УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

И. В. Колос¹, М. В. Колос²

Получено аналитическое выражение для определения приближенного значения импульсной переходной матрицы допустимого фильтра при решении задачи линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом. Доказана теорема сходимости. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00269, 07-01-92104, 06-01-96648).

Ключевые слова: переходная матрица, задача фильтрации, оптимальная фильтрация, вырожденные шумы, белый шум.

1. Введение. Пусть E_n — n -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_n$, $L_2([0, t])$ — гильбертово пространство вектор-функций, определенных на сегменте $[0, t]$, $0 \leq t \leq T < \infty$, и интегрируемых с квадратом по Лебегу с нормой $\|\cdot\|_0$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$; $W_2^1([0, t])$ — положительное гильбертово пространство, $(\cdot, \cdot)_1$ — скалярное произведение и $\|\cdot\|_1$ — норма в $W_2^1([0, t])$; $W_2^{-1}([0, t])$ — негативное пространство с нормой $\|\cdot\|_{-1}$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{-1}$ [4].

Для любых двух элементов $u \in W_2^{-1}([0, t])$ и $v \in W_2^1([0, t])$ определим билинейную форму

$$\langle u, v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t u_k^T(\tau) v(\tau) d\tau,$$

где $\{u_k(\tau)\}_{k=1}^\infty$ — последовательность функций из $L_2([0, t])$ такая, что $\|u - u_k\|_{-1} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, что билинейная форма совпадает со скалярным произведением в $L_2([0, t])$, если $u \in L_2([0, t])$.

Согласно теоремам вложения С. Л. Соболева [9], в негативное пространство входят обобщенные функции типа δ -функций Дирака. Подробнее со свойствами положительных и негативных пространств можно ознакомиться в [3, 4, 9]. Символ T означает операцию транспонирования. Через $C([0, t])$ будем обозначать пространство непрерывных на $[0, t]$ вектор-функций с нормой $\|u\|_C = \max_{\tau \in [0, t]} \{|u(\tau)|\}$,

$$|u|^2 = \sum_{k=1}^n u_k^2, \quad u_k(\tau) \text{ — координаты вектора } u(\tau).$$

Обозначим через $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностное пространство, на котором определены все встречающиеся в дальнейшем случайные величины и функции, M — оператор математического ожидания.

Пусть $x(\tau) \equiv x(\tau, \omega)$ — векторный случайный процесс, $\tau \in [0, t]$, $\omega \in \Omega$, выборочные функции которого с вероятностью 1 принадлежат пространству $W_2^{-1}([0, t])$. Математическое ожидание $M[x(\tau)]$ вычисляется по формуле $M[x(\tau)] = D^* M[j^* x(\tau)]$, а ковариационная матрица для $\tau, \sigma \in [0, t]$ имеет вид $M[x(\tau)x^T(\sigma)] = D^* D^* M[(j^* x(\tau))(j^* x(\sigma))^T]$. Здесь оператор D^* изоморфно отображает $L_2([0, t])$ на $W_2^{-1}([0, t])$, а j^* обратный ему оператор.

Случайный процесс $v(\tau, \omega)$ с нулевым средним и ковариационной функцией, содержащей множителем δ -функцию Дирака: $M[v(\tau)] = 0$, $M[v(\tau)v^T(\sigma)] = V(\tau)\delta(\tau - \sigma)$, где $V(\tau)$ — симметрическая положительно определенная матрица с элементами из $C([0, t])$, называется белым шумом [8].

Множитель $V(\tau)$ при δ -функции называется матрицей интенсивности белого шума $v(\tau, \omega)$. Если интенсивность белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметрическую матрицу, то такой процесс будем называть белым вырожденным шумом.

2. Постановка задачи линейной оптимальной фильтрации. Обозначим через $x(\tau) \equiv x(\tau, \omega)$, $0 \leq \tau \leq t$, $\omega \in \Omega$ — случайный n -мерный гауссовский процесс с реализациями, принадлежащими с вероятностью 1 пространству непрерывных функций $C([0, t])$, и со следующими статистиками: $M[x(\tau)] = 0$,

¹ Университет Российской академии образования, ул. Б. Полянка, д. 58, 109180, Москва; e-mail: kolos_v@mail.ru

² Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Ленинские горы, Москва; e-mail: arush@srcc.msu.su

$M[x(\tau)x^T(\sigma)] = K_x(\tau, \sigma)$, где $0 \leq \sigma \leq t$. Элементы матрицы $K_x(\tau, \sigma)$ по обоим аргументам принадлежат $L_2([0, t])$.

