УДК 621.3.049.77.029:681.3.06

МЕТОД ИМПЕДАНСНОГО АНАЛОГА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПРОСТРАНСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

С. А. Иванов[1], Б. В. Сестрорецкий[2], А. Н. Боголюбов[1]

Рассмотрены основные положения метода импедансного аналога электромагнитного пространства, предназначенного для численного решения двух- и трехмерных задач электродинамики во временно́й и частотной областях. Кратко изложена методика решения двумерных скалярных и трехмерных векторных начально-краевых задач электродинамики. Рассмотрены некоторые теоретические результаты и практические приложения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06–01–00146).

Ключевые слова: метод импедансного аналога электромагнитного пространства, вычислительная электродинамика, уравнения Максвелла, волновое уравнение, временная область, начально-краевая задача, высокотемпературная плазма.

1. Введение. Настоящий обзор посвящен эффективному методу численного моделирования широкого класса электродинамических систем и устройств СВЧ, известному как метод импедансного аналога электромагнитного пространства (ИАЭП) [1 – 3]. Данный метод является логическим продолжением метода электрических сеток, основателем которого является советский математик С. А. Гершгорин. В своей пионерской работе от 1929 г. [4] С. А. Гершгорин предложил использовать электрическую сетку для экспериментального исследования уравнения Лапласа. Серия работ С. А. Гершгорина была для своего времени революционной и привела к возникновению нового класса аналоговых вычислительных машин — электроинтеграторов сеточного типа [5 – 12], которые позволили отказаться от примитивного электромеханического моделирования физических систем, господствовавшего в то время. В кратчайшие сроки были созданы электроинтеграторы, позволяющие исследовать системы, содержащие более миллиона ячеек — рекорд, превзойденный цифровыми ЭВМ менее 15 лет назад.

Первые попытки создания сеточных радиотехнических моделей для уравнений Максвелла были предприняты в 40-е годы прошлого столетия Габриэлем Кроном [13 – 15]. Для двумерных задач модели были правильные, однако полная трехмерная сеточная модель Крона [13] была ошибочна, так как не была энергетически эквивалентна уравнениям Максвелла. Несмотря на свою глубину, метод, названный автором диакоптикой, оказался весьма труден для восприятия, и поэтому широкого распространения не получил.

В начале 1970-х гг. методы радиотехнических аналогий пережили новое рождение. В Советском Союзе благодаря работам Б. В. Сестрорецкого в 1967 – 1976 гг. [1 – 3] появился метод импедансного аналога электромагнитного пространства. Зарубежный метод, предложенный П. Джонсом в 1971 г., получил название TLM, или метод матриц линий передач [16 – 18]. Отметим также работы, выполненные под руководством В. В. Никольского [19, 20].

Первые теоретические и практические исследования метода ИАЭП относятся к 1967–74 гг. В частности, исследовалось поверхностное сопротивление R_s ионно-легированных распределенных кремниевых pin-структур (для коммутаторов в радиометрах миллиметрового диапазона $0.2 \div 2$ см) при учете закона изменения проводимости $\sigma(y)$ по толщине слоя (прямоугольный, гауссовый, экспоненциальный). В моделирующую лестничную LC-схему вводились параметры $\big[\sigma(y) + i\omega\varepsilon\big]dy$ и $i\omega\mu_0\,dy$. Величина R_s, приближенно равная входному сопротивлению лестничной LC-схемы, определялась численными методами (редукция LC-схемы, приближенные интегральные соотношения) [1, 2]. Замена RLC-схемы генератора Ганна на $R\tau$-схему, содержащую замкнутые и разомкнутые шлейфы с временем задержки, кратным τ (τ — время пролета домена в диоде Ганна), позволила исследовать и устранить неустойчивость генератора, работающего в новом “ключевом” режиме [21, 22].

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Ленинские горы, 119992, Москва; e-mail: TAMIC@mail.ru, bogan7@yandex.ru

[2] НПО им. С.А. Лавочкина, ул. Ленинградская, д. 24, 141400, г. Химки, Московская обл.; e-mail: const0@online.ru

© Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М. В. Ломоносова

Достигнутый к настоящему времени уровень программ, реализующих различные идеи метода ИАЭП, позволяет проектировать сложные волноведущие системы без экспериментальной доводки образцов, поскольку точность программ зачастую превышает возможности измерительной аппаратуры [23, 24].

В теоретическом плане метод ИАЭП находится в стадии развития, осваивая такие сложные объекты, как подмагниченная плазма в термоядерных установках TOKAMAK и ITER [25 – 28], исследование взаимодействия антенны в крупногабаритных системах (радарные полигоны, антенны на многоступенчатых спутниковых антеннах). Начаты исследования релятивистских эффектов в различных средах [29]. Для примера: в проектируемой установке ITER требуется анализировать отраженные сигналы от высокотемпературной плазмы сечением до 500×500 длин волн при учете, что плазма может иметь отрицательные значения диэлектрической постоянной. В результате длительных исследований была создана программа TAMIC Rt-H Planar [25]. Результаты расчетов по этой программе в Курчатовском институте РАН, представленные в 2003 г. на международном совещании по диагностике ITER, произвели большое впечатление и показали, что код практически не имеет конкурентов по решаемым объемам и скорости счета. В настоящее время данный пакет используется в РНЦ "Курчатовский институт" для оптимизации волноводной системы рефлектометрической диагностики установки ITER, а также для сравнения результатов расчета параметров плазмы с экспериментальными данными, полученными на установке TOKAMAK-10. На сегодняшний день это единственный пакет, применяемый для диагностики плазмы в данной установке.

2. Основы метода ИАЭП. Метод ИАЭП относится к классу сеточных численных методов, однако, в отличие от метода конечных разностей и метода конечных элементов, базируется на существенно отличной методологии построения вычислительных алгоритмов. Согласно данной методологии при решении любой задачи математической физики выделяется важный этап, предшествующий строгой постановке задачи, — построение эквивалентной радиотехнической схемы устройства (рис. 1).

В случае, когда речь идет об электродинамике, эквивалентная радиотехническая схема устройства — это такая радиотехническая схема, процессы в которой близки в некотором смысле к электромагнитным процессам в реальном объекте. Возбуждая одну и ту же эквивалентную схему сигналами различной формы, можно решать различные задачи математической физики, сводя исходную задачу к задаче теории цепей. Поэтому можно сказать, что эквивалентная схема устройства является радиотехническим, или импедансным, аналогом реального физического объекта. При таком подходе процедуры постановки и решения задач математической физики существенно вторичны по отношению к процедурам построения эквивалентных схем, поскольку последние обладают значительно большей общностью.

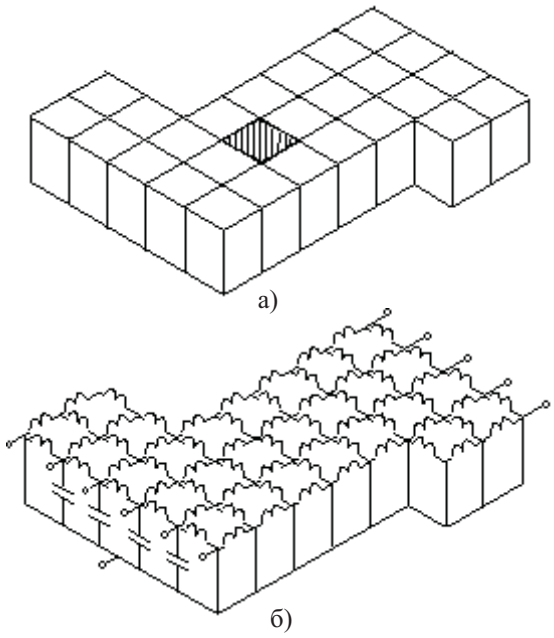


Рис. 1. Волноводное устройство (а) и его эквивалентная радиотехническая схема (б)

Базовой концепцией метода является концепция дискретного сеточного вакуума [3, 23]. Благодаря этой концепции и происходит смещение акцентов от решения задач математической физики к построению эквивалентных схем. Для этого вводится понятие *дискретного сеточного вакуума*, или *эквивалентной схемы пустого пространства*, основное предназначение которого — достаточно точно описывать плоские волны. Строится сеточный вакуум следующим образом: непрерывное пустое пространство регулярным образом разбивается на одинаковые элементарные объемы, каждому элементарному объему сопоставляется его эквивалентная радиотехническая схема, после чего эквивалентные схемы элементарных объемов объединяются в единую схему — дискретный сеточный вакуум.

Различают два вида схем: RLC-схемы с сосредоточенными элементами, применяемые для расчета в частотной области, и универсальные $R\tau$-схемы с распределенными параметрами, которые могут исследоваться как в частотной, так и во временно́й области. *Эквивалентные радиотехнические RLC- и $R\tau$-схемы устройств (в т.ч. вакуума) называются также импедансными RLC- и $R\tau$-сетками.* Отметим, что RLC- и $R\tau$-сетки всегда консервативны (как радиотехнические схемы), т.е. для них выполняется закон сохранения электромагнитной энергии (естественно, при отсутствии потерь в веществе). Простей-

шие эквивалентные двумерные схемы элементарного объема приведены на рис. 2 а и 2 б. Данные схемы применяются соответственно для решения краевых задач для уравнения Гельмгольца и начально-краевых задач для волнового уравнения.

Для построения эквивалентных схем элементарных объемов могут использоваться как классические приемы [30], так и приемы, непосредственно разработанные в рамках ИАЭП [23, 25]. Среди последних укажем "концепцию виртуальных ТЕМ-волноводов", называемую также "концепцией плоских волн" [31, 32]. Согласно последней эквивалентная схема элементарного объема собирается из отдельных LC-цепочек или отрезков линий передачи, моделирующих одномерные ТЕМ-волноводы. При таком подходе не только дискретный сеточный вакуум, но и эквивалентная схема элементарного объема строятся исходя из интегральных представлений, т.е. представлений о решениях спектральной задачи для пустого пространства.

