PIONER [14]. Пакет MSC.Marc 2005 допускает введение новых моделей материалов через специальные FORTRAN-подпрограммы, представленные для наполнения их содержания пользователями (user's subroutines) [16]. Одна из них (crplaw.f) и была использована для введения в пакет MSC.Marc 2005 определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии.

В [10] представлены данные натурных экспериментов по кручению квадратной пластинки в режиме ползучести постоянными сосредоточенными силами, приложенными в углах. Там же определены механические константы алюминиевого сплава АК4-1Т, имеющего при ползучести разные свойства при растяжении и сжатии. Эти константы использованы в настоящей работе для математического моделирования процесса ползучести пластины при ее кручении. Проведены расчеты как с использованием стандартных соотношений ползучести (при этом рассматривались либо только константы материала, полученные при одноосном деформировании образцов при сжатии, либо — при растяжении), так и с использованием определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. Использование последних соотношений позволяет сблизить теоретические результаты с экспериментальными по сравнению с использованием стандартных соотношений ползучести.

Расчеты по разным пакетам дают близкие решения, что позволяет сделать заключение о достаточной надежности используемого математического обеспечения.

1. Уравнения квазистатического движения твердых тел с учетом деформаций ползучести. Основы численных методов решения нелинейных задач МДТТ даны, например, в [5 – 9, 12]. Кратко представим уравнения и алгоритмы численного решения квазистатических задач, требуемые для математического моделирования деформирования металлических изделий в режиме ползучести.

1.1. Уравнения квазистатического деформирования твердых тел в геометрически линейной постановке. Приведем полную систему уравнений МДТТ, описывающую деформирование тела в предположении малости деформаций, поворотов и перемещений (в то же время допускаются большие трансляционные перемещения тела как жесткого целого). Формулировку уравнений в условиях этих предположений принято называть MNO (Material Nonlinear Only) формулировкой [5, 8].

1. Уравнения равновесия в слабой форме (уравнения принципа возможных перемещений, или уравнения баланса виртуальных работ) имеют вид

$$\int\limits_V \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\epsilon}\, dV = \int\limits_V \rho \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dV + \int\limits_{S_T} \boldsymbol{T}^* \cdot \delta\boldsymbol{u}\, dS + \widehat{R}_c \quad \forall\, \delta\boldsymbol{u} \quad (\delta\boldsymbol{u} = 0 \text{ на } S_u). \tag{1}$$

Здесь и далее: $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ — симметричные тензоры напряжений и деформаций Коши соответственно; $\boldsymbol{u}$ — вектор перемещений; $\boldsymbol{f}$ — вектор массовых сил (сил, действующих на единицу массы тела); V — область, занимаемая телом в отсчетной конфигурации; S — замкнутая поверхность, ограничивающая область V; S_u, S_T — части поверхности $S = S_u \cup S_T$ ($S_u \cap S_T = \emptyset$), на которых заданы векторы перемещений $\boldsymbol{u}$ и напряжений $\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{N}$ соответственно ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ на S_u, $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}^*$ на S_T); $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S_T; ρ — массовая плотность материала в отсчетной конфигурации; символ "$*$" обозначает заданную величину; точка между тензорами и/или векторами обозначает операцию их внутреннего произведения (свертки по одному индексу); знак “:” между тензорами обозначает операцию их двойного внутреннего произведения (свертки по двум индексам); знак “δ” обозначает вариацию, так что $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ на S_u (граничные условия на S_u являются главными, а на S_T — естественными); $\widehat{R}_c$ — виртуальная работа сосредоточенных сил R_i^k ($i \in [1,2,3]$, $k = \overline{1,K_c}$), определяемая формулой $\widehat{R}_c = \sum\limits_{k=1}^{K_c} R_i^k \delta u_i^k$ (не суммировать по i), которую вводим непосредственно в слабую форму уравнений равновесия (1) (K_c — общее число сосредоточенных сил).

2. Кинематические соотношения (связь тензора деформаций Коши с тензором градиента перемещений) имеют вид $\boldsymbol{\epsilon} = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla u}+\boldsymbol{\nabla u}^{\mathrm{T}}\right)$, где $\boldsymbol{\nabla u}$ — тензор градиента перемещений ($\boldsymbol{\nabla}$ обозначает набла-вектор, определяемый по отношению к начальной конфигурации тела [8]); здесь и далее символ “T” обозначает операцию транспонирования.

3. Определяющие соотношения физически нелинейной среды, записанные в скоростях, для достаточно широкого класса материалов, включающих и материалы, обладающие свойствами ползучести, имеют следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\phi}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{C}$ — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений и деформаций (и, возможно, от их скоростей) и от внутренних параметров, а также обладают симметриями вида $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$, где C_{ijkl} — компоненты тензора $\boldsymbol{C}$ в декартовой системе координат (здесь и далее компоненты тензоров и векторов пробегают значения $1,2,3$); $\boldsymbol{\phi}$ — тензор второго ранга, характеризующий неоднородную составляющую закона (2), компоненты которого в общем случае зависят от компонент тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$; здесь и далее точка над величиной обозначает частную производную этой величины по времени t.

Отметим, что ряд стандартных определяющих соотношений записывается в виде (2). Например, для упругих и упругопластических материалов тензор $\boldsymbol{\phi}$ надо приравнять к нулевому тензору. Определяющие соотношения для упругого материала, учитывающие деформации ползучести, которые можно записать в виде (2), приведены в п. 3 настоящей работы.

1.2. Уравнения квазистатического деформирования твердых тел в геометрически нелинейной постановке. При больших деформациях, перемещениях и поворотах вместо уравнений, представленных в п. 1.1, надо использовать геометрически нелинейные уравнения МДТТ. При учете геометрической нелинейности различают две формулировки уравнений МДТТ: TL (Total Lagrangian) и UL (Updated Lagrangian) [5, 8]. Различие в этих двух формулировках уравнений состоит в выборе отсчетной конфигурации деформируемого тела: в первом случае (для TL-формулировки) в качестве отсчетной конфигурации выбирается начальная конфигурация тела, а во втором случае (для UL-формулировки) — текущая (деформированная) конфигурация тела. Для тонкостенных конструкций (пластин), подвергающихся преимущественно изгибу, характерно деформирование в условиях малых деформаций (но повороты и перемещения могут быть большими). Для такого вида деформирования из этих двух формулировок уравнений выгоднее использовать TL-формулировку уравнений МДТТ, а в качестве тензоров напряжений и деформаций — второй тензор напряжений Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{S}$ и тензор деформации Грина–Лагранжа $\boldsymbol{E}$, которые образуют пару сопряженных по мощности внутренних сил тензоров напряжений и деформаций [8]. Приведем полную систему уравнений, описывающую деформирование тела с физической и геометрической нелинейностями в оговоренных выше предположениях.

1. Уравнения равновесия в слабой форме (уравнения принципа возможных перемещений, или уравнения баланса виртуальных работ) имеют вид

$$\int\limits_V \boldsymbol{S} : \delta\boldsymbol{E}\, dV = \int\limits_V \rho\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\, dV + \int\limits_{S_T} \boldsymbol{T}^*\cdot\delta\boldsymbol{u}\, dS + \widehat{R}_c \quad \forall\,\delta\boldsymbol{u} \quad (\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ на } S_u) \tag{3}$$

с граничными условиями $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ на S_u и $\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\nabla u}) = \boldsymbol{T}^*$ на S_T. Здесь $\boldsymbol{S} \equiv J\,\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{g} + \boldsymbol{\nabla u}^{\mathrm{T}}$, $J \equiv \det\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{g}$ — единичный тензор.

2. Кинематические соотношения имеют вид $\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla u}+\boldsymbol{\nabla u}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\nabla u}\cdot\boldsymbol{\nabla u}^{\mathrm{T}}\right)$.

3. Определяющие соотношения с учетом геометрической и физической нелинейностей, являющиеся обобщением определяющих соотношений (2) при учете геометрической нелинейности, записываются в виде $\dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{C} : \dot{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{\Phi}$. Здесь $\boldsymbol{\Phi}$ — тензор второго ранга, компоненты которого в общем случае могут зависеть от компонент второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{S}$ и тензора деформаций Грина–Лагранжа $\boldsymbol{E}$.

Отметим, что пара тензоров напряжений и деформаций $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$ является сопряженной по отношению к мощности внутренних сил w, отнесенной к единице объема деформируемого тела в отсчетной конфигурации, т.е. справедливо равенство $w=\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{E}}$ [8]. Тензоры $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{E}$ при малых деформациях тела (но возможных больших перемещениях и поворотах) имеют простую интерпретацию [5, 8]: компоненты этих тензоров приближенно равны компонентам тензоров $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}$, полученных из тензоров напряжений и деформаций Коши $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\epsilon}$ преобразованием поворота (этот поворот совершает материальная частица при деформировании тела). Поэтому при малых деформациях тела учет больших поворотов в определяющих соотношениях происходит автоматически заменой пары тензоров $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\epsilon})$ на пару тензоров $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{E})$.

2. Уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях. Для дальнейшего применения пошаговой процедуры интегрирования уравнений МДТТ по времени требуется из уравнений, представленных в п. 1, получить уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях. Считаем шаг по времени Δt достаточно малым. Предполагаем, что в момент времени t все искомые величины определены, т.е. уравнения (1) и (3) выполнены тождественно. Зависимость исследуемых функций от времени показываем далее левым верхним индексом, например, величины ${}^{t}\boldsymbol{\sigma}$ и ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ обозначают тензор напряжений Коши, определенный в моменты времени t и $t+\Delta t$ соответственно. Здесь и далее знак Δ перед величиной означает ее приращение с момента времени t к моменту времени $t+\Delta t$, например $\Delta\boldsymbol{\sigma}\equiv{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}-{}^{t}\boldsymbol{\sigma},\ \Delta\boldsymbol{\epsilon}\equiv{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}-{}^{t}\boldsymbol{\epsilon}$.