Задача линейной оптимальной фильтрации состоит в следующем. Пусть известен некоторый случайный процесс $\{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$, связанный с процессом $x(\tau)$ соотношением

$$y(\tau) = C(\tau)x(\tau) + v(\tau), \tag{1}$$

где $C(\tau)$ — матрица наблюдений (измерений) размерности $m \times n$, $m \leq n$, с гладкими элементами (ранг матрицы $C(\tau)$ равен m), $v(\tau) \equiv v(\tau, \omega)$ — m -мерный гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием $M[v(\tau)] = 0$ и ковариационной матрицей $K_v(\tau, \sigma) = M[v(\tau)v^T(\sigma)]$. Реализации $v(\tau)$ и элементы ковариационной матрицы $K_v(\tau, \sigma)$ могут принадлежать негативному пространству $W_2^{-1}([0, t])$, процессы $x(\tau)$ и $v(\tau)$ некоррелированы.

Требуется по наблюдениям процесса $\{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ найти линейную оценку $\hat{x}(\tau)$ процесса $x(\tau)$, удовлетворяющую критерию минимума среднеквадратической ошибки в момент времени $\tau = t$:

$$m(t) = \inf_h \left\{ M \left[(z, x(t) - \hat{x}(t))_n^2 \right] \mid \hat{x}(t) = \int_0^t h(t, \tau)y(\tau) d\tau \right\}. \tag{2}$$

Здесь z — произвольный постоянный вектор из E_n , нижняя грань берется по всем матрицам $h(t, \tau)$ размерности $n \times m$, для которых существует допустимый фильтр $\hat{x}(t) = \int_0^t h(t, \tau)y(\tau) d\tau$ (интеграл в (2) понимается в смысле билинейной формы, $\hat{x}_i = \langle h_i^T, y \rangle$, где $h_i(t, \tau)$ — i -я строка матрицы $h(t, \tau)$, $h_i^T(t, \tau) \in W_2^1([0, t])$, $\hat{x}_i(t)$ — i -я координата вектора оценки).

Импульсная переходная функция $h_0(t, \tau)$, определяющая оптимальную оценку в смысле среднеквадратического критерия (2), удовлетворяет матричному уравнению Винера–Хопфа [3–5, 8]

$$M[x(t)y^T(\sigma)] = \int_0^t h_0(t, \tau)M[y(\tau)y^T(\sigma)] d\tau, \quad \sigma \in [0, t]. \tag{3}$$

Заменяя в (3) случайный процесс $y(\tau)$ его представлением (1), получим уравнение

$$K_x(t, \sigma)C^T(\sigma) = \int_0^t h_0(t, \tau)C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma) d\tau + \int_0^t h_0(t, \tau)K_v(\tau, \sigma) d\tau. \tag{4}$$

Уравнение (4) в общем случае является уравнением Фредгольма первого рода, решение которого, как известно, может быть неустойчивым [1, 2].

Случайный процесс $v(\tau)$ в соотношении (1) будем называть шумом, а $x(\tau)$ — полезным сигналом.

В [3] получено приближенно-аналитическое решение задачи линейной оптимальной фильтрации, когда элементы корреляционных матриц сигнала и шума принадлежат $L_2([0, t])$.

Пусть $K_v(\tau, \sigma) = V(\tau)\delta(\tau - \sigma)$, а матрица $V(\tau)$ неотрицательно определена, т.е. для всех $u \in L_2([0, t])$ выполнено $(u, Vu)_0 \geq 0$ (в этом случае обратная матрица к $V(\tau)$ может не существовать или быть неограниченной).

Будем рассматривать задачу линейной оптимальной фильтрации с вырожденным белым шумом. В этом случае уравнение Винера–Хопфа принимает вид

$$K_x(t, \sigma)C^T(\sigma) = \int_0^t h_0(t, \tau)C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma) d\tau + h_0(t, \tau)V(\sigma), \tag{5}$$

где $V(\sigma)$ — неотрицательно определенная матрица интенсивности белого вырожденного шума $v(\sigma)$. Если ранг матрицы $V(\sigma)$ равен p , то ее можно представить следующим образом: $V(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\sigma) \end{bmatrix}$, где $R(\sigma)$ — невырожденная (положительно определенная) матрица порядка p с элементами, принадлежащими пространству $W_2^1([0, t])$.