Для количественного описания точности дискретного сеточного вакуума введено понятие сеточной дисперсии [3, 23, 33]. Основные типы сеточной дисперсии следующие. *Фазовая сеточная дисперсия* — это зависимость фазовой скорости плоской сеточной волны от направления волнового вектора. *Амплитудная сеточная дисперсия* — это зависимость характеристического сопротивления плоской сеточной волны от направления волнового вектора. Понятие сеточной дисперсии по сути является интегральным аналогом аппроксимации, но выгодно отличается от последней бóльшим количеством описываемых параметров и тем, что базируется на описании точных решений, а не функций более широкого класса.

Таким образом, сеточный вакуум последовательно строится как дискретный радиотехнический аналог пустого непрерывного электромагнитного пространства, причем в понятие аналогии вкладывается близость электромагнитных процессов, происходящих в этих объектах. Отметим, что это построение происходит до постановки задачи математической физики, а получаемая схема сеточного вакуума, вообще говоря, не зависит даже от класса вышеуказанной задачи.

Эта же идея используется и при построении радиотехнических аналогов более сложных объектов. Свойства вещества, "погруженного" в сетку вакуума, учитываются дополнительными реактивными двухполюсниками, которые "навешиваются" на пары клемм вакуумной сетки. В RLC-схемах для этих целей используются емкости и индуктивности, в $R\tau$-схемах — короткозамкнутые и разомкнутые шлейфы. Если вводимое вещество поглощает или генерирует СВЧ-энергию, то в "навешиваемые" двухполюсники вводятся сопротивления и источники ЭДС.

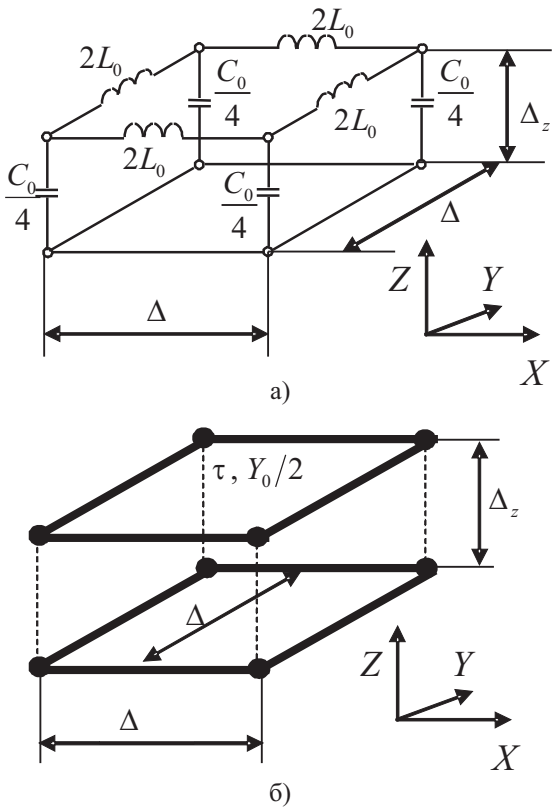


Рис. 2. Эквивалентные схемы элемента пространства: а) RLC-схема, б) $R\tau$-схема

Границы исследуемой системы описываются аналогичным образом RLC- и $R\tau$-схемами. Для систем со сложной геометрией может производиться сгущение и изменение формы элементарных объемов импедансной сетки.

Расчет устройств может вестись как на конечных, так и на бесконечных сетках. Для каждого случая построение эквивалентной схемы устройства, вопросы возбуждения и поглощения электромагнитной энергии имеют свои особенности. В данной работе представлены только конечные сетки. Бесконечные сетки рассмотрены в работах [34, 35].

3. Трехмерные импедансные сетки.

3.1. Трехмерные эквивалентные схемы. Для построения трехмерного сеточного вакуума, предназначенного для анализа трехмерных векторных задач в полной электродинамике, были предложены две эквивалентные схемы элементарных объемов — 12-входовые элементы роторного [31] (рис. 3 а) и потокового [32] типов (рис. 3 б).

У роторного элемента входы (пары клемм) располагаются на ребрах элементарного объема Δ^3 с ориентацией электрического поля по линии ребер (круг обозначает пару клемм; черта, пересекающая

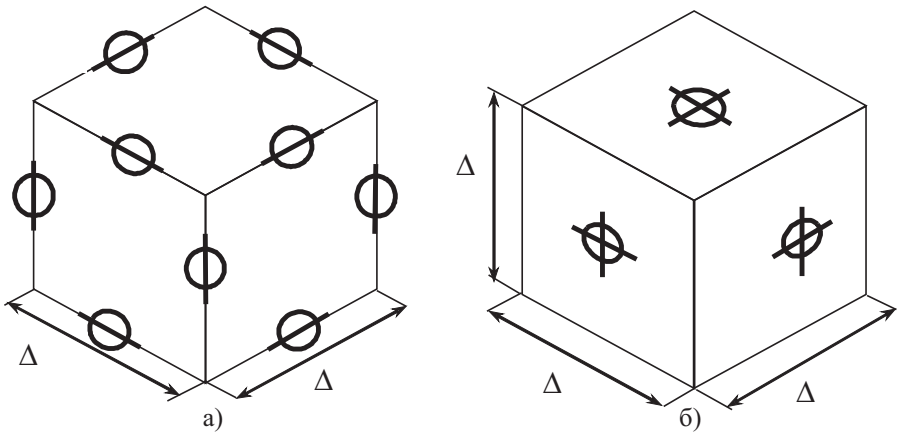


Рис. 3. Размещение пар клемм на ребрах элемента роторного типа (а) и ортогональных пар клемм в центрах граней элемента потокового типа (б) для элементарного объема кубической формы Δ^3

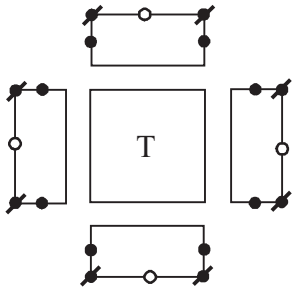


Рис. 4. *LC*-схема грани роторного кубика

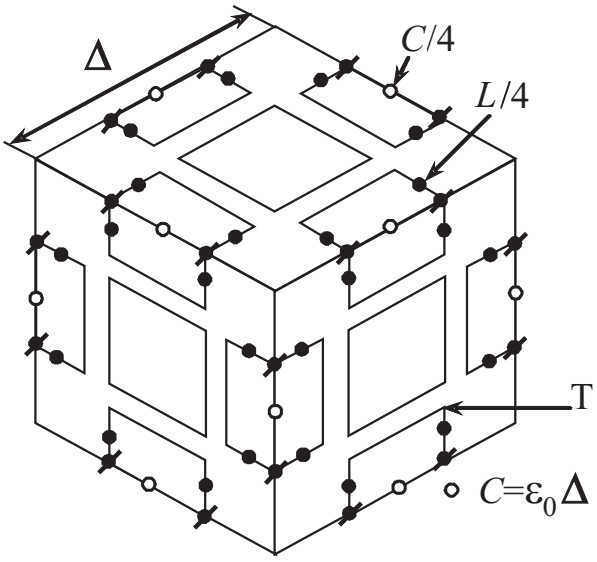


Рис. 5. Эквивалентная *LC*-схема роторного элемента

круг — ориентацию электрического поля). У потокового элемента (ПЭ) входы (по две пары клемм с ортогональными поляризациями электрического поля) размещаются в центрах каждой грани куба.

LC-схема роторного элемента состоит из шести одинаковых *LC*-схем рис. 4, расположенных на гранях элементарного объема (на этом и следующих рисунках черными кружками обозначены индуктивности, белыми — емкости). Каждая такая схема представляет собой симметричный 8-полюсник: четыре *LC*-цепочки, связанные между собой идеальным симметрирующим трансформатором. Основная функция трансформатора — обеспечение равенства токов во всех четырех плечах. Полная *LC*-схема роторного кубика получается объединением шести описанных схем в одну: 8-полюсники размещаются на гранях элемента, входы 8-полюсников, расположенные на одном ребре, объединяются параллельно. Полная *LC*-схема роторного оператора приведена на рис. 5.

Таким образом, у роторного элемента получаем 12 входов (по числу ребер). Отметим, что роторная схема рис. 5 отличается от схемы кубика Крона наличием симметрирующих трансформаторов. Именно они обеспечивают равенство токов во всех четырех плечах на одной грани элементарного объема и, таким образом, энергетическую эквивалентность роторной схемы уравнениям Максвелла.

Объединение отдельных кубиков в единую сетку происходит с помощью слияния одинаковых *LC*-схем, расположенных на гранях элементарных объемов (рис. 6). При этом индуктивности и емкости подключаются параллельно друг к другу, т.е. получаем уменьшение индуктивностей вдвое и увеличение емкостей вчетверо.