2.1. Геометрически линейная формулировка уравнений. Рассматривая уравнение (1) в момент времени $t+\Delta t$ и вычитая из обеих частей этого уравнения член $\int\limits_V {}^{\mathrm t}\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\epsilon}\,dV$, получаем

$$\int\limits_V \Delta\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\epsilon}\,dV=\int\limits_V \rho\,{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV+\int\limits_{S_T}{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{T}^{*}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS+{}^{t+\Delta t}\widehat{R}_c-\int\limits_V {}^{t}\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\epsilon}\,dV\quad\forall\delta\boldsymbol{u}\ (\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\ \text{на}\ S_u).\tag{4}$$

Линеаризуя определяющие соотношения (2) относительно момента времени t, имеем

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}={}^{t}\boldsymbol{C}:\Delta\boldsymbol{\epsilon}+{}^{t}\boldsymbol{\phi}\,\Delta t.\tag{5}$$

Подставляя выражение для $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ из (5) в левую часть равенства (4), получаем линеаризованное уравнение принципа возможных перемещений, записанное в приращениях: для всех $\delta\boldsymbol{u}$ ($\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ на S_u):

$$\int\limits_V \delta\boldsymbol{\epsilon}:{}^{t}\boldsymbol{C}:\Delta\boldsymbol{\epsilon}\,dV=\int\limits_V \rho\,{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV+\int\limits_{S_T}{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{T}^{*}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS+{}^{t+\Delta t}\widehat{R}_c-\int\limits_V ({}^{t}\boldsymbol{\sigma}+{}^{t}\boldsymbol{\phi}\,\Delta t):\delta\boldsymbol{\epsilon}\,dV.\tag{6}$$

2.2. Геометрически нелинейная формулировка уравнений. Действуя по схеме, представленной в п. 2.1, получаем после некоторых преобразований скалярное линеаризованное уравнение [5, 8]

$$\begin{gathered}\int\limits_V \delta\boldsymbol{e}:{}^{t}\boldsymbol{C}:\boldsymbol{e}\,dV+\frac{1}{2}\int\limits_V {}^{t}\boldsymbol{S}:\delta\big[\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm T}\big]\,dV=\\ =\int\limits_V \rho\,{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{f}\cdot\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}\,dV+\int\limits_{S_T}{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{T}^{*}\cdot\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}\,dS+{}^{t+\Delta t}\widehat{R}_c-\int\limits_V({}^{t}\boldsymbol{S}+{}^{t}\boldsymbol{\Phi}\,\Delta t):\delta\boldsymbol{e}\,dV\quad\forall\ \delta\widetilde{\boldsymbol{u}}\ (\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}\ \text{на}\ S_u).\end{gathered}\tag{7}$$

Здесь $\widetilde{\boldsymbol{u}}\equiv\Delta\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{e}\equiv\dfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm T}+\boldsymbol{\nabla}\,{}^{t}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm T}+\boldsymbol{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,{}^{t}\boldsymbol{u}^{\mathrm T})$.

3. Определяющие соотношения упругого материала, учитывающего деформации ползучести с разными характеристиками растяжения и сжатия. Для первоначально изотропного упругого материала определяющие соотношения, учитывающие деформацию ползучести для MNO-формулировки уравнений МДТТ, можно записать в виде (см., например, [8])

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{C}^{E}:(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}-\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{c}),\tag{8}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}^{c}$ — тензор деформаций ползучести, скорость изменения которого $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{c}$ зависит в общем случае от компонент тензоров напряжений и деформаций, а также от естественного времени t. Эта зависимость для каждого материала устанавливается на основе экспериментальных данных. Тензор четвертого ранга $\boldsymbol{C}^{E}$ (тензор упругости) не зависит от времени t, но кусочно-постоянным образом компоненты этого тензора могут зависеть от пространственных координат через параметры Ламе λ и μ, которые можно представить через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν следующим образом: $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ и $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$. В декартовой системе координат компоненты тензора $\boldsymbol{C}^E$ имеют вид

$$C^E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{9}$$

где δ_{ij} — дельта-функция Кронекера. Из (9) получаем

$$\boldsymbol{C}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \lambda(\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\epsilon}})\boldsymbol{g} + 2\mu\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{C}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = 2\mu\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c. \tag{10}$$

Член $\lambda(\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c)\boldsymbol{g}$ равен нулю вследствие предположения о несжимаемости деформаций ползучести, т.е. предположения о выполнении равенства $\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = 0$. Это предположение является стандартным при записи определяющих соотношений ползучести металлов, оно основано на данных экспериментов.

Используя вторую формулу в соотношениях (10), приходим к записи определяющих соотношений (8) в виде (2): $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}^E : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - 2\mu\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$, которая получается при отождествлениях

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^E, \quad \boldsymbol{\phi} = -2\mu\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c. \tag{11}$$

Данные экспериментов обнаруживают соосность (т.е. совпадение главных направлений) скорости тензора деформаций ползучести $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ и тензора-девиатора напряжений, который определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{g}. \tag{12}$$

Общая функциональная зависимость соосных тензоров $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ и $\boldsymbol{s}$ имеет вид (см. [11, 15])

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = a\boldsymbol{s} + b\boldsymbol{s}^2 + c\boldsymbol{g}, \tag{13}$$

где a, b, c — скалярные функции компонент тензора-девиатора напряжений $\boldsymbol{s}$. Для изотропной среды эти функции являются функциями второго и третьего главных инвариантов тензора $\boldsymbol{s}$:

$$I_2(\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{s}^2), \quad I_3(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{s}^3).$$

Первый инвариант $I_1(\boldsymbol{s}) = \operatorname{tr}\boldsymbol{s}$ равен нулю в силу определения тензора-девиатора $\boldsymbol{s}$ в (12). Вместо двух независимых инвариантов $I_2(\boldsymbol{s})$ и $I_3(\boldsymbol{s})$ введем два других независимых инварианта тензора $\boldsymbol{s}$, имеющих ясный механический смысл: эффективное напряжение σ_e и угол напряженного состояния θ.

Эффективное напряжение σ_e определяется следующим образом: $\sigma_e \equiv \sqrt{\dfrac{3}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{s}^2)} = \sqrt{\dfrac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Эффективное напряжение в коммерческих конечно-элементных пакетах [9] принято называть “equivalent von Mises stress”. Последнее название связано с тем, что величина σ_e определяет наличие пластического течения в критерии текучести Хубера–Мизеса. При одноосном деформировании ($\sigma_{11} \neq 0$, остальные компоненты равны нулю) имеем

$$\sigma_e = |\sigma_{11}|. \tag{14}$$

Введем угол напряженного состояния θ, такой, что

$$\sin 3\theta = -\frac{27}{2}\,\frac{I_3(\boldsymbol{s})}{\sigma_e^3} = -\frac{9}{2}\,\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{s}^3)}{\sigma_e^3} = -\frac{9}{2}\,\frac{s_{kn}s_{nl}s_{lk}}{\sigma_e^3}. \tag{15}$$

При упорядочивании главных значений тензора-девиатора напряжений s_1, s_2, s_3 так, что справедливы неравенства $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$, этот угол изменяется в пределах $-\dfrac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}$. При этом крайние положения угла ($\theta = \pm\pi/6$) соответствуют одноосному деформированию, так что $\theta = -\pi/6$ при чистом сжатии ($\sigma_{11} < 0$, остальные компоненты равны нулю), а $\theta = \pi/6$ при чистом растяжении ($\sigma_{11} > 0$, остальные компоненты равны нулю); среднее положение ($\theta = 0$) соответствует чистому сдвигу ($\sigma_{12} \neq 0$, остальные компоненты равны нулю).

Таким образом, для изотропной среды общую функциональную зависимость (13) можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = a(\sigma_e,\theta)\boldsymbol{s} + b(\sigma_e,\theta)\boldsymbol{s}^2 + c(\sigma_e,\theta)\boldsymbol{g}. \tag{16}$$

Рассмотрим частный случай общей связи (16):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \gamma\, \boldsymbol{s}. \tag{17}$$

В общем случае скалярная величина γ может зависеть как от эффективного напряжения σ_e, так и от угла вида напряженного состояния θ, т. е. $\gamma = \gamma(\sigma_e, \theta)$. Для описания установившейся стадии ползучести обычно используется закон Нортона [9, 10], который имеет вид (17), но скаляр γ в этом законе зависит только от эффективного напряжения σ_e; эта зависимость имеет следующий вид:

$$\gamma(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2}\, B\sigma_e^{n-1}. \tag{18}$$

Здесь B и n — константы ползучести, определяемые в экспериментах на одноосное растяжение/сжатие. Закон Нортона (17), (18) принадлежит к ассоциированным законам ползучести [11], так как допускает потенциальную запись вида

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \frac{\partial \Phi_e(\sigma_e)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\epsilon}^c_{ij} = \frac{\partial \Phi_e(\sigma_e)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Phi_e(\sigma_e) \equiv \frac{B}{n+1}\, \sigma_e^{n+1}. \tag{19}$$

Так как σ_e не “чувствует” изменения знака σ_{11} (см. (14)) при одноосном деформировании, то закон Нортона (18) применим только для материалов, имеющих одни и те же значения констант B и n при растяжении и сжатии. Таким образом, закон Нортона неприменим при построении определяющих соотношений, описывающих произвольные пути деформирования изотропных сред, имеющих разные характеристики материала в стадии установившейся ползучести при чистых растяжении и сжатии. Для таких сред в соотношениях вида (16) коэффициенты a, b, c должны зависеть от угла вида напряженного состояния θ.

Получим законы установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при растяжении и сжатии, которые должны удовлетворять следующим двум требованиям:

(i) при чистых растяжении и сжатии они должны иметь вид закона Нортона (но для каждого из этих видов деформирования константы ползучести B и n могут принимать разные значения, соответствующие данным эксперимента);

(ii) они должны совпадать с законом Нортона, если константы ползучести B и n при чистых растяжении и сжатии одинаковы.