Решение (5) неустойчиво, а его компоненты могут принадлежать негативному пространству [3–5]. Вместо (5) будем решать регуляризованное уравнение Винера–Хопфа

$$K_x(t, \sigma)C^T(\sigma) = \int_0^t h_\alpha(t, \tau)C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma) d\tau + h_\alpha(t, \tau)S_\alpha(\sigma), \quad (6)$$

где $S_\alpha(\sigma) = \begin{bmatrix} \alpha I_{m-p} & 0 \\ 0 & \alpha I_p + R(\sigma) \end{bmatrix}$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, I_{m-p} и I_p — единичные матрицы порядка $m-p$ и p .

3. Приближенно-аналитическое решение. Пусть $L_2([0, T])$ — гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом в смысле Лебега на $0 \leq t \leq T < \infty$. Выберем в $L_2([0, T])$ ортонормированный базис $\{e_i(t)\}_{i=1}^\infty$. Тогда любая конечная система функций $\{e_i(t)\}_{i=1}^N$ будет линейно независимой.

Разлагая матрицу $C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma)$ в ряд по базису $\{e_i(t)\}_{i=1}^\infty$, получим

$$C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma) = \sum_{i,j=1}^\infty e_i(\tau)\mathbf{K}_{ij}e_j(\sigma),$$

где $\mathbf{K}_{ij}$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma)$:

$$k_{ij}^{pq} = \int_0^T \int_0^T k_x^{pq}(\tau, \sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma) d\tau d\sigma.$$

Здесь $k_x^{pq}(\tau, \sigma)$ — элемент матрицы $C(\tau)K_x(\tau, \sigma)C^T(\sigma)$, стоящий в p -й строке и q -м столбце:

$$k_x^{pq}(\tau, \sigma) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n c_{pk}k_{kl}c_{lq},$$

где c_{lq} и k_{kl} — элементы матриц $C(\tau)$ и $K_x(\tau, \sigma)$ и $p, q = 1, 2, \dots, m$; $i, j = 1, 2, \dots$

Аналогично матрицу $K_x(t, \sigma)C^T(\sigma)$ представим рядом Фурье $K_x(t, \sigma)C^T(\sigma) = \sum_{i,j=1}^\infty e_i(t)\mathbf{K}_{ij}^1e_j(\sigma)$, где

$\mathbf{K}_{ij}^1$ — матрица, составленная из коэффициентов Фурье элементов матрицы $K_x(t, \sigma)C^T(\sigma)$:

$$\tilde{k}_{ij}^{pq} = \int_0^T \int_0^T k^{pq}(\tau, \sigma)e_i(\tau)e_j(\sigma) d\tau d\sigma,$$

а $k^{pq}(\tau, \sigma) = \sum_{l=1}^n k_{pl}c_{lq}$ — элемент матрицы $K_x(t, \sigma)C^T(\sigma)$, стоящий в p -й строке и q -м столбце.

Зафиксируем некоторое число N и определим следующие матрицы: $K_N(\tau, \sigma) = \sum_{i,j=1}^N e_i(\tau)\mathbf{K}_{ij}e_j(\sigma)$,

$K_N^1(t, \sigma) = \sum_{i,j=1}^N e_i(t)\mathbf{K}_{ij}^1e_j(\sigma)$. Положим $B_N^T(\tau) \equiv [e_1(\tau)I_m \ e_2(\tau)I_m \ \dots \ e_N(\tau)I_m]$, где I_m — единичная матрица порядка m . Матрица $B_N^T(\tau)$ имеет размерность $m \times mN$ и ранг, равный m . Пусть I_n — единичная матрица порядка n . Тогда $F_N^T(\tau) \equiv [e_1(\tau)I_n \ e_2(\tau)I_n \ \dots \ e_N(\tau)I_n]$. Матрица $F_N^T(\tau)$ имеет размерность $n \times nN$, ранг матрицы равен n . Определим матрицы

$$A_N \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{порядка } mN \text{ и} \quad L_N \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^1 & \mathbf{K}_{12}^1 & \dots & \mathbf{K}_{1N}^1 \\ \mathbf{K}_{21}^1 & \mathbf{K}_{22}^1 & \dots & \mathbf{K}_{2N}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{N1}^1 & \mathbf{K}_{N2}^1 & \dots & \mathbf{K}_{NN}^1 \end{bmatrix} \quad \text{размерности } nN \times mN.$$