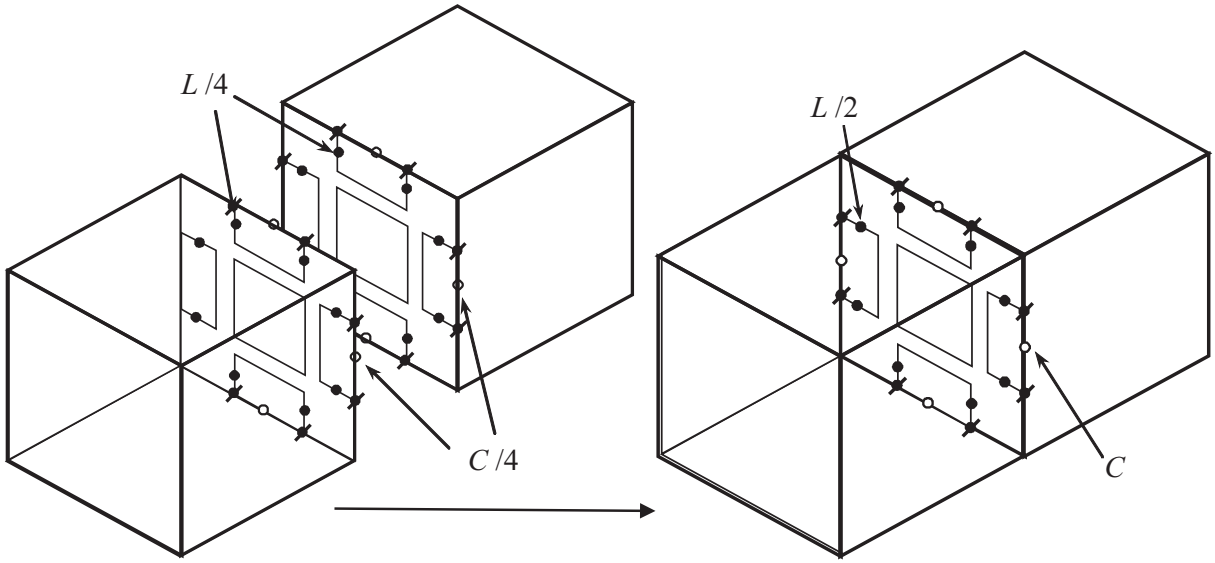


Рис. 6. Объединение отдельных кубиков в единую сетку

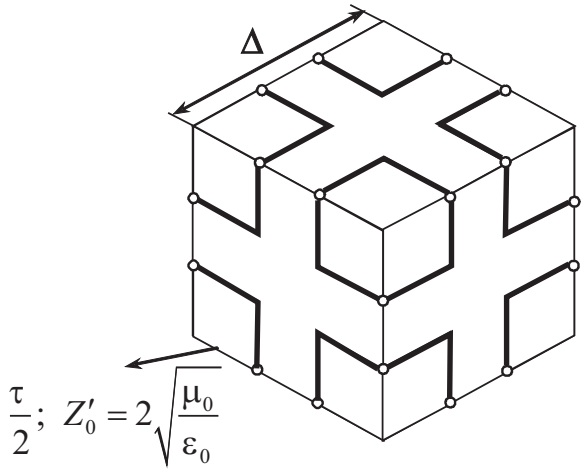


Рис. 7. Эквивалентная $R\tau$-схема роторного элемента

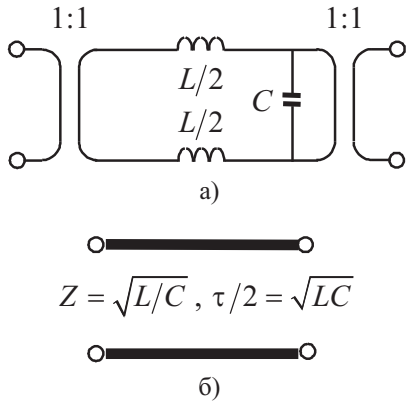


Рис. 8. Преобразование LC-схемы (а) в отрезок линии передач (б) с волновым сопротивлением $Z = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ и временем задержки $\dfrac{\tau}{2} = \sqrt{LC}$

$R\tau$-схема роторного кубика (рис. 7) получается из его LC-схемы на основе эквивалентности LC-схемы рис. 8 а и короткого отрезка идеальной двухпроводной линии рис. 8 б. $R\tau$-схема также состоит из шести 8-полюсников, расположенных на гранях кубика. Эти полюсники являются последовательными узлами, состоящими из четырех одинаковых линий передач с временно́й задержкой $\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{\Delta}{4}c$, где c — скорость света в вакууме, Δ — длина ребер роторного кубика и τ — временной шаг.

Алгоритм расчета роторной $R\tau$-сетки может быть легко сформулирован в терминах токов и напряжений [23, 31] и является аналогом консервативного варианта конечно-разностной схемы метода FDTD. Для расчета по данному алгоритму требуется хранить шесть параметров на один элемент (три напряжения и три тока) и использовать 27 операций на один временной такт τ.

Вещество моделируется подключением дополнительных двухполюсников к эквивалентной схеме вакуума, т.е. влияние вещества — локально, а все взаимодействие осуществляется через сеточный вакуум. Такую модель называют моделью информационного многополюсника [36]. Модифицированная $R\tau$-схема роторного кубика для случая $\varepsilon > \varepsilon_0$ и $\mu > \mu_0$ приведена на рис. 9.

Эквивалентные схемы ПЭ можно построить несколькими способами [23, 32]. Наиболее просто LC-

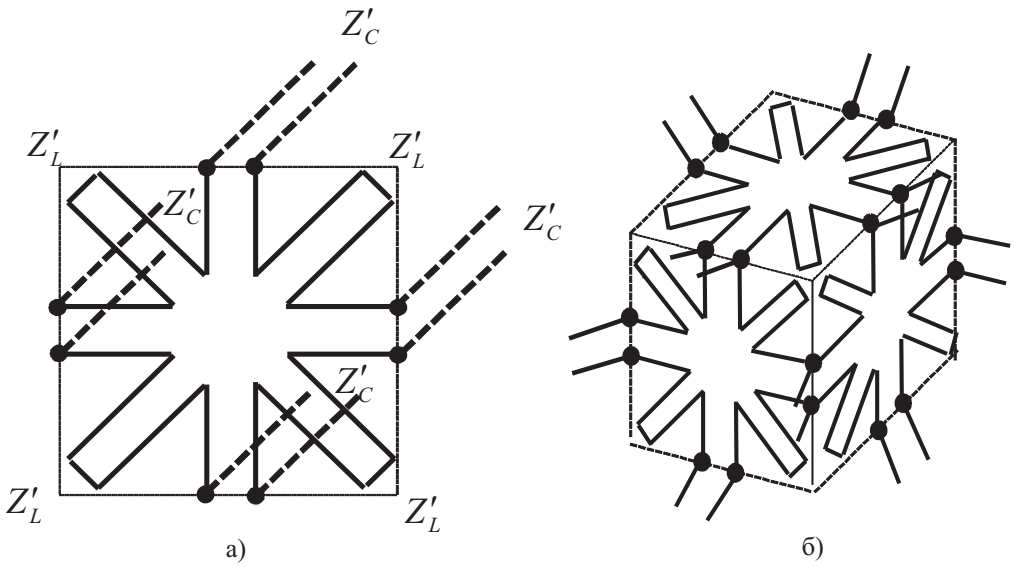


Рис. 9. Эквивалентные модифицированные схемы роторного кубика: а) одной грани; б) роторного кубика в целом

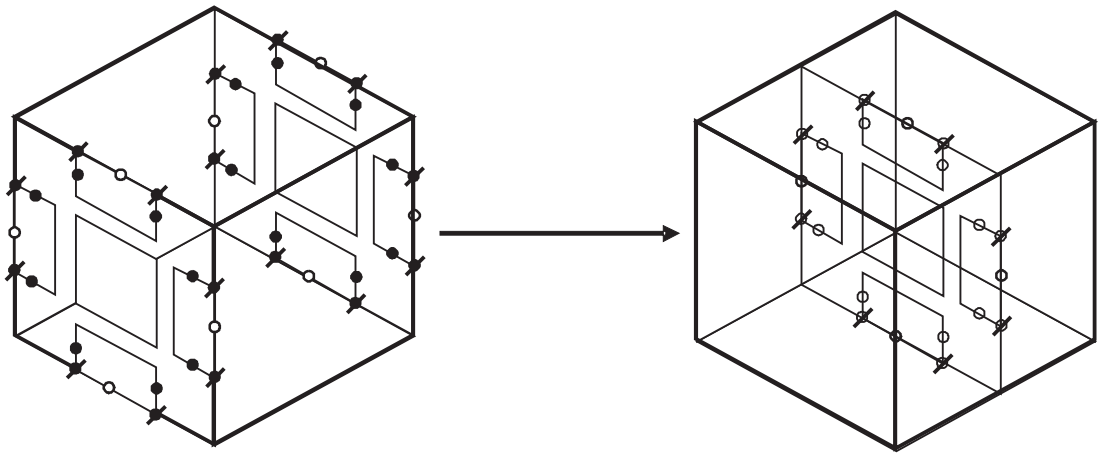


Рис. 10. Перемещение LC-схем граней в центр кубика

и $R\tau$-схемы ПЭ получаются с помощью модификации соответствующих схем роторного элемента. Для этого требуется переместить схемы, расположенные на гранях роторного кубика, в плоскости его симметрии (рис. 10).

Полная схема ПЭ конструируется объединением трех получившихся схем в одну (рис. 11). Для этого внутренние обмотки трансформаторов соединяются в шести точках (кружки увеличенного диаметра).

Получившаяся эквивалентная схема ПЭ состоит из центрального балансного трансформатора и 12 линий передач одинаковой длины, подключенных к его входам (рис. 12). Временны́е задержки в линиях, как и у роторного кубика, равны $\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{\Delta}{4}\,c$. Волновое сопротивление линий равно волновому сопротивлению вакуума.

Отметим, что равенство $\dfrac{\tau}{2} = \dfrac{\Delta}{4}\,c$ означает, что отрезки линий передачи в схемах роторного и потокового элементов имеют электрическую длину $\dfrac{\Delta}{4}$ при геометрической длине $\dfrac{\Delta}{2}$, что эквивалентно локальному движению энергии в линиях передачи с двойной скоростью света. Возникающий известный парадокс о превышении скорости света в рассматриваемой модели объясняется ее классичностью (т.е.