Законы ползучести, удовлетворяющие этим требованиям, можно назвать обобщенными законами Нортона установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные характеристики при растяжении и сжатии. Следуя [11], рассмотрим два типа законов ползучести, имеющих вид соотношений (16) и (17).

Тип 1. Ассоциированный закон ползучести. Для такого закона ползучести предполагается, что существует потенциальная связь вида

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \frac{\partial \Phi(\sigma_e, \theta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\epsilon}^c_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_e, \theta)}{\partial \sigma_{ij}}\,, \tag{20}$$

где потенциал Φ — скалярная функция, в общем случае зависящая как от эффективного напряжения σ_e, так и от угла вида напряженного состояния θ. Построим функцию Φ, которая при фиксированном значении угла вида напряженного состояния θ является линейной комбинацией двух скалярных функций эффективного напряжения σ_e вида (19):

$$\Phi(\sigma_e, \theta) \equiv \frac{1}{2}\Big[\Phi_1 + \Phi_2 + \big(\Phi_2 - \Phi_1\big)\sin 3\theta\Big], \tag{21}$$

$$\Phi_1(\sigma_e) \equiv \frac{B_1}{n_1+1}\, \sigma_e^{n_1+1}, \quad \Phi_2(\sigma_e) \equiv \frac{B_2}{n_2+1}\, \sigma_e^{n_2+1}. \tag{22}$$

Здесь B_1, n_1 и B_2, n_2 — константы ползучести, определяемые в экспериментах на одноосное сжатие и растяжение соответственно вследствие того, что

$$\Phi(\sigma_e, -\pi/6) = \Phi_1(\sigma_e), \quad \Phi(\sigma_e, \pi/6) = \Phi_2(\sigma_e). \tag{23}$$

Из (19), (22) и (23) следует, что закон (20) – (22) удовлетворяет требованию (i). Требование (ii) также выполнено при следующих отождествлениях констант ползучести: $B_1 = B_2 = B$ и $n_1 = n_2 = n$. Таким образом, закон (20) – (22) является ассоциированным обобщенным законом Нортона установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии.

Приведем соотношения (20)–(22) к виду (16). Воспользуемся формулами [11]

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2}\,\frac{\boldsymbol{s}}{\sigma_e}\,, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{9\boldsymbol{s}^2 - 2\sigma_e^2\boldsymbol{g} + 3\sigma_e \sin 3\theta\, \boldsymbol{s}}{2\sigma_e^3 \cos 3\theta}\,. \tag{24}$$

Из (15) и второго равенства в (24) получаем

$$\frac{\partial(\sin 3\theta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\cos 3\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{3}{2\sigma_e^3}\,(9\boldsymbol{s}^2 - 2\sigma_e^2\boldsymbol{g} + 3\sigma_e \sin 3\theta\, \boldsymbol{s}). \tag{25}$$

Из (21) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(\sigma_e,\theta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_e}\,\frac{\partial \sigma_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial(\sin 3\theta)}\,\frac{\partial(\sin 3\theta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_e}\,(1-\sin 3\theta) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_e}\,(1+\sin 3\theta)\right]\frac{\partial \sigma_e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2}\,(\Phi_2 - \Phi_1)\,\frac{\partial(\sin 3\theta)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Из (22) получаем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_e} = B_1 \sigma_e^{n_1}, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_e} = B_2 \sigma_e^{n_2}. \tag{27}$$

Подставляя первое равенство в (24) и (25), (27) в (26), а затем полученное выражение для $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ — в (20), получаем выражение для определения скорости тензора деформаций ползучести $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$, записанное в виде (16), где

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{4}\Big[B_1\sigma_e^{n_1-1}\big(1-\sin 3\theta\big) + B_2\sigma_e^{n_2-1}\big(1+\sin 3\theta\big)\Big] - \frac{9}{4\sigma_e^2}\,(\Phi_2 - \Phi_1)\,\sin 3\theta, \\ b &= -\frac{27}{4\sigma_e^3}\,(\Phi_2 - \Phi_1), \quad c = \frac{3}{2\sigma_e}\,(\Phi_2 - \Phi_1). \end{aligned}$$

Тип 2. Неассоциированный закон ползучести. Этот закон записываем в виде (17), так что скаляр $\gamma = \gamma(\sigma_e, \theta)$ имеет следующий вид:

$$\gamma(\sigma_e,\theta) \equiv \frac{1}{2}\,\big[\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\sin 3\theta\big], \tag{28}$$

$$\gamma_1(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2}\,B_1\sigma_e^{n_1-1}, \quad \gamma_2(\sigma_e) \equiv \frac{3}{2}\,B_2\sigma_e^{n_2-1}. \tag{29}$$

Здесь константы материала B_1, n_1 и B_2, n_2 имеют тот же механический смысл, что и для ассоциированного закона ползучести, вследствие того, что $\gamma(\sigma_e, -\pi/6) = \gamma_1(\sigma_e)$, $\gamma(\sigma_e, \pi/6) = \gamma_2(\sigma_e)$. Нетрудно убедиться, что закон (17), (28), (29) удовлетворяет требованиям (i), (ii). Таким образом, этот закон является неассоциированным обобщенным законом Нортона установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии.

Как отмечалось в п. 1.2, для записи аналогичных законов установившейся ползучести при TL-формулировке уравнений МДТТ надо в соответствующих формулах настоящего раздела заменить пару тензоров $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon})$ на пару тензоров $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E})$.

4. Процедуры численных решений задач МДТТ, учитывающих деформации ползучести. Дискретный аналог скалярных уравнений (6) и (7) получим на основе МКЭ. В обоих случаях приходим к уравнению вида (см. [5, 6, 8, 9, 12])

$$\delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\,{}^{t}\boldsymbol{K}\,\Delta\boldsymbol{U} = \delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\big({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^{t}\boldsymbol{F}\big) \quad \forall\,\delta\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{N_{\mathrm{eq}}}, \tag{30}$$

где $\Delta\boldsymbol{U}$ — вектор приращений узловых перемещений; ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R}$ и ${}^{t}\boldsymbol{F}$ — векторы внешних и внутренних сил, определенные в моменты времени $t + \Delta t$ и t соответственно; ${}^{t}\boldsymbol{K}$ — симметричная матрица касательной жесткости, определенная в момент времени t; N_{eq} — число независимых степеней свободы.

В силу произвольности вектора $\delta\boldsymbol{U}$ скалярное уравнение (30) эквивалентно векторному уравнению

$${}^{t}\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{U} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^{t}\boldsymbol{F}. \tag{31}$$

После определения вектора приращений узловых перемещений $\Delta\boldsymbol{U}$ из системы линейных уравнений (31), решение ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{U}$ для вектора узловых перемещений в момент времени $t + \Delta t$ определяется по формуле ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{U} = {}^{t}\boldsymbol{U} + \Delta\boldsymbol{U}$.

На каждом шаге по времени в решение для вектора узловых перемещений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{U}$ вносится ошибка вследствие использования линеаризованной по времени процедуры пошагового интегрирования нелинейных уравнений МДТТ. Для избежания накопления ошибки это решение требует уточнения (желательно на каждом шаге по времени) некоторой итерационной процедурой. Такими процедурами являются, например, итерационные процедуры метода Ньютона–Рафсона и его модификации, при применении которых на каждой итерации решается система алгебраических уравнений вида (31). Отметим, что метод Ньютона–Рафсона и его модификации в общем случае не обладают свойством глобальной сходимости, а имеют только локальный характер сходимости, т.е. вектор узловых перемещений ${}^{t}\boldsymbol{U}$ должен попасть в круг радиуса сходимости используемого метода, если этот вектор рассматривается как начальный вектор итерационного процесса. К сожалению, провести теоретические оценки попадания в этот круг при исполнении практических расчетов трудно, поэтому общепринятой практикой решения нелинейных задач при установлении факта расходимости метода (или его медленной сходимости) является решение задачи с уменьшенным шагом по времени Δt или заново (с момента времени $t = 0$), или с того последнего момента времени, на котором получено решение, проверенное на сходимость (если решение проверяется на сходимость на каждом шаге по времени, то этим моментом является момент времени t).

Приведем уравнения и последовательность вычислений при использовании итерационной процедуры метода Ньютона–Рафсона и его модификаций [5–8].

1. Стандартный метод Ньютона–Рафсона (обладает квадратичной скоростью сходимости). На каждой итерации решается алгебраическая система уравнений

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}^{(i)}\Delta\boldsymbol{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{32} $$

Новое, $(i+1)$-е, приближение вектора перемещений определяется по формуле

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{U}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{U}^{(i)} + \Delta\boldsymbol{U}^{(i)}. \tag{33} $$

Начальными условиями применения итерационной процедуры являются следующие:

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{K}, \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(0)} = {}^{t}\boldsymbol{F}. \tag{34} $$

Таким образом, за решение для вектора узловых перемещений на нулевой итерации принимается проверенное на сходимость решение для этого вектора ${}^{t}\boldsymbol{U}$, полученное на момент времени t. Сопоставляя формулы (31) с формулами (32), (34) $(i = 1)$, видим, что решение для $\Delta\boldsymbol{U}$, полученное из системы (31), является решением для первой итерации в методе Ньютона–Рафсона.

2. Модифицированный метод Ньютона–Рафсона (обладает линейной скоростью сходимости). На каждой итерации решается система линейных алгебраических уравнений

$$ {}^{t}\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{R} - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{35} $$

Так же как и для стандартного метода Ньютона–Рафсона, $(i+1)$-е приближение вектора перемещений определяется по формуле (33), а равенства в (34) являются начальными условиями итерационного процесса.

3. Квазиньютоновы методы (обладают сверхлинейными скоростями сходимости, промежуточными между линейной и квадратичной). Формулы реализации квазиньютоновых методов получаются из формул (32)–(34) с учетом того, что в левой части системы (32) вместо вычисления и последующей LDL^{T}-факторизации касательной матрицы жесткости ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{K}^{(i)}$ строится приближение факторизованной матрицы. При решении одного нелинейного уравнения с одним неизвестным квазиньютоновы методы сводятся к известному методу секущих.