Тогда матрицы $K_N(\tau, \sigma)$ и $K_N^1(t, \sigma)$ можно представить в виде

$$K_N = B_N^T(\tau)A_NB_N(\sigma), \quad K_N^1(t, \sigma) = F_N^T(t)L_NB_N(\sigma). \quad (7)$$

Далее рассмотрим уравнение

$$K_N^1(t, \sigma) = \int_0^t h_{\alpha N}(t, \tau) K_N(\tau, \sigma) d\tau + h_{\alpha N}(t, \tau) S_\alpha(\sigma). \tag{8}$$

Подставляя в уравнение (8) выражение (7), получим

$$F_N^T(t) L_N B_N(\sigma) = \int_0^t h_{\alpha N}(t, \tau) B_N^T(\tau) A_N B_N(\sigma) d\tau + h_{\alpha N}(t, \tau) S_\alpha(\sigma). \tag{9}$$

Отметим, что матрица $S_\alpha(\sigma)$ положительно определена при $\alpha > 0$; следовательно, существует ограниченная обратная матрица $S_\alpha^{-1}(\sigma) = [\alpha I_m + V(\sigma)]^{-1}$. Умножим (9) справа на выражение $S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma)$ и, интегрируя полученное соотношение по σ от 0 до t , находим, что

$$F_N^T(t) L_N \int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma = \int_0^t h_{\alpha N}(t, \tau) B_N^T(\tau) d\tau A_N \int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma + \int_0^t h_{\alpha N}(t, \sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma. \tag{10}$$

Обозначим $Q_{\alpha N}(t) \equiv \int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma$. Отметим, что матрица $Q_{\alpha N}(t)$ имеет размерность $mN \times mN$; это симметрическая и неотрицательно определенная матрица, $Q_{\alpha N}(0) = 0$. Ранг матрицы $B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma)$ равен m , а порядок равен mN . Ранг матрицы $\int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma$ зависит от элементов матрицы $S_\alpha^{-1}(\sigma)$. Так, например, если матрица интенсивности вырожденного белого шума $V(\sigma)$ не зависит от времени, т.е. $V(\sigma) = V$, то ранг матрицы $Q_{\alpha N}(t)$ равен mN и существует ограниченная обратная матрица $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$.

Действительно, матрица $B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N(\sigma)$ имеет вид

$$B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N(\sigma) = \begin{bmatrix} e_1 S_\alpha^{-1} e_1 & e_1 S_\alpha^{-1} e_2 & \dots & e_1 S_\alpha^{-1} e_N \\ e_2 S_\alpha^{-1} e_1 & e_2 S_\alpha^{-1} e_2 & \dots & e_2 S_\alpha^{-1} e_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_N S_\alpha^{-1} e_1 & e_N S_\alpha^{-1} e_2 & \dots & e_N S_\alpha^{-1} e_N \end{bmatrix},$$

где $e_i(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) e_j(\sigma) = \begin{bmatrix} e_i s_{11} e_j & e_i s_{12} e_j & \dots & e_i s_{1m} e_j \\ e_i s_{21} e_j & e_i s_{22} e_j & \dots & e_i s_{2m} e_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_i s_{m1} e_j & e_i s_{m2} e_j & \dots & e_i s_{mm} e_j \end{bmatrix}$, а s_{kl} — элементы матрицы $S_\alpha^{-1}(\sigma)$. Элементы

матрицы $\int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N^T(\sigma) d\sigma$ определяются соотношениями $\int_0^t e_i(\sigma) s_{pq}(\sigma) e_j(\sigma) d\sigma$, $i, j = 1, 2, \dots, N$; $p, q = 1, 2, \dots, m$. Если матрица интенсивности шума не зависит от времени, то

$$\int_0^T e_i(\sigma) s_{pq} e_j(\sigma) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ s_{pq}, & \text{при } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad p, q = 1, 2, \dots, m;$$

матрица $Q_{\alpha N}(T)$ в блочной форме представима формулой $Q_{\alpha N}(T) = \begin{bmatrix} S_\alpha^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_\alpha^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_\alpha^{-1} \end{bmatrix}$. Ранг матрицы $Q_{\alpha N}(T)$ равен mN , а матрица $Q_{\alpha N}(t)$ — положительно определена.