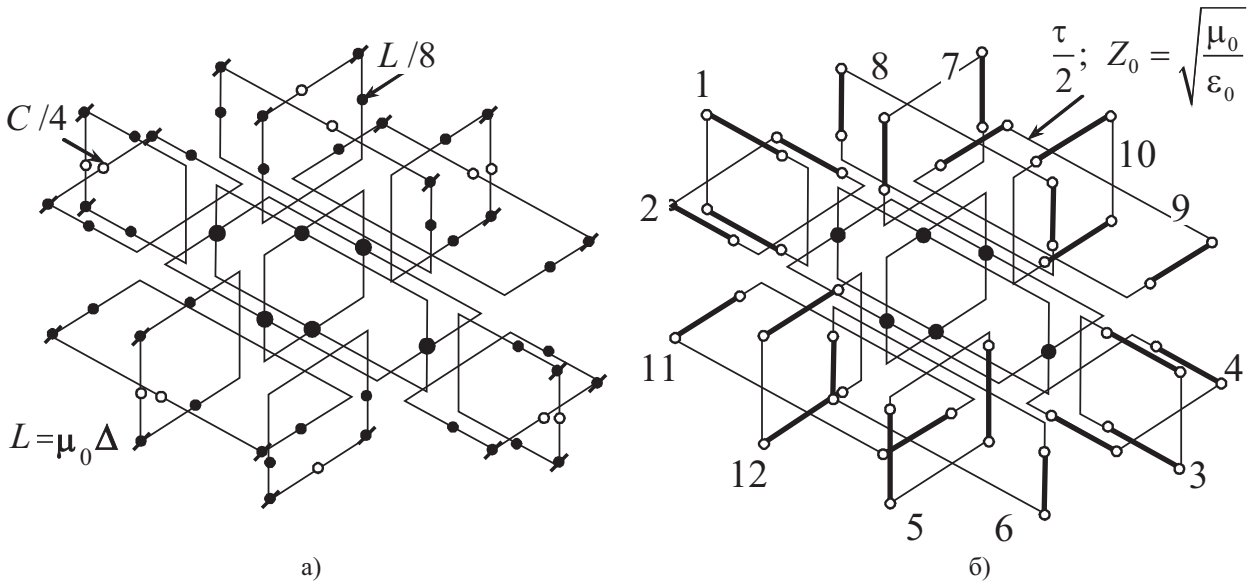


Рис. 11. Эквивалентные LC- (а) и $R\tau$- (б) схемы потокового элемента

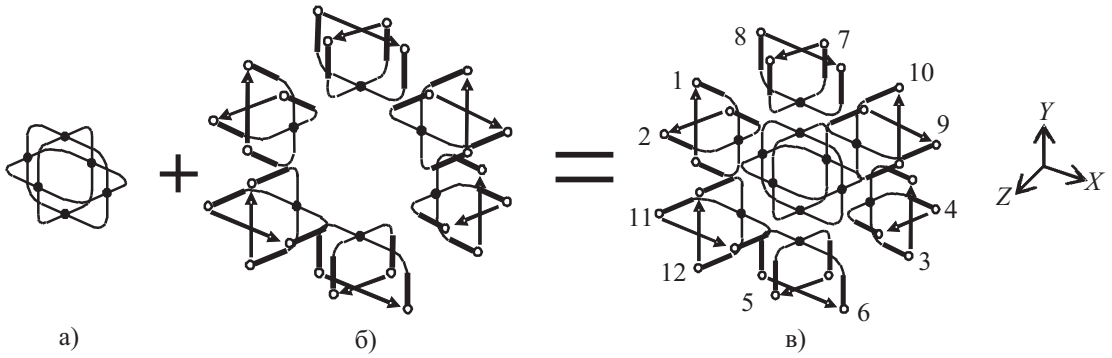


Рис. 12. Схема потокового кубика: а) центральный трансформатор, б) 6 пар линий передачи, в) полная схема

релятивистской неинвариантностью) и дискретностью [37, 38].

Вернемся к описанию потокового элемента. Высокая симметрия центрального трансформатора потокового элемента обусловливает высокую симметрию и простоту его S-матрицы [23, 32, 33]

$$S_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

и, соответственно, высокую скорость расчета. Выводится эта S-матрица очень просто. Если возбуждать только входы 1 и 3, то из симметрии схемы ПЭ следует, что на входах 2, 4, 5, 7, 9 и 11 никаких отраженных волн не будет. Это дает право исключить соответствующие линии передач из схемы ПЭ (рис. 13).

При синфазном возбуждении входов 1 и 3 не будет отраженных волн на входах 6 и 8 (рис. 14 а), а при противофазном возбуждении — на входах 10 и 12 (рис. 14 б).

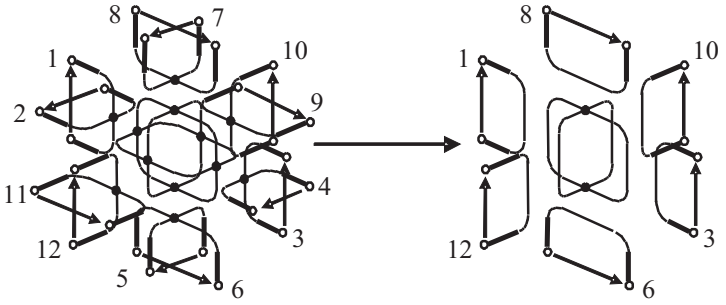
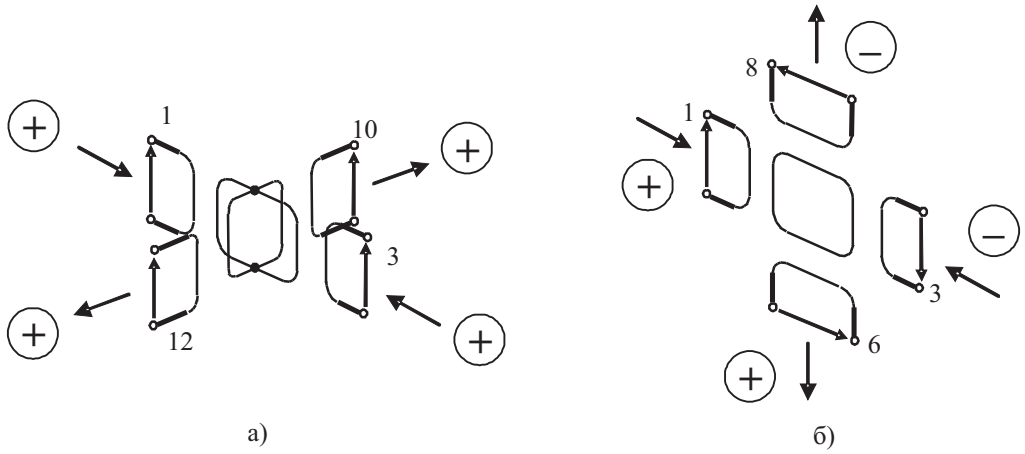


Рис. 13. Усечение схемы потокового элемента при возбуждении входов 1 и 3



а) б)

Рис. 14. Синфазное возбуждение входов 1 и 3 (а), противофазное возбуждение входов 1 и 3 (б)

Складывая возбуждения, получаем картину рассеяния вида рис. 15. На этом рисунке фактически показан первый столбец S-матрицы ПЭ. Другие столбцы получаются с помощью поворотов и симметрии.

3.2. Трехмерная потоковая $R\tau$-сетка. Вычисления во временно́й области. Опишем алгоритм расчета во временно́й области для отдельно взятого потокового элемента. В момент времени $t_0 = 0$ на входах элемента задается 12 падающих импульсов. В течение времени $\dfrac{\tau}{2}$ они двигаются по направлению к трансформатору. В момент времени $t = \dfrac{\tau}{2}$ производится операция "рассеяния": каждый импульс делится на четыре части с уменьшенной вдвое амплитудой. Согласно рис. 15, рассеянные импульсы проходят вправо, влево, вверх и вниз. При этом импульсы, прошедшие вперед и отраженные назад, отсутствуют. В момент времени $t = \tau$ мы имеем 12 отраженных импульсов на гранях ячейки. Отраженные импульсы, в свою очередь, являются падающими для соседних элементов, поэтому в момент времени $t = \tau$ проводится операция "переброса" импульсов между элементами.

Данный алгоритм, как и сам потоковый элемент, был предложен в 1983 г. и долгое время был самым эффективным по совокупности параметров среди алгоритмов своего класса — а именно, сеточных консервативных алгоритмов, предназначенных для решения векторных начально-краевых задач электродинамики. Под совокупностью параметров мы подразумеваем следующий набор: точность расчета, время расчета, используемый объем оперативной памяти и удобство программирования. При вычислениях по этому алгоритму используются только операции сложения, вычитания и деления пополам. Всего хранится 12 параметров на один элемент и используется 30 операций на один временной такт τ. Примерно через 10 – 15 лет были найдены различные варианты оптимизации данного алгоритма. Оптимизированные алгоритмы позволяют хранить шесть параметров на один элемент и использовать 15 операций на один временной такт τ при сохранении точности расчета [39, 40].

Граничные условия для описанного алгоритма вводятся на гранях элементов. Идеальный металл моделируется коротким замыканием клемм на грани, идеальный магнетик (магнитная стенка) — холостым ходом. Алгоритмически это соответствует изменению операции "переброса" импульсов. Например, при введении металла на грани со входами 1 и 2 соответствующие отраженные импульсы не проходят в другие

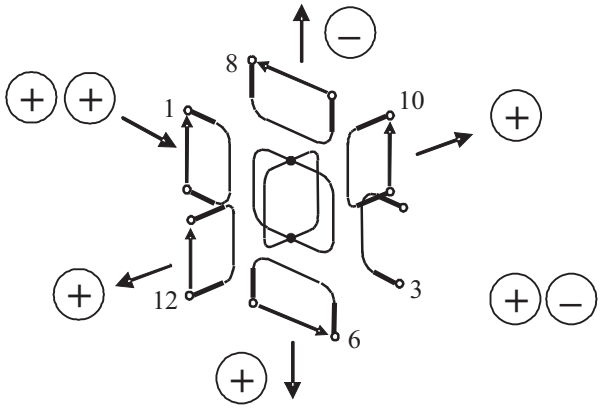


Рис. 15. Рассеяние в усеченной схеме ПЭ при возбуждении входа 1

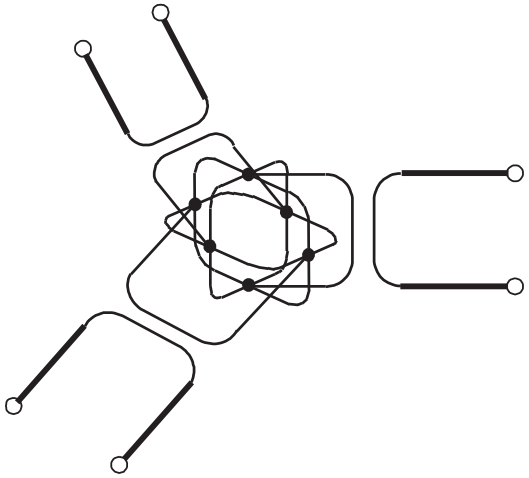


Рис. 16. Модификация схемы центрального трансформатора ПЭ при моделировании диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_a > \varepsilon_0$

кубики, а возвращаются обратно с противоположным знаком. Если же на этой грани ввести магнетик, то отраженные импульсы будут возвращаться обратно без изменения знака.