Итерационная процедура определения решения продолжается до тех пор, пока не будут выполнены критерии сходимости решения к точному. Обычно выбирается несколько критериев, так что итерационная процедура продолжается до тех пор, пока либо один критерий, либо несколько одновременно не будут удовлетворены. Обычно осуществляется проверка сходимости решения по следующим заданным относительным погрешностям следующих величин [5, 8]: перемещений (ϵ_D), сил (ϵ_F) и энергии (ϵ_E).

Для каждого класса задач оптимальным, с точки зрения использования вычислительных ресурсов, является один из перечисленных выше методов. Сравним, например, сферы наилучшего приложения стандартного и модифицированного методов Ньютона–Рафсона. Радиус круга сходимости и скорость сходимости стандартного метода Ньютона–Рафсона превышают (иногда значительно) соответствующие характеристики модифицированного метода Ньютона–Рафсона. Однако затраты компьютерного времени для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (32) могут значительно (особенно при решении трехмерных задач) превышать затраты аналогичного времени решения системы (35). Отсюда следует, что стандартный метод Ньютона–Рафсона более выгодно применять для решения задач с сильной нелинейностью уравнений (в МДТТ к таким задачам, например, относятся контактные задачи, задачи с сильной физической нелинейностью, задачи с геометрической нелинейностью при резком изменении равновесных конфигураций и др.), а модифицированный метод Ньютона–Рафсона лучше применять для решения задач со слабой нелинейностью уравнений МДТТ. Квазиньютоновы методы занимают промежуточное положение как по характеристикам сходимости, так и по затратам компьютерного времени при решении линейных систем на итерациях.

Как на каждом шаге по времени, так и на каждой итерации для фиксированного момента времени требуется определять компоненты тензора напряжений (тензора Коши $\boldsymbol{\sigma}$ или второго тензора Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{S}$ — для MNO- или TL-формулировок уравнений МДТТ соответственно) во внутренних точках элементов — в тех точках, в которых вычисляются подынтегральные выражения при использовании квадратурных формул Гаусса–Лежандра (назовем эти точки гауссовыми точками интегрирования). Остановимся для определенности на MNO-формулировке уравнений. В соответствии с (5) и (11) для приращения тензора напряжения имеем $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^E : \Delta\boldsymbol{\epsilon} - 2\mu\, {}^t\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c\, \Delta t,$ откуда получаем

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^E : {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon} - 2\mu\, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}^c, \tag{36} $$

$$ {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\epsilon}^c \equiv {}^t\boldsymbol{\epsilon}^c + {}^t\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c\, \Delta t. \tag{37} $$

Отметим, что равенство (36) можно также непосредственно получить, интегрируя по времени левую и правую части равенства (8) с использованием формулы Эйлера. Проанализируем выражение (36) для определения тензора напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$. Видим, что первое слагаемое в правой части проинтегрировано точно, а второе слагаемое, с учетом выражения (37), в общем случае содержит неустранимую погрешность, которая может быть уменьшена только при измельчении шага по времени Δt. Эта ситуация характерна при решении задач МДТТ с диссипативными моделями материала (т.е. с такими моделями, которые диссипируют накопленную упругую энергию), к которым принадлежит модель материала, учитывающая деформации ползучести. Таким образом, когда при применении итерационной процедуры метода Ньютона–Рафсона и его модификаций шла речь о сходимости решения на данном моменте времени к точному, надо учитывать то, что "точное" решение может содержать ошибку, которую можно устранить только уменьшением шага по времени. Поэтому при численном решении таких задач всегда полезно делать проверку достоверности решения дополнительными расчетами с уменьшенными шагами по времени.

Проведем анализ того, какие из рассмотренных выше итерационных процедур наиболее выгодно использовать для рассматриваемого класса задач. Отметим, что уравнение (30) является дискретным аналогом слабых форм линеаризованных уравнений равновесия (6) и (7), записанных в приращениях, так что левая часть первого уравнения является аналогом левых частей последних уравнений, первый член в правой части уравнения (30) является дискретным аналогом суммы первых трех слагаемых правых частей уравнений (6) и (7), а последний член в правой части уравнения (30) является дискретным аналогом последних слагаемых правых частей уравнений (6) и (7). Из (6) и первого равенства в (11) следует, что для MNO-формулировки уравнений касательная матрица жесткости ${}^t\boldsymbol{K}$ постоянная, поэтому для такой формулировки уравнений наиболее выгодно использовать модифицированный метод Ньютона–Рафсона с определением и факторизацией этой матрицы только один раз — перед выполнением пошаговой процедуры интегрирования уравнений квазистатического движения деформируемого тела, т.е. в системе (35) надо под матрицей ${}^t\boldsymbol{K}$ понимать матрицу ${}^0\boldsymbol{K}$. Второе слагаемое в левой части (7) свидетельствует о том, что при использовании TL-формулировки уравнений касательная матрица жесткости ${}^t\boldsymbol{K}$ изменяется на каждом шаге по времени и на каждой итерации; в этом случае может оказаться более выгодным использование квазиньютонова метода или стандартного метода Ньютона–Рафсона. Однозначного ответа на вопрос, итерационную процедуру какого из рассмотренных методов лучше применять при решении геометрически нелинейных задач, учитывающих деформации ползучести, нет. Для каждой конкретной задачи для ответа на этот вопрос надо проводить отдельное исследование.

5. Программная реализация. Полученные в п. 3 обобщенные законы Нортона установившейся ползучести для изотропных сред, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии, реализованы в программных модулях creep3D.for и crplaw.f, написанных на алгоритмическом языке FORTRAN 77. Оба этих модуля определяют компоненты тензора напряжений в гауссовых точках интегрирования трехмерных изопараметрических конечных элементов пакетов PIONER и MSC.Marc 2005 (элемент #3 пакета PIONER и элемент #7 пакета MSC.Marc 2005).

Для пакета PIONER модуль creep3D.for расширяет библиотеку материалов этого элемента. Отметим, что в библиотеке стандартных материалов пакета PIONER реализован стандартный закон Нортона для учета деформаций ползучести, основанный на ESF (Effective Stress Function) алгоритме, развитом в [18]. Однако ESF-алгоритм нельзя использовать для реализации обобщенного закона Нортона, так как этот алгоритм опирается на зависимость (17), в которой скаляр γ может зависеть только от эффективного напряжения σ_e (но не может зависеть от угла вида напряженного состояния θ). Поэтому обобщенный закон Нортона использован для введения новой модели материала в библиотеку материалов трехмерного изопараметрического элемента пакета PIONER.

Исходные FORTRAN-модули пакета MSC.Marc 2005 в принципе недоступны для пользователей. Для модернизации и расширения возможностей этого пакета служат специальные программы пользователя (user's subroutines), наполнение которых производится пользователем. В качестве такой программы авторы настоящей работы выбрали модуль crplaw.f (см. [16]). Однако этот модуль допускает введение только обобщенного неассоциированного закона Нортона (но не позволяет ввести обобщенный ассоциированный закон Нортона). Для большей надежности математического моделирования процессов ползучести деформируемых тел из материалов, имеющих разные характеристики растяжения и сжатия, желательным свойством была бы малая разница в решениях одной и той же задачи с использованием как ассоциированного, так и неассоциированного законов ползучести. В этом случае можно с большой долей уверенности надеяться на удовлетворительное решение задач ползучести для сред, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии, при использовании обобщенного неассоциированного закона Нортона. Тестирование двух обобщенных законов Нортона (ассоциированного и неассоциированного) путем сравнения решений задачи о кручении пластинки в режиме ползучести с использованием пакета PIONER приведено в п. 6.2.

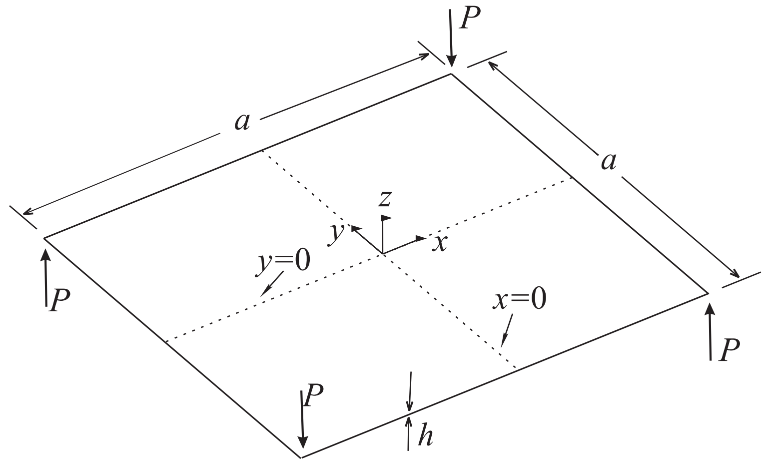

Рис. 1. Кручение квадратной пластинки сосредоточенными силами P, приложенными в углах

Отметим, что в решениях задач пакетом MSC.Marc 2005 для геометрического моделирования (построения 3D-модели, разбиения области на конечные элементы и отображения результатов расчетов) используется пакет MSC.Patran 2005 [17].

6. Решение задачи о кручении пластинки в режиме ползучести.

6.1. Постановка задачи. Рассмотрим квадратную пластинку, имеющую толщину h и длину стороны a (рис. 1). Пластинка деформируется приложенными в углах четырьмя сосредоточенными силами постоянной (не зависящей от времени) величины $P = 1850$ кг. Распределение сил, показанных на рис. 1, моделирует кручение пластинки приложенными к ее сторонам погонными моментами величины $\dfrac{P}{2}$ [19].