Полагаем, что матрица $S_\alpha^{-1}(\sigma)$ такова, что $Q_{\alpha N}(t)$ положительно определенная матрица и существует ограниченная обратная матрица $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$. Тогда уравнение (10) можно записать следующим образом:

$$F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) = \int_0^t h_{\alpha N}(t, \tau) B_N^T(\tau) d\tau [A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}], \quad (11)$$

где I_{mN} — единичная матрица порядка mN . Решение уравнения (11) будем искать в виде

$$h_{\alpha N}(t, \tau) = \eta(t - \tau) F_N^T(t) L_N Q_{\alpha N}(t) Y_N(t) B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau), \quad (12)$$

где $\eta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \leq t; \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$, а $Y_N(t)$ — неизвестная матрица.

Подставляя выражение (12) в уравнение (11) и учитывая, что $Q_{\alpha N}(t) = \int_0^t B_N(\sigma) S_\alpha^{-1}(\sigma) B_N(\sigma) d\sigma$, получим равенство

$$F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) = F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) Y_N(t) Q_{\alpha N}(t) [A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]. \quad (13)$$

Так как матрица A_N неотрицательная (по построению), а матрица $Q_{\alpha N}(t)$ положительно определенная при $t > 0$, то существуют ограниченные обратные матрицы $[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]^{-1}$ и $Q_{\alpha N}^{-1}(t)$. Умножая (13) справа на $[A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t)$, находим, что

$$F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) [A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) = F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) Y_N(t). \quad (14)$$

Вычислим [6] псевдообратную матрицу к матрице $F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t)$. Она имеет вид

$$[F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t)]^+ = Q_{\alpha N}^T(t) L_N^T F_N(t) [F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t) Q_{\alpha N}^T(t) L_N^T F_N(t)]^{-1}.$$

Умножим слева выражение (14) на псевдообратную матрицу $[F_N^T(t)L_N Q_{\alpha N}(t)]^+$. Тогда решение (14) с минимальной нормой представляется выражением:

$$Y_N(t) = [A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t).$$

Подставим это соотношение в (12). Тогда

$$h_{\alpha N}(t, \tau) = \eta(t - \tau) F_N^T(t) L_N Q_{\alpha N}(t) [A_N Q_{\alpha N}(t) + I_{mN}]^{-1} Q_{\alpha N}^{-1}(t) B_N(\tau) S_\alpha^{-1}(\tau). \quad (15)$$

Итак, найдено решение уравнения (8). Далее покажем, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность решений (15) сходится к решению уравнения (6). Умножая слева уравнения (6) и (8) на произвольный вектор z из евклидова пространства E_n , получим

$$z^T K_x(t, \sigma) C^T(\sigma) = \int_0^t z^T h_\alpha(t, \tau) C(\tau) K_x(\tau, \sigma) C^T(\sigma) d\tau + z^T h_\alpha(t, \sigma) S_\alpha(\sigma), \quad (16)$$

$$z^T K_N^1(t, \sigma) = \int_0^t z^T h_{\alpha N}(t, \tau) K_N(\tau, \sigma) d\tau + z^T h_{\alpha N}(t, \sigma) S_\alpha(\sigma). \quad (17)$$

Введем обозначения $f \equiv C(\sigma) K_x(t, \sigma) z$, $u \equiv h_\alpha^T(t, \tau) z$, $Au \equiv \int_0^t C(\sigma) K_x(\tau, \sigma) C^T(\tau) h_\alpha^T(t, \tau) z d\tau$,