При моделировании внешних задач применяются поглощающие граничные условия [41 – 43]. В простейшем случае ко входам элементов подключаются резисторы с сопротивлением, равным волновому сопротивлению вакуума. Алгоритмически это означает, что отраженные импульсы полностью поглощаются нагрузкой.

Вещество моделируется так же, как и для роторного кубика — подключением дополнительных двухполюсников к сетке вакуума. Самый простой вариант — подключение двухполюсников к центральному трансформатору (рис. 16).

Введение шлейфов изменяет S-матрицу потокового элемента и увеличивает количество хранимых параметров до 15 – 18 — по общему количеству линий передач, подключенных к центральному трансформатору. В этом случае операция "переброса" импульсов между элементами не изменяется. Точно так же не изменяется и алгоритм учета граничных условий, т.е. получается, что потоковый кубик очень удобен для программирования.

Чтобы показать работу данного алгоритма, рассмотрим распространение плоской сеточной волны. Пусть плоская волна с ориентацией электрического поля "вверх" по оси X распространяется в направлении оси Z (рис. 17). В момент времени $t_0 = 0$ на входах элементов зададим на передних гранях кубиков падающие импульсы-потоки единичной амплитуды — по одному для каждого кубика (рис. 17 а). Направление распространения импульсов обозначим стрелками, направление электрического поля — прямоугольником. В течение времени $\dfrac{\tau}{2}$ импульсы синхронно двигаются по направлению к трансформаторам. В момент времени $t = \dfrac{\tau}{2}$ производится операция "рассеяния": импульсы делятся на четыре части, рассеянные импульсы проходят вправо, влево, вверх и вниз. Амплитуды отраженных импульсов вдвое меньше амплитуды исходных, при этом импульсы, прошедшие вперед и отраженные назад, отсутствуют.

После рассеяния импульсы начинают двигаться к выходам, и в момент времени $t = \tau$ мы имеем по четыре отраженных импульса на гранях ячеек (рис. 17 б). Отраженные импульсы, в свою очередь, являются падающими для соседних элементов, поэтому в момент времени $t = \tau$ проводится операция "переброса" импульсов между элементами (рис. 17 в). Из рис. 17 б видно, что импульсы, рассеянные вправо и влево, имеют одинаковую ориентацию электрического поля. В момент времени $t = \tau$ эти импульсы "встретятся" с импульсами, пришедшими от соседних кубиков, причем ориентации электрического поля этих импульсов будут такими же. Таким образом, операция "переброса" для этих импульсов будет эквивалентна операции отражения от магнитной стенки. Аналогичные рассуждения применимы и к импульсам, рассеянным вверх и вниз. Только в этом случае рассеянные импульсы будут иметь противоположную ориентацию, и операция "переброса" для этих импульсов будет эквивалентна операции отражения от электрической стенки.

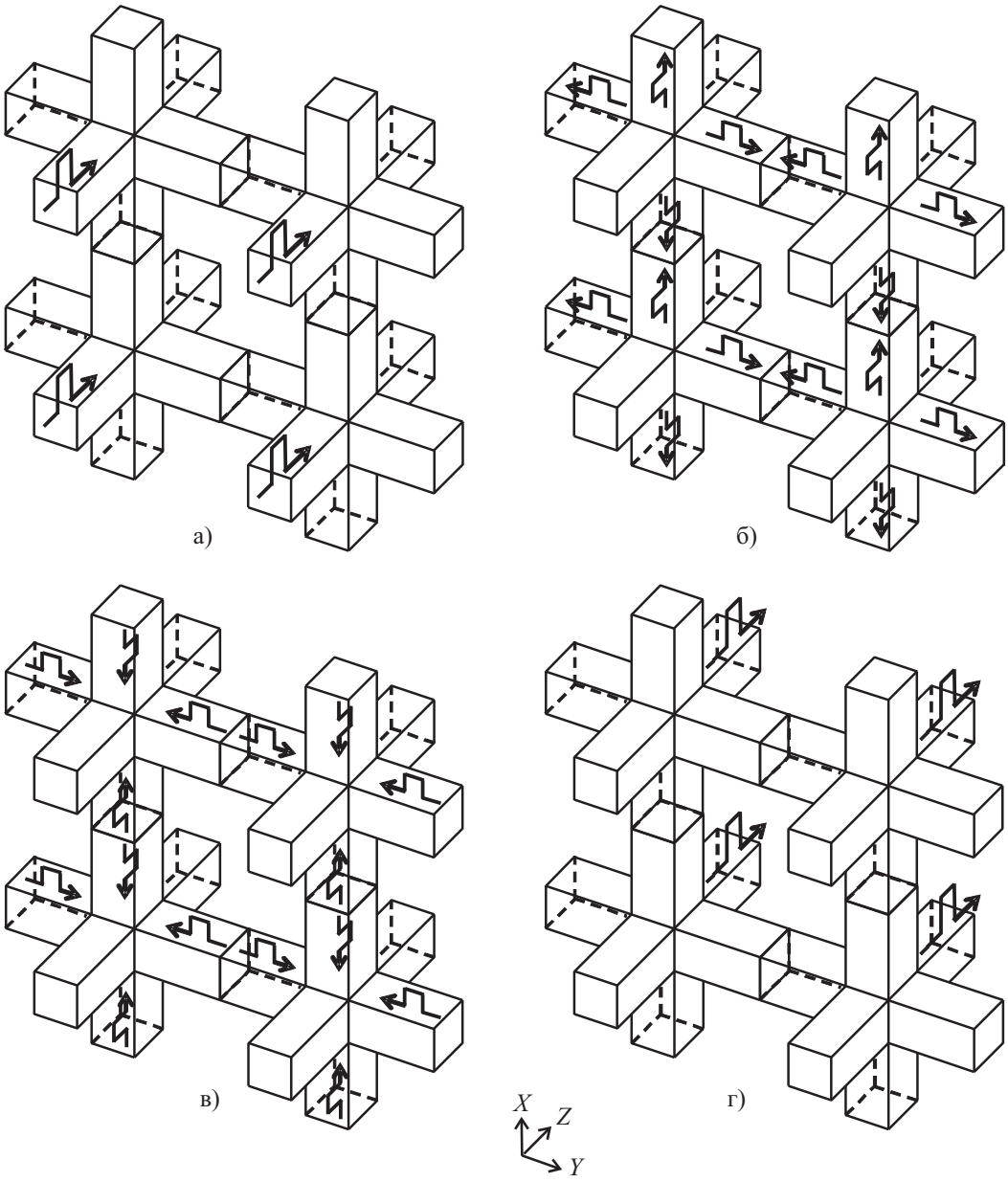


Рис. 17. Плоская сеточная волна: а) падающие импульсы-потоки на передних гранях кубиков, б) отраженные импульсы-потоки после первой операции рассеяния, в) падающие импульсы-потоки после операции “переброса”, г) отраженные импульсы-потоки после второй операции рассеяния

Проследим за дальнейшими перемещениями импульсов. После операции “переброса” импульсы двигаются по направлению к центральному трансформатору и достигают его в момент времени $t = \dfrac{3\tau}{2}$. В этот момент происходит рассеяние импульсов и вместо четырех импульсов с амплитудой $\dfrac{1}{2}$ появляется один импульс единичной амплитуды, который продолжает двигаться в направлении распространения волны (рис. 17 г). Действительно, вбок ничего не отразится из-за симметрии схемы и симметричного же положения падающих импульсов. Назад ничего не отразится, потому что вклад от импульсов справа и слева полностью компенсируется вкладом от импульсов сверху и снизу. Вклады же вперед от всех импульсов складываются.

Таким образом, получаем, что за два такта импульс без отражений продвинулся на один кубик вперед.

Это одновременно означает два факта: во-первых, в данном направлении отсутствует какая-либо дисперсия и, во-вторых, волновое сопротивление линий передач в схеме совпадает с волновым сопротивлением вакуума.