В решении этой задачи в полной мере проявляются свойства разносопротивляемости материала растяжению и сжатию при ползучести, так как деформирование пластинки этой системой сил соответствует ее изгибам в двух разных направлениях, так что часть волокон материала, лежащих до деформации в плоскостях $z = \text{const}$, $-\dfrac{h}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{h}{2}$, по одну сторону от срединной поверхности пластинки $z = 0$, испытывает растяжение, а по другую сторону от этой поверхности — сжатие. Таким образом, при решении этой задачи можно апробировать особенности деформирования пластинки, являющиеся следствием разносопротивляемости материала растяжению и сжатию.

Пусть x, y, z — оси декартовой системы координат, такой, что плоскость $z = 0$ совпадает со срединной поверхностью пластинки, а стороны пластинки в сечении $z = 0$ параллельны осям x и y. При положительных направлениях сил, приведенных на рис. 1, деформирование пластинки с исключением ее движения как жесткого целого согласуется со следующими наложенными граничными условиями для перемещений:

— в точке $x = y = z = 0$: $u = v = w = 0$;

— на линии $x = y = 0$: $u = v = 0$;

— на линии $x = z = 0$: $u = 0$;

— на линии $y = z = 0$: $v = 0$.
Здесь u, v, w — компоненты вектора перемещений по осям x, y, z соответственно.

В дальнейших расчетах используем характеристики материала АК4-1Т (алюминиевого сплава) пластинки, приведенные в [10], которые получены на основе данных экспериментов, проведенных при температуре 200°C. В соответствии с этими данными материал изотропен и его характеристики упругости одинаковы при растяжении и сжатии и равны следующим значениям: модуль Юнга $E = 700\ \dfrac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ и коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. Стадия установившейся ползучести в экспериментах как при сжатии, так и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициента B и показателя n для каждого из этих видов деформирования:

— сжатие: $B_1 = 0.25 \times 10^{-14}$ (кг/мм$^2)^{-n_1}$(час)$^{-1}$, $n_1 = 8$;

— растяжение: $B_2 = 0.5 \times 10^{-14}$ (кг/мм$^2)^{-n_2}$(час)$^{-1}$, $n_2 = 8$.

Предполагается, что сосредоточенные силы прикладываются к углам пластинки достаточно быстро по сравнению с тем временем, в течение которого происходит релаксация напряжений и развиваются деформации ползучести, но, в то же время, достаточно медленно по сравнению с временем импульсного приложения силы, при котором надо учитывать инерционные эффекты. Поэтому в численном решении начальному моменту времени ($t = 0$) соответствует деформированная конфигурация пластинки из упругого материала, находящейся под действием сосредоточенных сил.

6.2. Сравнение решений, полученных по двум обобщенным законам ползучести Нортона. В этом пункте для решения задачи используется пакет PIONER [14], в библиотеку материалов элемента # 3 (изопараметрического 3D гексагонального элемента сплошной среды) которого введена новая модель материала, реализованная в программном модуле creep3D.for. Этот модуль определяет компоненты тензора напряжений в гауссовых точках интегрирования элемента. Отметим, что элемент # 3 пакета PIONER может иметь переменное число узловых точек, от восьми до 64-х, так что, в соответствии с выбором пользователя, можно производить аппроксимацию геометрии и компонент вектора перемещений в элементе по их значениям в узловых точках от трилинейной до трикубической [14]. В настоящем исследовании для численных решений задач о деформировании пластинки выбран восьмиузловой конечный элемент с трилинейной аппроксимацией радиус-вектора и вектора перемещений материальных точек элемента. При вычислении интегралов по объему элемента по квадратурным формулам Гаусса–Лежандра использовались $2 \times 2 \times 2$ точек (при этом обеспечивается полный порядок интегрирования [5, 6]).

Задаются следующие геометрические параметры пластинки (рис. 1): длина стороны $a = 200$ мм, толщина $h = 20$ мм. При построении конечно-элементной модели пластинки использовалась сетка элементов с равномерным шагом по толщине и в плане пластинки, так что в плане пластинка разбивается сеткой из 20×20 элементов, а по толщине — на два элемента. Результаты тестирования по сходимости численного решения к точному при измельчении сетки в этом пункте не рассматриваются, так как главная цель п. 6.2 состоит в ответе на вопрос, насколько отличаются друг от друга решения, полученные по двум обобщенным законам Нортона при прочих равных условиях численного моделирования (т.е. конечно-элементной сетки и шага Δt по времени).

Так как для интегрирования во времени компонент тензора деформаций ползучести используется условно-устойчивая явная схема Эйлера, то шаг по времени Δt должен быть достаточно мал для того, чтобы обеспечить устойчивость процесса интегрирования. С другой стороны, малость этого шага требуется также для обеспечения требуемой точности интегрирования компонент тензора деформаций ползучести. Численные эксперименты показали, что этим требованиям удовлетворяет шаг $\Delta t = 0.5$ час, так как при таком шаге по времени неустойчивых процессов интегрирования компонент тензора деформаций ползучести не обнаружено как при расчетах, сделанных с MNO-формулировкой уравнений МДТТ, так и при расчетах, сделанных с TL-формулировкой этих уравнений. Для каждой из этих формулировок проведена серия из четырех типов расчетов: в первом расчете использовался классический закон Нортона с константами $B = B_1$, $n = n_1$ (соответствующими экспериментам по сжатию образцов), во втором расчете также использовался закон Нортона с константами $B = B_2$, $n = n_2$ (соответствующими экспериментам по растяжению образцов), в третьем и четвертом расчетах использовались оба типа (ассоциированный и неассоциированный) обобщенного закона Нортона. Увеличение шага по времени в два раза ($\Delta t = 1$ час) приводит к неустойчивому процессу интегрирования компонент тензора деформаций ползучести при решении задачи о ползучести пластинки при MNO-формулировке уравнений во втором типе расчета. Однако для первого типа расчета, соответствующего устойчивому процессу интегрирования компонент тензора деформации ползучести, при этой же формулировке уравнений получены близкие значения максимального прогиба w (в углах пластины, где приложены нагрузки) при $T = 250$ часов (время окончания решения задачи ползучести): $w = 11.7265$ мм в расчетах с $\Delta t = 1$ час и $w = 11.7129$ мм в расчетах с $\Delta t = 0.5$ час (здесь и далее w — абсолютная величина z-компоненты вектора перемещений, которая одинакова для всех угловых точек).

Расчеты (их результаты приведены ниже) проведены с вычислением и триангуляризацией матрицы касательной жесткости только в начальный момент времени $t = 0$ (т.е. для всего сегмента [0, 250 час] времени использовалась матрица касательной жесткости ${}^0\boldsymbol{K}$ и ее LDL^{T}-разложение). Отметим, что в этот момент времени деформации ползучести отсутствуют, т.е. матрица касательной жесткости ${}^0\boldsymbol{K}$ получена для линейной упругой модели материала. На каждом шаге по времени решение уточняется с использованием BFGS-квазиньютонова метода [5, 7, 8, 20] в сочетании с процедурой ускорения сходимости численного решения к точному линейным поиском [5, 20]. Контроль сходимости решения к точному осуществляется тремя параметрами (см. п. 4): $\epsilon_D = \epsilon_F = 0.001$, $\epsilon_E = 10^{-7}$.

Полученные значения прогиба w на момент времени $T = 250$ час в серии расчетов, проведенных с постоянным по времени шагом $\Delta t = 0.5$ час, приведены в табл. 1. В этой серии расчетов компоненты тензора деформаций ползучести определялись только по модели материала, учитывающей разносопротивляемость растяжению и сжатию.

Таблица 1

Значения прогиба w в момент времени $T = 250$ час, полученные при использовании двух типов обобщенного закона ползучести Нортона

Тип обобщенного закона Нортона	Прогиб w (мм)	
	MNO-формулировка	TL-формулировка
Неассоциированный	14.9891	12.9807
Ассоциированный	14.7129	12.7733

Сопоставление решений, приведенных в табл. 1, полученных как с использованием MNO-формулировки уравнений МДТТ, так и с использованием TL-формулировки, показывает, что для данного класса задач оба типа обобщенного закона ползучести Нортона (ассоциированный и неассоциированный) приводят к близким значениям прогиба w. Это дает основание проводить дальнейшие расчеты с использованием только неассоциированного обобщенного закона ползучести Нортона, реализованного в подпрограмме пользователя crplaw.f пакета MSC.Marc 2005. Предварительные решения задач пакетом MSC.Marc 2005 и сравнение этих решений с численными решениями, полученными пакетом PIONER как в рамках линейной теории упругости, так и с учетом деформаций ползучести при использовании явной схемы Эйлера интегрирования компонент тензора деформаций ползучести с постоянным шагом времени $\Delta t = 0.5$ час (использовался классический закон ползучести Нортона для материала с одинаковыми свойствами материала при растяжении и сжатии) показали совпадение значений прогиба w, полученного по обоим пакетам, до четырех значащих цифр. В п. 6.3 при сравнении результатов расчетов с данными эксперимента используется только пакет MSC.Marc 2005 вследствие того, что этот пакет допускает проведение расчетов с использованием более экономичной схемы интегрирования компонент тензора деформаций ползучести с адаптивным шагом по времени по сравнению со схемой интегрирования этих компонент с постоянным шагом по времени, реализованной в пакете PIONER.

6.3. Сравнение результатов численного моделирования с данными эксперимента. Применим неассоциированный обобщенный закон ползучести Нортона к решению задачи, для которой имеются данные натурного эксперимента, представленные в [10]. Нагружение пластинки силами, приложенными в угловых точках (рис. 1), осуществить трудно. Поэтому в эксперименте силами $P = 1850$ кг нагружалась пластинка, представленная на рис. 2. Схема нагружения пластинки и точки замера прогибов w на базе 100 мм приведены на рис. 3. Из расположения точек A, B, C, D замера прогиба w, приведенных на рис. 3, следует, что осреднение замеров прогибов в точках A и B (или C и D) эквивалентно осреднению замеров прогибов в точке $B\,(35.35, 35.35, 10)$ и в точке, имеющей в недеформированном состоянии координаты $(35.35, 35.35, -10)$ (т.е. в точках, расположенных на волокне, совпадающем с вектором нормали к срединной поверхности в точке с координатами $(35.35, 35.35, 0)$, и находящихся на разных лицевых сторонах пластинки). Поэтому для сравнения прогиба w, полученного в численном решении задачи, с данными эксперимента выбрана точка на срединной поверхности с координатами $(35.35, 35.35, 0)$, равноудаленная по нормали к этой поверхности от точек с координатами $(35.35, 35.35, -10)$ и $(35.35, 35.35, 10)$. Эта точка помечена на рис. 2 знаком “$\times$”.