$f_N \equiv [K_N^1(t, \sigma)]^T z$, $u_N \equiv h_{\alpha N}^T(t, \tau) z$, $A_N u_N \equiv \int_0^t K_N(\tau, \sigma) h_{\alpha N}^T(t, \tau) z d\tau$ и запишем уравнения (16) и (17) в операторной форме:

$$f = Au + S_\alpha u, \quad (18)$$

$$f_N = \mathcal{A}_N u_N + S_\alpha u_N.$$

Отметим, что существуют ограниченные операторы $\mathcal{B} \equiv [\mathcal{A} + S_\alpha]^{-1}$, $\mathcal{B}_N \equiv [\mathcal{A}_N + S_\alpha]^{-1}$. Рассмотрим уравнение $g = \mathcal{A}_N u + S_\alpha u$, где g — произвольный вектор из $L_2([0, t])$. Это уравнение можно записать в виде $(S_\alpha + \mathcal{A})u + (\mathcal{A}_N - \mathcal{A})u = g$. Оператор $\mathcal{B}_N$ можно представить как $\mathcal{B}_N = [I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^{-1}\mathcal{B}$. Действительно, рассмотрим оператор $[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]$, где I — единичный оператор. Тогда

$$\begin{aligned} I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) &= I - \mathcal{B}\mathcal{A}_N + \mathcal{B}\mathcal{A} = I - \mathcal{B}\mathcal{A}_N + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}S_\alpha - \mathcal{B}S_\alpha = \\ &= I - \mathcal{B}(\mathcal{A} + S_\alpha) + \mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha) = \mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha) \end{aligned}$$

и, следовательно, $[\mathcal{B}(\mathcal{A}_N + S_\alpha)]^{-1} = (\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1}\mathcal{B}^{-1}$; отсюда получаем, что $\mathcal{B}_N = [I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^{-1}\mathcal{B}$.

Имеем $\| \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) \| \leq \| \mathcal{B} \| \| \mathcal{A}_N - \mathcal{A} \| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ (по построению операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_N$). Выберем N таким, чтобы выполнялось неравенство $\| \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) \| < 1$. Тогда оператор $[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^{-1}$ является суммой ряда [7]

$$[I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^{-1} = I + [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})] + [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^2 + \dots + [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^k + \dots;$$

следовательно, $\mathcal{B}_N g = (\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1}g = [I - \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^{-1}\mathcal{B}g = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^k \mathcal{B}g$. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} \| \mathcal{B}_N g - \mathcal{B}g \|_0 &= \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^k - I \right) \mathcal{B}g \right\|_0 = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} [\mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A})]^k \right) \mathcal{B}g \right\|_0 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \| \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) \|^k \| \mathcal{B} \| \| g \|_0 = \frac{\| \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) \|}{1 - \| \mathcal{B}(\mathcal{A}_N - \mathcal{A}) \|} \| \mathcal{B} \| \| g \|_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\| u_N - u \|_0 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где u — решение уравнения (18). Действительно,

$$\begin{aligned} \| u_N - u \|_0 &= \| (\mathcal{A}_N + S_\alpha)^{-1} f_N - (\mathcal{A} + S_\alpha)^{-1} f \|_0 = \| \mathcal{B}_N f_N - \mathcal{B}f \|_0 = \\ &= \| \mathcal{B}_N f_N - \mathcal{B}_N f + \mathcal{B}_N f - \mathcal{B}f \|_0 \leq \| \mathcal{B}_N \| \| f_N - f \|_0 + \| \mathcal{B}_N f - \mathcal{B}f \|_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{19}$$

так как $\| f_N - f \|_0 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ по построению.

Отсюда следует, что при произвольном $z \in E_n$ последовательность $h_{\alpha_N}^T(t, \tau)z \rightarrow h_\alpha^T(t, \tau)z$ при $N \rightarrow \infty$; следовательно, последовательность приближенных решений уравнения (8) стремится при $N \rightarrow \infty$ к решению уравнения (6). Итак, фактически доказана следующая

Теорема. При каждом фиксированном $t \in (0, T]$ справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} M \left[(z, x(t) - \hat{x}_N(t))_n^2 \right] = m(t), \quad \hat{x}_N(t) = \int_0^t h_{\alpha_N}(t, \tau) y(\tau) d\tau.$$

Справедливость ее вытекает из (19) и теоремы 4.4 доказанной в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
2. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
3. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 1. Обработка измерений при исследовании сложных систем. Киев: Наукова думка, 1982.
4. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Филترация шумов. Киев: Наукова думка, 1979.
5. Колос М.В., Колос И.В. Методы оптимальной линейной филтрации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001.
6. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
8. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию
11.09.2008