В моменты времени $t_{n+1/2} = n\tau + \dfrac{\tau}{2}$, когда производится операция рассеяния, можно определить все поля в центре кубиков. Поля можно определить как до рассеяния — по падающим потокам, так и после — по отраженным. Результаты получаем идентичные:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \Pi_6^{(n)} + \Pi_8^{(n)} + \Pi_9^{(n)} + \Pi_{11}^{(n)} &&= \mathrm{O}_6^{(n+1)} + \mathrm{O}_8^{(n+1)} + \mathrm{O}_9^{(n+1)} + \mathrm{O}_{11}^{(n+1)},\\
E_y &= \Pi_1^{(n)} + \Pi_3^{(n)} + \Pi_{10}^{(n)} + \Pi_{12}^{(n)} &&= \mathrm{O}_1^{(n+1)} + \mathrm{O}_3^{(n+1)} + \mathrm{O}_{10}^{(n+1)} + \mathrm{O}_{12}^{(n+1)},\\
E_z &= \Pi_2^{(n)} + \Pi_4^{(n)} + \Pi_5^{(n)} + \Pi_7^{(n)} &&= \mathrm{O}_2^{(n+1)} + \mathrm{O}_4^{(n+1)} + \mathrm{O}_5^{(n+1)} + \mathrm{O}_7^{(n+1)},\\
H_x &= \frac{1}{W_0}\left(\Pi_5^{(n)} - \Pi_7^{(n)} - \Pi_{10}^{(n)} + \Pi_{12}^{(n)}\right) &&= \frac{1}{W_0}\left(\mathrm{O}_7^{(n+1)} - \mathrm{O}_5^{(n+1)} - \mathrm{O}_{12}^{(n+1)} + \mathrm{O}_{10}^{(n+1)}\right),\\
H_y &= \frac{1}{W_0}\left(\Pi_4^{(n)} - \Pi_2^{(n)} - \Pi_{11}^{(n)} + \Pi_9^{(n)}\right) &&= \frac{1}{W_0}\left(\mathrm{O}_2^{(n+1)} - \mathrm{O}_4^{(n+1)} - \mathrm{O}_9^{(n+1)} + \mathrm{O}_{11}^{(n+1)}\right),\\
H_z &= \frac{1}{W_0}\left(\Pi_1^{(n)} - \Pi_3^{(n)} - \Pi_6^{(n)} + \Pi_8^{(n)}\right) &&= \frac{1}{W_0}\left(\mathrm{O}_3^{(n+1)} - \mathrm{O}_1^{(n+1)} - \mathrm{O}_8^{(n+1)} + \mathrm{O}_6^{(n+1)}\right),
\end{aligned}
$$

где $\Pi_i^{(n)}$, $1 \leqslant i \leqslant 12$ — амплитуды импульсов-потоков, падающих на входы потоковых элементов в момент времени $t_n = n\tau$; $\mathrm{O}_i^{(n+1)}$, $1 \leqslant i \leqslant 12$ — амплитуды импульсов-потоков, отраженных от входов потоковых элементов в момент времени $t_{n+1} = (n+1)\tau$; W_0 — волновое сопротивление вакуума.

В моменты времени t_n, когда производится операция "переброса", можно определить поля на гранях кубиков — по четыре поля на каждой грани. Приведем формулы для определения полей на грани со входами 1 и 2:

$$
E_y = \Pi_1^{(n)} + \mathrm{O}_1^{(n)}, \quad E_z = \Pi_2^{(n)} + \mathrm{O}_2^{(n)},
$$
$$
H_y = W_0^{-1}\left(\mathrm{O}_2^{(n)} - \Pi_2^{(n)}\right), \quad H_z = W_0^{-1}\left(\Pi_1^{(n)} - \mathrm{O}_1^{(n)}\right).
$$

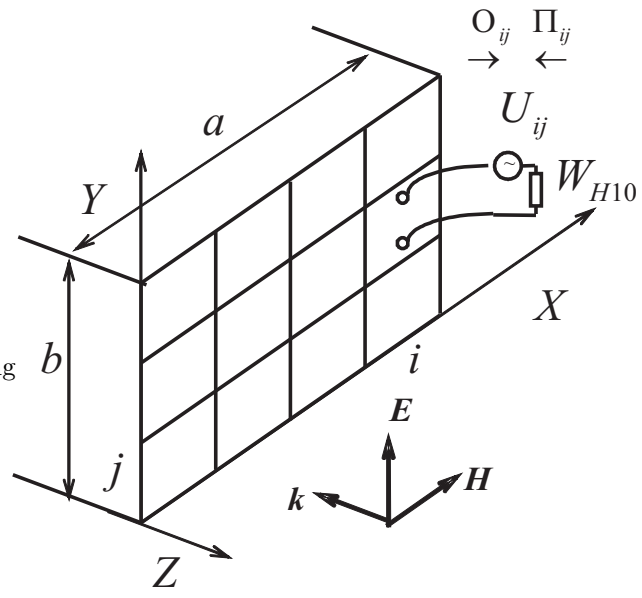


Рис. 18. Одномодовый одночастотный трансформатор

Для возбуждения $R\tau$-сеток можно использовать классические приемы, разработанные для сеточных методов (возбуждение дельта-импульсом, функцией Хевисайда, "оконной" функцией (windowing function) и др. [17]). Однако наибольшее распространение получили возбуждающие схемы, называемые согласующими трансформаторами. Для $R\tau$-сеток разработано несколько типов трансформаторов: одно- и многомодовые (т.е. возбуждающие и поглощающие одну или несколько мод), одно- и многочастотные (т.е. одновременно возбуждающие и поглощающие одну или несколько частот), а также их комбинации [44]. Опишем простейшую возбуждающую схему — одночастотный одномодовый трансформатор (ООТ). Задача одномодового трансформатора — корректно возбуждать и поглощать нормальные волны основного типа. Поэтому одномодовые трансформаторы корректно работают на регулярных участках волноводов, достаточно далеко удаленных от ближайших неоднородностей. При этом необходимо, чтобы все высшие моды были запредельными. ООТ, возбуждающий в прямоугольном волноводе моду H_{10}, показан на рис. 18.

Данный трансформатор возбуждает волну с ориентацией электрического поля вдоль оси Y. В поперечном сечении волновода шириной $l\Delta = a$ и высотой $m\Delta = b$, образованного из потоковых кубиков рис. 3 б, к клеммам, направленным по оси Y (т.е. сонаправленным с электрическим полем), подключены генераторы потоков с внутренним сопротивлением, равным локальному характеристическому сопротивлению волны H_{10}: $W_{H10} = W_0 \dfrac{\lambda_{H10}}{\lambda_0}$, $\lambda_{H10} = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda_0^2}{4}\,a^2}}$, где a — ширина волновода, λ_0 — длина волны

в вакууме, λ_{H10} — длина волны в волноводе и W_{H10} — локальное характеристическое сопротивление волны H_{10}.

Генератор импульсов-потоков фактически является генератором импульсов напряжения с внутренним сопротивлением R, непосредственно подключенным к линии передачи с таким же характеристическим сопротивлением $Z = R$, т.е. он возбуждает потоки в линию передачи и поглощает их без каких-либо отражений (рис. 19).

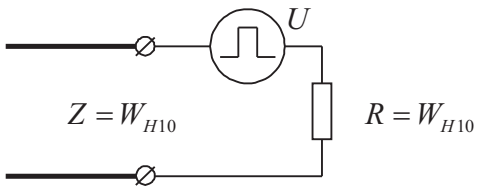


Рис. 19. Генератор импульсов-потоков

Возбуждение волны H_{10} эквивалентно требованию, чтобы напряжение на всех генераторах было синфазным с синусоидальным амплитудным распределением в поперечном сечении. В момент времени $t_0 = 0$ генераторы начинают излучать с тактом τ падающую волну, т.е. эквидистантный пакет прямоугольных импульсов с синусоидальной огибающей: $\Pi_{ij}^{(n)}\big(t \in [t_n, t_{n+1})\big) = U_{ij}^{(0)} \sin(\omega_0 n\tau)$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где n — номер временно́го такта, $t_n = n\tau$ — момент времени, i и j — индексы генераторов по осям X и Y соответственно, $\Pi_{ij}^{(n)}$ — поток в n-й момент времени, возбуждаемый в линии, непосредственно подключенной к генератору с индексами (i, j). Как и в обычной волне H_{10}, амплитуды генераторов $U_{ij}^{(0)}$ распределены по синусу вдоль оси X и постоянны вдоль оси Y: $U_{ij}^{(0)} = U_0 \sin\dfrac{\pi x_i}{l\Delta} = U_0 \sin\dfrac{\pi(i-1/2)}{l}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant m$, где x_i — координата по оси X центра i-го кубика. Поскольку импульсы излучаются в линии передачи с характеристическим сопротивлением, отличным от характеристического сопротивления линий передачи потоковых элементов, то простая операция "переброса" для этих импульсов изменяется на операцию рассеяния на узле — 4-полюснике, представляющем собой стык двух линий передачи с разными волновыми сопротивлениями (рис. 20).

S-матрица операции рассеяния выглядит следующим образом:

$$S = \begin{pmatrix} \dfrac{W_{H10} - W_0}{W_0 + W_{H10}} & \dfrac{2W_0}{W_0 + W_{H10}} \\ \dfrac{2W_{H10}}{W_0 + W_{H10}} & \dfrac{W_0 - W_{H10}}{W_0 + W_{H10}} \end{pmatrix}.$$

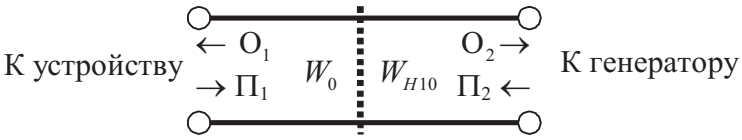


Рис. 20. Стык двух линий передачи с разными волновыми сопротивлениями

Параметры отраженной волны определяются на основе анализа Фурье импульсов, отраженных в генераторы потоков. Вычисления останавливаются при стабилизации ключевых параметров системы (S-матрицы и т.п.) в заданных пределах на протяжении заданного промежутка времени. Несмотря на нестрогость, такого критерия вполне достаточно для большинства практических задач.

3.3. Сеточная дисперсия для трехмерных $R\tau$-сеток. Дискретизация пространства и времени в сеточных методах приводит при численном моделировании к возникновению пространственной анизотропии и частотной дисперсии. Дисперсионные ошибки уменьшаются при уменьшении шага дискретизации анализируемых пространственных областей. Для количественной оценки дисперсионной погрешности в методе ИАЭП введено понятие сеточной дисперсии. Данное понятие определяется для регулярной импедансной сетки. Как было указано выше, существует два основных типа сеточной дисперсии: амплитудная (зависимость характеристического сопротивления плоской сеточной волны от направления волнового вектора) и фазовая (зависимость фазовой скорости плоской сеточной волны от направления волнового вектора).