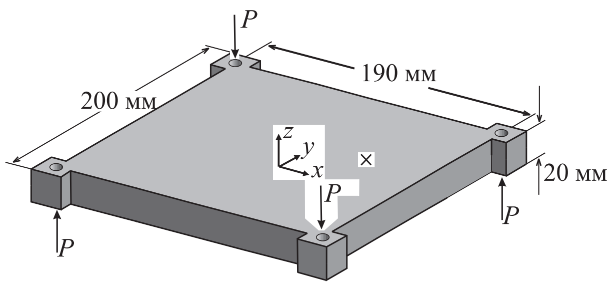

Рис. 2. Геометрия пластинки и точки приложения сил в натурном эксперименте

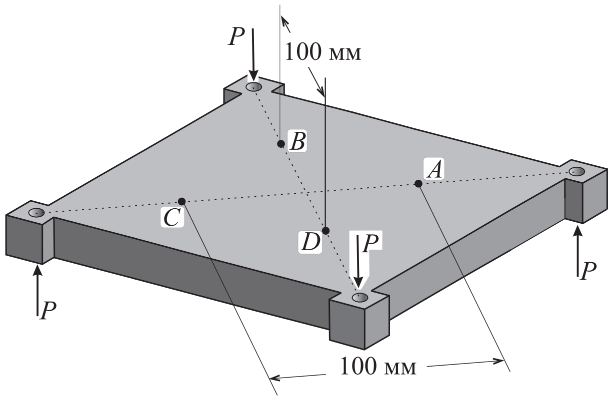

Рис. 3. Схема нагружения пластинки и точки A, B, C, D замера прогиба w в эксперименте

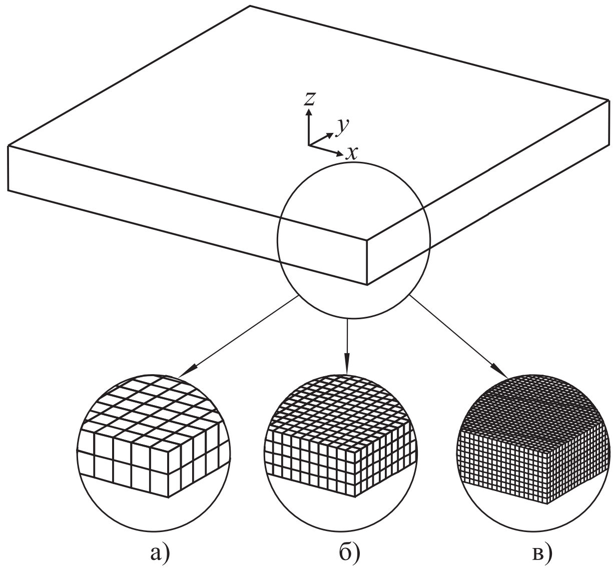

Рис. 4. Три вида сеток в первой модели пластинки: а) “грубая” сетка; б) “средняя” сетка; в) “мелкая” сетка

Геометрия *первой модели пластинки* для численного решения задачи ее деформирования соответствует рис. 1 с параметрами $a = 190$ мм и $h = 20$ мм, т.е. используется та же геометрия пластинки, что и в п. 6.2, но длина a сторон пластинки равна 190 мм в соответствии с геометрией пластинки, представленной на рис. 2. Другое отличие настоящей модели от той, что использовалась в п. 6.2, состоит в учете эксцентриситета приложения сосредоточенных сил P. Здесь силы прикладываются к точкам, принадлежащим лицевым сторонам $z = \pm 10$ мм пластинки, а в модели пластинки, рассмотренной в п. 6.2, силы P прикладываются к точкам, принадлежащим срединной поверхности $z = 0$ пластинки.

Для исследования сходимости численного решения к точному проведены серии расчетов на последовательности сгущающихся сеток трехмерных восьмиузловых элементов сплошной среды с полным порядком интегрирования (элементы # 7 пакета MSC.Marc 2005 [13]). Эти сетки приведены на рис. 4. Далее, для краткости, называем сетку из $20 \times 20 \times 2$ элементов “грубой”, сетку из $40 \times 40 \times 4$ элементов — “средней” и сетку из $90 \times 90 \times 10$ элементов — “мелкой”.

Проведены три серии расчетов. Каждая серия состоит из трех расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Первая серия соответствует решению задач в рамках линейной теории упругости, вторая серия расчетов — решению задачи о деформировании пластинки из упругого материала в геометрически нелинейной TL-формулировке уравнений МДТТ, третья серия — решению задачи о деформировании в условиях ползучести пластинки из материала, имеющего разные свойства при растяжении и сжатии, в TL-формулировке уравнений МДТТ.

Во всех трех сериях расчетов предполагалось, что силы P прикладываются мгновенно (при $t = 0$) и далее имеют постоянные значения 1850 кг в любой момент времени $t > 0$. Для первых двух серий расчетов (для пластинки из упругого материала) предполагалось, что нагрузка прикладывается за один шаг по времени (использовался шаг по времени $\Delta t = 1$ час вследствие независимости упругой модели материала от естественного времени). Во второй серии расчетов для получения решения в рамках заданной точности с погрешностями $\epsilon_F = \epsilon_D = 0.001$ использовалась итерационная процедура стандартного метода Ньютона–Рафсона. Во всех трех расчетах этой серии расходимости или слабой сходимости приближенного решения к точному не наблюдалось, т.е. естественная (свободная от напряжений) конфигурация пластинки, которая использована для определения матриц и векторов в начале итерационного процесса, соответствует точке в пространстве решений, принадлежащей кругу сходимости стандартного метода Ньютона–Рафсона. Как показывают результаты расчетов первых двух серий, эффект геометрической нелинейности для пластинки из упругого материала слабо выражен, поэтому приведем результаты только первой серии расчетов (в рамках линейной теории упругости). В табл. 2 приведены значения прогиба w в трех узловых точках с координатами: точка $A\,(35.35, 35.35, 0)$ — точка на срединной поверхности пластинки, расположенная в районе измерения прогиба (точка A на рис. 3); точка $B\,(90, 90, -10)$ — угловая точка приложения сосредоточенной силы; точка $C\,(90, 90, 0)$ — угловая точка на срединной поверхности пластинки.

Таблица 2

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки из упругого материала в геометрически линейной постановке (модель 1)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	“Грубая” сетка	“Средняя” сетка	“Мелкая” сетка
A	0.3795	0.3835	0.3847
B	2.6674	2.9435	3.5592
C	2.5358	2.5824	2.6016

Из анализа значений прогиба w, представленных в табл. 2, следует, что, в зависимости от размера ячейки сетки меняется тип деформирования пластинки. Решение, полученное на “грубой” сетке, соответствует преимущественному изгибу пластинки, а решение, полученное на “мелкой” сетке, — ее изгибу с локальным смятием материала в районе действия сосредоточенных сил. Смятие материала в этом районе также отмечается (но в меньшей степени) и в решении, полученном на “средней” сетке. Из сопоставления значений прогиба w, представленных в табл. 2, делаем вывод, что характер деформирования пластинки в районах приложения сосредоточенных сил, полученный в решениях со “средней” и “мелкой” сетками, не соответствует стандартным кинематическим гипотезам (Кирхгофа–Лява и Тимошенко) теории пластин. Напомним, что эти гипотезы предполагают неизменность длин волокон, направленных по нормали к срединной поверхности пластин, при их деформировании. При выполнении этих гипотез при малых поворотах этих волокон прогибы w в точках B и C должны быть близкими. Такая близость прогибов наблюдается только в решении на “грубой” сетке.

Таблица 3

Характеристики численных решений задачи о кручении пластинки в режиме ползучести, полученные при использовании адаптивного шага по времени Δt

Сетка	Δt_{init} (час)	Δt_{fin} (час)	N	T (час)
“Грубая”	10^{-4}	0.91395	282	260
“Средняя”	10^{-8}	0.56837	393	260
“Мелкая”	10^{-12}	1.8709×10^{-3}	399	2.5

Проведем анализ решений задач, полученных в третьей серии расчетов по ползучести пластин из материала АК4-1Т, имеющего разные свойства при растяжении и сжатии. В этих расчетах задавалась только относительная погрешность вычислений по перемещениям $\epsilon_D = 0.001$ для анализа сходимости решения к точному при применении итерационной процедуры стандартного метода Ньютона–Рафсона. В этой серии расчетов и в решениях задач по ползучести пластинок, представленных далее, использовалась опция “autocreep” [21]. При активации этой опции решение задач по ползучести тел пакетом MSC.Marc 2005 проводится интегрированием уравнений с адаптивным шагом по времени. Характеристики решений, полученных в этой серии расчетов, приведены в табл. 3, где Δt_{init} — начальный шаг интегрирования (подбирался численным экспериментом), Δt_{fin} — последнее значение шага по времени при окончании процесса пошагового интегрирования уравнений квазистатического интегрирования, N — число шагов по времени, требуемых для достижения заданного значения времени T окончания процесса интегрирования. Общий вид деформированных конфигураций пластин при времени $t = 260$ час, полученных в расчетах с