Для потоковой $R\tau$-сетки в литературе подробно исследована только фазовая дисперсия. Наиболее распространенный способ аналитического анализа дисперсных свойств потоковых $R\tau$-сеток производится в частотной области. Каждый элементарный объем рассматривается как "черный ящик", описываемый некоторой S-матрицей, которая для ПЭ может быть записана в следующем виде:

$$S = \exp(-i\omega_0\tau) \times S_{tr}, \tag{2}$$

где ω_0 — циклическая частота.

В дискретном сеточном вакууме вводится декартова система координат, и каждый элемент нумеруется индексами (p, q, r) соответственно по осям X, Y и Z. Координаты центра ПЭ с индексами (p, q, r) полагаются равными $(p\Delta, q\Delta, r\Delta)$.

В непрерывном случае плоская монохроматическая волна определяется как шестикомпонентная волна (по количеству компонент полей, определенных в каждой точке пространства), в которой связь между компонентами определяется из уравнений Максвелла. В дискретном сеточном вакууме, понимаемом как набор 24-полюсников, вполне естественно определить плоскую монохроматическую волну как дискретную тензорную 12-компонентную волну, связь между компонентами которой определяется S-матрицей ПЭ и топологией сетки:

$$\mathbf{\Pi}_{pqr} = \mathbf{\Pi}_0 \times \exp\bigl(i\omega_0 - i\boldsymbol{k}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{r}_{pqr}\bigr), \tag{3}$$

где $\mathbf{\Pi}_{pqr} = \left[\Pi_1^{(p,q,r)}, \ldots, \Pi_{12}^{(p,q,r)}\right]$ — набор комплексных амплитуд волн, падающих на потоковый элемент с индексами (p,q,r), $\mathbf{\Pi}_0 = \left[\Pi_1, \ldots, \Pi_{12}\right]$ — тензорная амплитуда волны, $\boldsymbol{r}_{pqr} = (p\Delta, q\Delta, r\Delta)$ — радиус-вектор центра потокового элемента с индексами (p,q,r), $\boldsymbol{k}_{\mathrm{c}} = k_{\mathrm{c}}\boldsymbol{n}$ — сеточный волновой вектор и $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$ — направление распространения волны.

Для нахождения фазовой сеточной дисперсии требуется найти зависимость $k_{\mathrm{c}}(\omega_0, \boldsymbol{n})$. S-матрица (2) определяет связь между падающими и отраженными волнами в пределах одного элемента:

$$\mathbf{O}_{pqr} = \boldsymbol{S} \times \mathbf{\Pi}_{pqr}, \tag{4}$$

где $\mathbf{O}_{pqr} = \left[\mathrm{O}_1^{(p,q,r)}, \ldots, \mathrm{O}_{12}^{(p,q,r)}\right]$ — набор комплексных амплитуд волн, отраженных от потокового элемента с индексами (p,q,r). Топология сетки описывается уравнениями связи

$$\Pi_{2-l+k}^{(p+l,q,r)} = \mathrm{O}_{2+l+k}^{(p,q,r)}, \quad \Pi_{6-l+k}^{(p,q+l,r)} = \mathrm{O}_{6+l+k}^{(p,q,r)}, \quad \Pi_{10-l+k}^{(p,q,r+l)} = \mathrm{O}_{10+l+k}^{(p,q,r)}, \quad l \in \{-1,1\}, \quad k \in \{0,1\}, \tag{5}$$

означающими, что падающие волны одновременно являются отраженными от соседних элементов. Отметим, что условие (5) справедливо для любого процесса, в том числе и для нестационарного. Ослабить данное условие нельзя, поскольку иначе мы получаем сетку с недоопределенной топологией, т.е. со связями между входами элементов.

Задача (1)–(5) сводится к задаче на собственные значения: плоская монохроматическая волна существует тогда и только тогда, когда существуют нетривиальные решения уравнения $A \times \mathbf{\Pi}_0 = 0$, где A — некоторая квадратная матрица [45]. Последнее уравнение эквивалентно условию $\det A = 0$. Анализ определителя матрицы A приводит к выводу о том, что обе поляризации имеют одинаковую скорость, описываемую следующим дисперсионным уравнением:

$$1 + 2\cos\bigl(k_0\Delta\bigr) = \cos\theta_x\cos\theta_y + \cos\theta_y\cos\theta_z + \cos\theta_z\cos\theta_x, \tag{6}$$

где $\theta_{x,y,z} = k_{\mathrm{c}}\Delta\cos\alpha_{x,y,z}$, $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ — волновой вектор в непрерывном пространстве. Оценка дисперсионной погрешности формулы (6) с точностью до $\left(\dfrac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2$ дает формулу

$$\frac{\lambda_{\mathrm{c}} - \lambda_0}{\lambda_0} = -\frac{\cos\alpha_x^2\cos\alpha_y^2 + \cos\alpha_y^2\cos\alpha_z^2 + \cos\alpha_z^2\cos\alpha_x^2}{6}\left(\pi\frac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2 + O\left(\frac{\Delta^4}{\lambda_0^4}\right), \tag{7}$$

где $\lambda_{\mathrm{c}} = \dfrac{2\pi}{k_{\mathrm{c}}}$ — длина волны в сетке.

В работах [33, 46] выведено уравнение фазовой сеточной дисперсии для роторной сетки:

$$4\cos\left(k_0\Delta\right) - 1 = \cos 2\theta_x + \cos 2\theta_y + \cos 2\theta_z. \tag{8}$$

Оценка дисперсионной погрешности (8) с точностью до $\left(\dfrac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2$ приводит к формуле

$$\frac{\lambda_{\mathrm{c}} - \lambda_0}{\lambda_0} = \left(-\frac{1}{8} + \frac{\cos\alpha_x^2\cos\alpha_y^2 + \cos\alpha_y^2\cos\alpha_z^2 + \cos\alpha_z^2\cos\alpha_x^2}{3}\right)\left(\pi\frac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2 + O\left(\frac{\Delta^4}{\lambda_0^4}\right). \tag{9}$$

Сравнение формул (7) и (9) показывает, что фазовая дисперсия роторной сетки примерно в два раза выше, чем у потоковой.

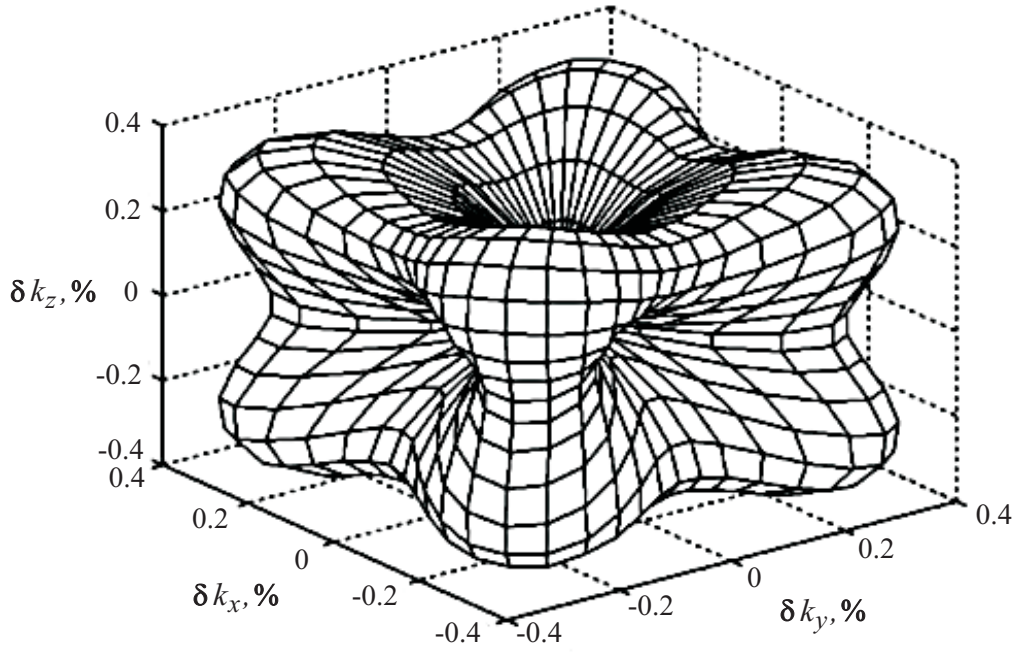


Рис. 21. Дисперсия в потоковой $R\tau$-сетке при $\dfrac{\Delta}{\lambda_0} = 0.1$