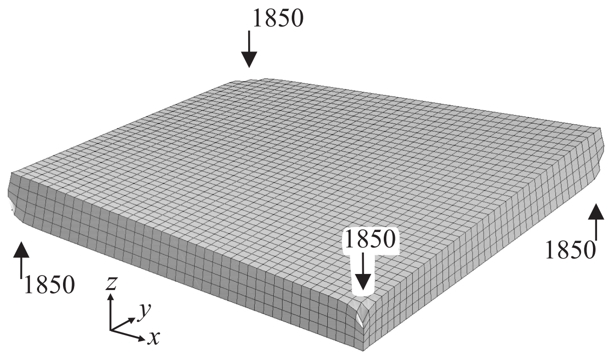

Рис. 5. Деформированная конфигурация пластинки, полученная в решении задачи о ее кручении в режиме ползучести в момент времени $t = 260$ час с использованием “средней” сетки конечных элементов

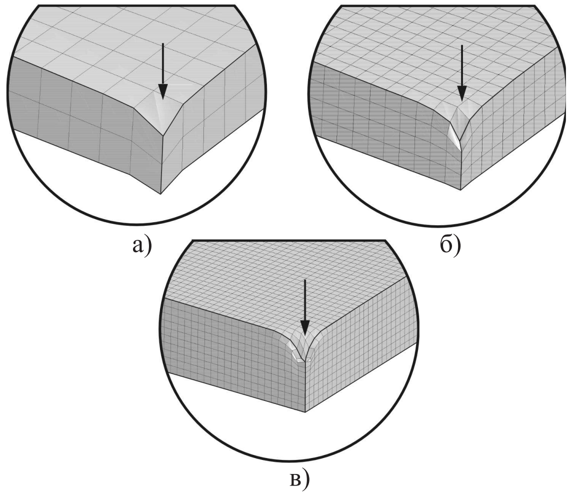

Рис. 6. Увеличенные фрагменты (соответствующие выделенной области на рис. 4) деформированных конфигураций пластинки, полученные в решении задачи о ее кручении в режиме ползучести на: а) “грубой” ($t = 260$ час), б) “средней” ($t = 260$ час), в) “мелкой” ($t = 2.5$ час) сетках конечных элементов

Таблица 4

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки в режиме ползучести в геометрически нелинейной (TL) постановке на “грубой” ($t = 260$ час), “средней” ($t = 260$ час) и “мелкой” ($t = 2.5$ час) сетках (модель 1)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	“Грубая” сетка	“Средняя” сетка	“Мелкая” сетка
A	1.7924	1.4561	0.3865
B	16.8676	17.0605	3.9296
C	14.9803	11.7067	2.6213

“грубой” и “средней” сетками, близок. Поэтому на рис. 5 представлена только деформированная конфигурация пластинки, полученная при решении задачи о ползучести пластин в расчете со “средней” сеткой на момент времени $t = 260$ час. Отметим, что решение задачи о ползучести пластинки с использованием “мелкой” сетки доведено только до 2.5 час из-за больших затрат компьютерного времени. Деформированные конфигурации в окрестности приложения силы в угловой точке пластинки, полученные на последовательности сгущающихся сеток, приведены на рис. 6. В табл. 4 приведены значения прогиба w в точках A, B, C с приведенными выше координатами. Изменение типа деформирования (от изгиба пластинки к локальному смятию материала под приложенной сосредоточенной силой) в зависимости от измельчения сетки проявилось в решении задачи о кручении пластинки из неупругого материала еще более отчетливо, чем в решении этой же задачи в рамках линейной теории упругости (рис. 5, 6 и табл. 4).

Из сопоставления решений задач по деформированию идеализированной модели пластинки, полученной заменой реальной геометрии пластинки с выступами и сил, распределенных по некоторой площади углублений на выступах пластинки (рис. 2), видно, что решения, полученные на последовательности сгущающихся сеток, не приводят к сходимости численного решения к точному. Это обстоятельство не позволяет провести корректное сравнение результатов численного решения, полученного для идеализированной модели пластинки, с экспериментальными данными. Дадим следующее объяснение этому факту.

Известно [7, 22, 23], что при действии сосредоточенной силы решение задачи линейной теории упругости для перемещений не принадлежит соболевскому пространству функций H^1 (т.е. пространству функций, обладающих конечной энергией деформаций) и что это решение имеет особенность вида $\ln r$ (r — локальная координата, равная нулю в точке приложения сосредоточенной силы). Это означает, что конечного (по энергии деформаций) предела последовательности численных решений на вложенных сетках не существует. Отметим, что для каждой конкретной выбранной конечно-элементной сетки решение для заданного значения сосредоточенной силы в точности соответствует некоторой системе распределенных нагрузок (для которых решение задачи в перемещениях принадлежит пространству функций H^1, т.е. имеет конечную энергию деформаций), но для другой сетки этой сосредоточенной силе будет соответствовать другая система распределенных сил, и т.д. Хотя в эксперименте сила прикладывалась к небольшой площадке (по сравнению с поверхностью пластины) и имитировалась сосредоточенной нагрузкой, в конечном итоге эта сила соответствует поверхностной нагрузке, распределенной по конечной площади углубления в выступе (рис. 2).

Геометрия *второй модели пластинки* соответствует рис. 2 (т.е. геометрия этой модели близка к геометрии пластинки, используемой в эксперименте). Силу $P = 1850$ кг, действующую на углубление выступа, моделируем давлением $p = 4.625$ кг/мм^2, действующим на всю поверхность выступа площадью 400 мм^2. Решение задачи о деформировании пластинки в рамках линейной теории упругости для такой распределенной нагрузки принадлежит пространству функций H^1 и имеет конечную энергию деформаций. Решения дискретизованных уравнений для задач в линейной постановке на последовательности сгущающихся сеток должно сходиться к точному решению задачи линейной теории упругости в энергетической норме [7, 22, 23]. Из общей теории МКЭ [22, 23] следует, что "жесткость" КЭ-модели больше "жесткости" модели, соответствующей точному решению задачи линейной теории упругости. Отсюда следует, что значения абсолютных величин прогибов w, полученных в численных решениях задач на последовательности сгущающихся сеток, должны в задаче о кручении пластинки в линейной постановке приближаться снизу к точным значениям, принадлежащим пространству функций H^1. Отметим, что проводились численные эксперименты по решению той же задачи с использованием сосредоточенных нагрузок на последовательности сгущающихся сеток. Решения задач ползучести на "крупной" и "мелкой" сетках показывают поведение пластинки, близкое к кручению, а решение задачи на "мелкой" сетки соответствует локальному выдавливанию материала под нагрузкой (рис. 7). Таким образом, как и при решении задачи с использованием первой модели пластинки, моделирование нагрузки сосредоточенной силой не позволяет получать решение, сходящееся к точному на последовательности сгущающихся сеток, и, в результате, не моделирует тип деформирования, наблюдаемый в эксперименте. Поэтому далее приводим только решения задач с распределенной нагрузкой, рассмотренной выше.

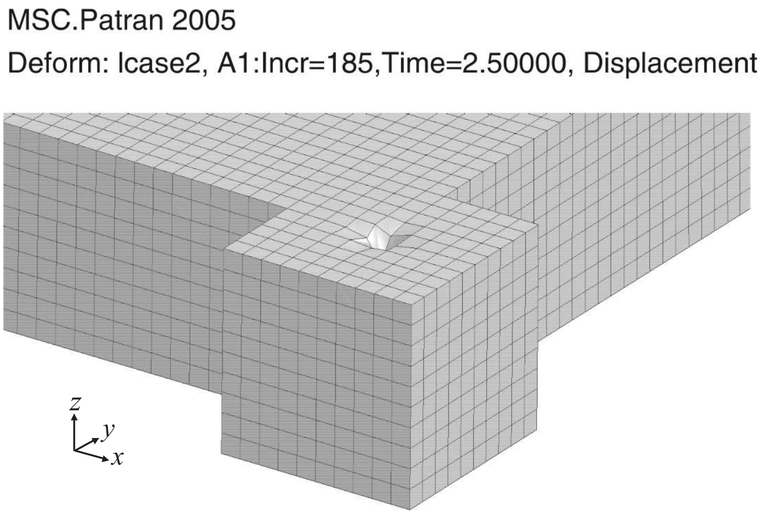

Рис. 7. Локальное выдавливание материала под сосредоточенной нагрузкой в момент времени $t = 2.5$ час процесса ползучести, полученное при решении задачи о кручении пластинки (вторая модель) из материала, имеющего разные свойства при растяжении и сжатии, с использованием "мелкой" сетки конечных элементов и учетом геометрической нелинейности деформирования

Размеры ячеек сеток конечно-элементных моделей для второй модели пластинки соответствуют размерам ячеек сеток, приведенным на рис. 4. Были проведены четыре серии расчетов. Как и для первой модели пластинки, каждая серия состоит из трех расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Первая серия соответствует решению задач в рамках линейной теории упругости, вторая серия — решению задач о деформировании пластинки из упругого материала в геометрически нелинейной TL-формулировке уравнений МДТТ, третья серия — решению задач ползучести пластинки в MNO-формулировке уравнений МДТТ, четвертая серия — решению задач ползучести пластинки в геометрически нелинейной TL-формулировке уравнений МДТТ.

Таблица 5

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки из упругого материала в геометрически линейной постановке (модель 2)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	"Грубая" сетка	"Средняя" сетка	"Мелкая" сетка
A	0.3788	0.3831	0.3845
B	2.5097	2.5602	2.5794
C	2.5047	2.5542	2.5730

Таблица 6

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки из упругого материала в геометрически нелинейной (TL) постановке (модель 2)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	"Грубая" сетка	"Средняя" сетка	"Мелкая" сетка
A	0.3794	0.3837	0.3852
B	2.5255	2.5771	2.5968
C	2.5132	2.5634	2.5824

Таблица 7

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки в режиме ползучести в геометрически линейной (MNO) постановке в момент времени $t = 260$ час (модель 2)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	"Грубая" сетка	"Средняя" сетка	"Мелкая" сетка
A	1.8362	1.9414	1.9429
B	11.9679	12.6999	12.7624
C	11.9639	12.6934	12.7554

Таблица 8

Значения прогиба w, полученные в решении задачи о кручении пластинки в режиме ползучести в геометрически нелинейной (TL) постановке в момент времени $t = 260$ час (модель 2)

Узловая точка	Прогиб w (мм)		
	"Грубая" сетка	"Средняя" сетка	"Мелкая" сетка
A	1.7562	1.7835	1.7952
B	11.6895	11.9863	12.1412
C	11.5372	11.8205	11.9674

Таблица 9

Параметры конечно-элементных моделей при использовании сеток разного типа для второй модели пластинки

Параметры модели	Тип сетки		
	"Грубая" сетка	"Средняя" сетка	"Мелкая" сетка
Число узлов	1383	8725	94831
Число элементов	824	6592	84000

Результаты всех серий расчетов сведены в табл. 5 – 8, где точки A, B, C имеют те же координаты, что и в расчетах по первой модели. Из результатов расчетов, представленных в этих таблицах, видим, что, как и предсказывает теория МКЭ, абсолютные величины значений прогибов w монотонно возрастают при сгущении сетки. Эти величины близки в расчетах, полученных на "средней" и "мелкой" сетках. Отсюда следует, что разумный компромисс между затраченными ресурсами компьютера и точностью решения достигается в решении задачи о кручении пластинки на "средней" сетке. Отметим, что при измельчении сетки параметры (число узлов и число конечных элементов) конечно-элементной трехмерной модели быстро возрастают (табл. 9) и решение СЛАУ можно проводить на компьютере с 2 Ггб оперативной памяти только с использованием итерационного метода сопряженных градиентов, в то время как решение СЛАУ при использовании "грубой" и "средней" сеток проводилось методом Краута (вариант метода Гаусса, принадлежащий к прямым методам решения СЛАУ) [5].

Сравнивая результаты расчетов, приведенных в табл. 5, 6 и в табл. 7, 8, отмечаем, что для рассматриваемой пластинки учет геометрической нелинейности не вносит существенных поправок в решения задач, полученных в предположениях как чисто упругого деформирования пластинки, так и с учетом деформаций ползучести. По-видимому, этот факт является следствием того, что деформирование сравнительно толстой пластинки (которая рассматривается в настоящем исследовании) происходит при сравнительно малых поворотах материальных волокон.

Конфигурация пластинки и распределение эффективного напряжения σ_e в конечный момент процесса ползучести ($t = 260$ час), полученные при решении задачи о кручении пластинки из материала, имеющего разные свойства ползучести при растяжении и сжатии, с использованием "средней" сетки конечных элементов и учетом геометрической нелинейности деформирования приведены на рис. 8. Деформированные конфигурации и распределения эффективного напряжения σ_e, полученные в расчетах на "грубой" и "мелкой" сетках, подобны представленным на рис. 8.

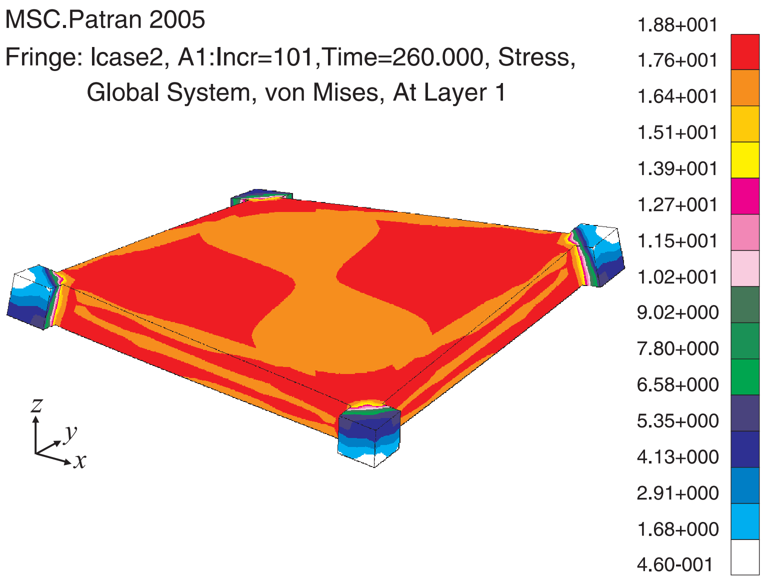

Рис. 8. Конфигурация пластинки и распределение эффективного напряжения σ_e в конечный момент процесса ползучести ($t = 260$ час), полученные при решении задачи о кручении пластинки из материала, имеющего разные свойства ползучести при растяжении и сжатии, с использованием "средней" сетки конечных элементов и учетом геометрической нелинейности деформирования

Кривые зависимости прогиба w в точке A от времени, полученные в расчетах по ползучести пластинки при кручении с использованием "средней" сетки конечных элементов, приведены на рис. 9. Здесь же маркерами представлены значения прогиба, полученные в экспериментах (прогибы измерялись в точках A, B, C и D, показанных на рис. 3, а затем усреднялись по всем четырем точкам). Сравнивая эксперимен-

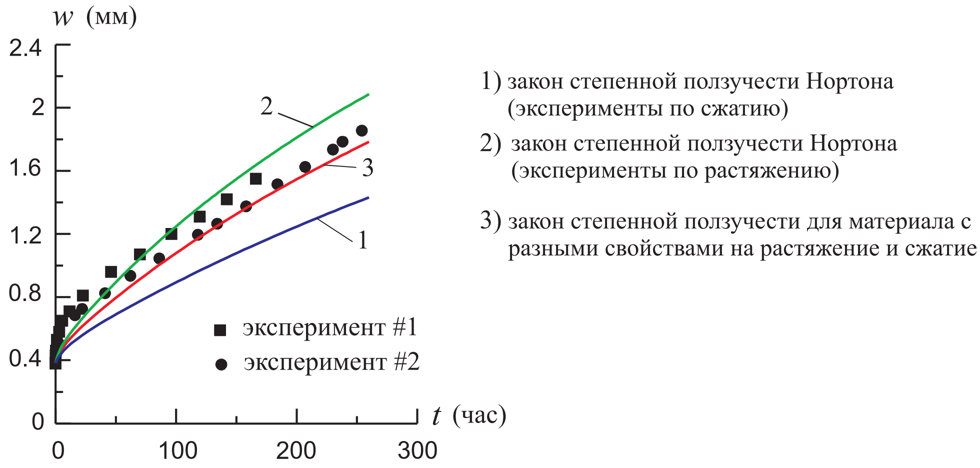

Рис. 9. Зависимости прогиба w от времени t, полученные в решении задачи о ползучести пластинки при кручении в компьютерном моделировании (кривые) и в эксперименте (маркеры)

тальные и расчетные данные, делаем заключение, что расчеты с использованием констант ползучести, полученных в экспериментах по растяжению образцов, дают завышенные значения прогибов, по сжатию — заниженные значения прогибов, а использование определяющих соотношений ползучести, учитывающих разные свойства материала при растяжении и сжатии, позволяет сблизить расчетные данные с данными эксперимента.

Заключение. В настоящей работе представлены определяющие соотношения ползучести металлических изделий, которые обобщают закон Нортона степенной ползучести для материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии. Эти определяющие соотношения реализованы в программном модуле crplaw.f, предназначенном для введения пользователем в пакет MSC.Marc 2005 новых моделей ползучести. С помощью пакета MSC.Marc 2005 решена задача о кручении пластинки из алюминиевого сплава АК4-1Т, которая деформируется таким образом, что часть волокон материала пластинки находится в состоянии сжатия, а часть — в состоянии растяжения. Проведенное сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что использование стандартного закона Нортона степенной ползучести с использованием характеристик материала, полученных из экспериментов по растяжению образцов из этого сплава, дает завышенные, а с использованием характеристик материала, полученных из экспериментов по сжатию образцов, — заниженные значения прогибов пластинки по сравнению с полученными в эксперименте. В то же время, использование развитых в настоящей работе определяющих соотношений обобщенного закона Нортона ползучести для материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии, позволяет сблизить данные расчета и эксперимента.

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору И. Ю. Цвелодубу за консультации по формулировке обобщенного закона Нортона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
3. *Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР, 1986.
4. *Никитенко А.Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 1997.
5. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
6. *Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Oxford: Butterworth–Heinemann, 2000.
7. *Curnier A.* Computational methods in solid mechanics. Dordrecht: Klüwer Academic Publ., 1994.
8. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
9. MARC Users Guide. Vol. A: Theory and Users Information. MSC. Software Corporation, 2005.
10. *Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В.* Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сборник трудов НИИВТа № 117. Новосибирск: НИИВТ, 1976. 78–88.
11. *Цвелодуб И.Ю.* Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 1991.

12. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001.
13. MARC Users Guide. Vol. B: Element Library. MSC. Software Corporation, 2005.
14. *Korobeinikov S.N., Agapov V.P., Bondarenko M.I., Soldatkin A.N.* The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proc. Int. Conf. on Numerical Methods and Applications. Sofia: Publ. House of the Bulgarian Acad. of Sci., 1989. 228–233.
15. *Новожилов В.В.* О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // Прикл. матем. и механ. 1951. **15**, № 6. 709–722.
16. MARC Users Guide. Vol. D: Users Subroutines. MSC. Software Corporation, 2005.
17. PATRAN Users Guide. MSC. Software Corporation, 2005.
18. *Kojic M., Bathe K.-J.* The effective-stress-function algorithm for thermo-elasto-plasticity and creep // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1987. **24**. 1509–1532.
19. *Timoshenko S., Woinowski-Krieger S.* Theory of plates and shells. N.Y.: McGraw-Hill, 1959; Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М: Физматгиз, 1963.
20. *Matthies H., Strang G.* The solution of nonlinear finite element equations // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1979. **14**. 1613–1626.
21. MARC Users Guide. Vol. C: Program Input. MSC. Software Corporation, 2005.
22. *Strang G., Fix G.J.* An analysis of the finite element method. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1973; Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
23. *Hughes T.J.R.* The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.

Поступила в редакцию
23.09.2008