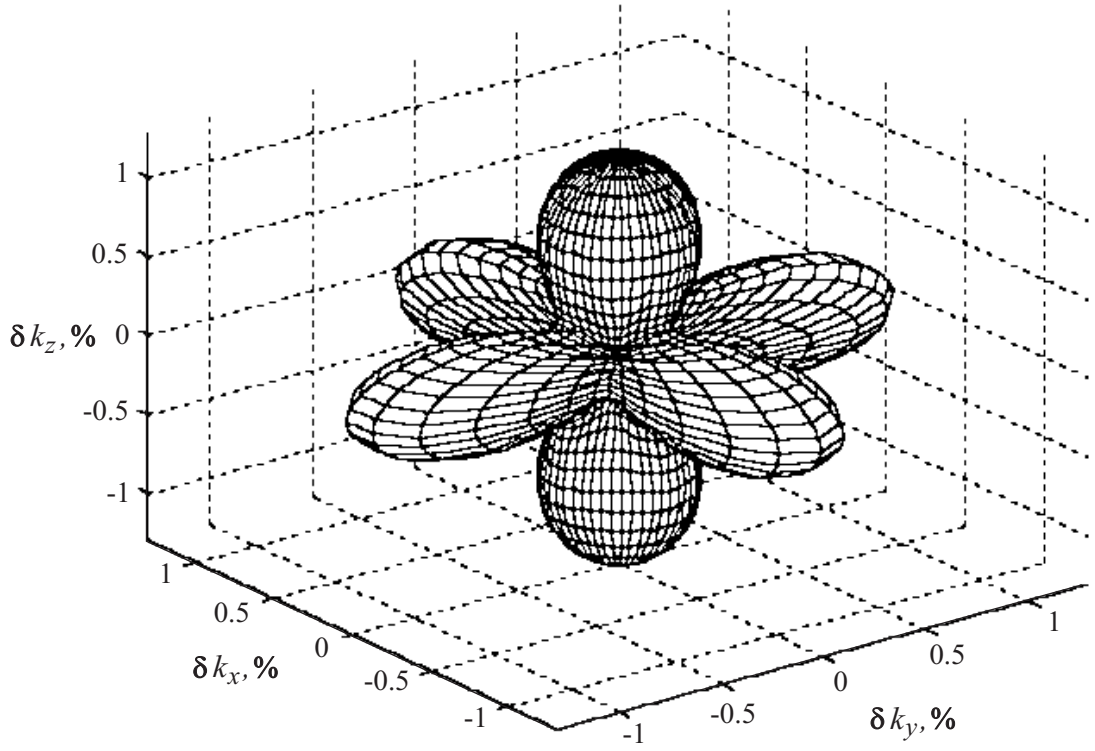


Рис. 22. Дисперсия в роторной $R\tau$-сетке при $\dfrac{\Delta}{\lambda_0} = 0.1$

На рис. 21 и 22 представлены результаты решения дисперсионных уравнений (6) и (8) для потоковой и роторной схем соответственно. По координатным осям X, Y, Z отложены проекции относительной погреш-

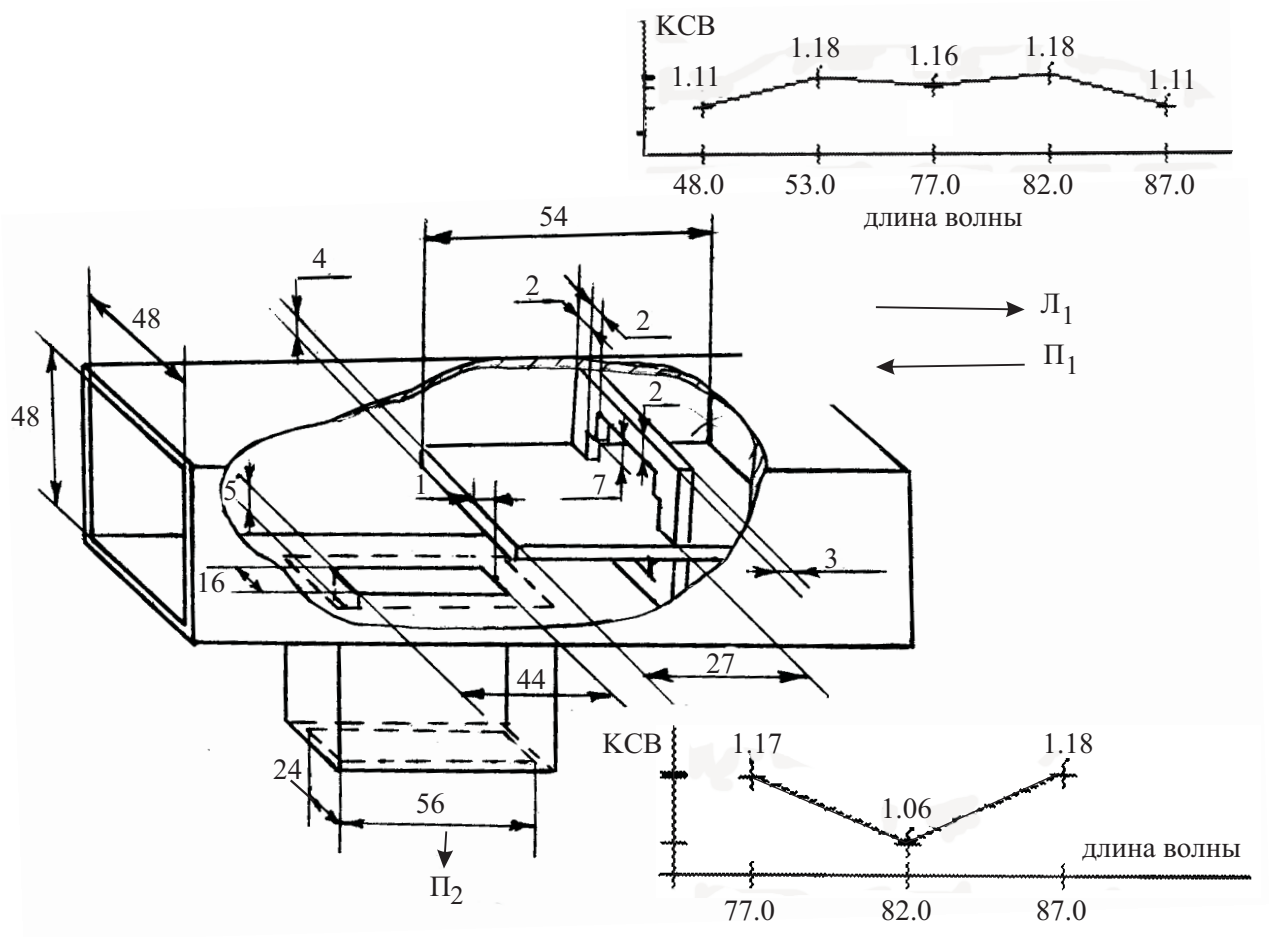


Рис. 23. Поляризационный тройник

ности расчета волнового вектора $\delta\boldsymbol{k} = \big(\delta k_x, \delta k_y, \delta k_z\big)$, выраженные в процентах, причем $\delta\boldsymbol{k} = \left(\dfrac{k_{\text{c}}}{k_0} - 1\right)\boldsymbol{n}$.

Анализ представленных формул и графиков приводит к следующим выводам. Длина волны λ_{c}, распространяющейся в потоковой и роторной сетке, оказывается меньшей или равной длине плоской волны λ_0, распространяющейся в свободном пространстве, т.е. $\lambda_{\text{c}} \leqslant \lambda_0$, причем $\lambda_{\text{c}} = \lambda_0$ наблюдается только для потоковой сетки и только при распространении волны вдоль осей координат X, Y и Z.

Для потоковой сетки наибольшая погрешность при расчете волнового вектора имеет место при распространении плоской волны под углами $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z \approx 55°$, а наименьшая (нулевая) — при распространении волны вдоль осей координат X, Y и Z. Максимальная погрешность оценивается соотношением $\dfrac{\lambda_{\text{c}}}{\lambda_0} \cong 1 - \dfrac{\pi}{18}\,\dfrac{\Delta^2}{\lambda_0^2}$. При $\dfrac{\Delta}{\lambda_0} = \dfrac{1}{20}$ получим $\dfrac{\lambda_{\text{c}}}{\lambda_0} \approx 0.9986$, что соответствует ошибке по фазе $5.0°$ при длине исследуемого объема до $10\lambda_0$.

Для роторной сетки получаем обратную картину: наименьшая погрешность при расчете волнового вектора имеет место при распространении плоской волны под углами $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z \approx 55°$, а наибольшая — при распространении волны вдоль осей координат X, Y и Z. Максимальная погрешность оценивается соотношением $\dfrac{\lambda_{\text{c}}}{\lambda_0} \cong 1 - \dfrac{\pi^2}{8}\,\dfrac{\Delta^2}{\lambda_0^2}$. При $\dfrac{\Delta}{\lambda_0} = \dfrac{1}{20}$ получим $\dfrac{\lambda_{\text{c}}}{\lambda_0} \approx 0.9969$, что соответствует ошибке по фазе $11.2°$ при длине исследуемого объема до $10\lambda_0$.

При выборе шага сетки, удовлетворяющего условию $\dfrac{\Delta}{\lambda_0} < 0.1$, относительная ошибка расчета волнового вектора $\big|\delta k\big| < 0.6\,\%$ для потоковой схемы и $\big|\delta k\big| < 1.3\,\%$ для роторной схемы. Таким образом, максимальная погрешность расчета волнового вектора для роторной сетки оказывается примерно в два раза большей, чем для потоковой.

Другими существенными недостатками роторной $R\tau$-сетки по сравнению с потоковой является вдвое

большее время анализа и более сложный для программирования вычислительный алгоритм (а именно, большое количество алгоритмических ветвей при учете границ).

3.4. Практические приложения трехмерных $R\tau$-сеток. Описанные выше идеи были использованы при создании пакета "Супер-волна", предназначенного для расчетов во временно́й области различных трехмерных СВЧ-устройств. С помощью данного пакета можно рассчитывать как отдельные элементы СВЧ-трактов (см., например, поляризационный тройник на рис. 23 [47]), так и антенны в целом.

На рис. 24 продемонстрирован расчет широкополосной плоской отражающей антенны с наклонным лучом [48].

Примеры более сложных антенн можно найти в [49, 50]. Высокая скорость расчетов, простой интерфейс и возможность наблюдать за переходным режимом позволяет использовать пакет в учебных целях [51].

Рассмотренный выше потоковый элемент — это одно из наиболее ярких достижений метода ИАЭП. Впервые потоковый элемент был открыт в Советском Союзе в 1983 году [32] — на четыре года раньше, чем за рубежом [52], причем за рубежом вплоть до 1999 г. была неизвестна полная радиотехническая схема потокового кубика: вместо центрального трансформатора в зарубежном варианте кубика вводится черный ящик с идентичной S-матрицей. Более того, в западной печати ведущими специалистами метода TLM неоднократно высказывалось мнение о том, что полной радиотехнической схемы потокового кубика не удастся придумать [38, 53]. Это мнение было опровергнуто нами в 1999 г. на конференции по TLM во Франции [54].

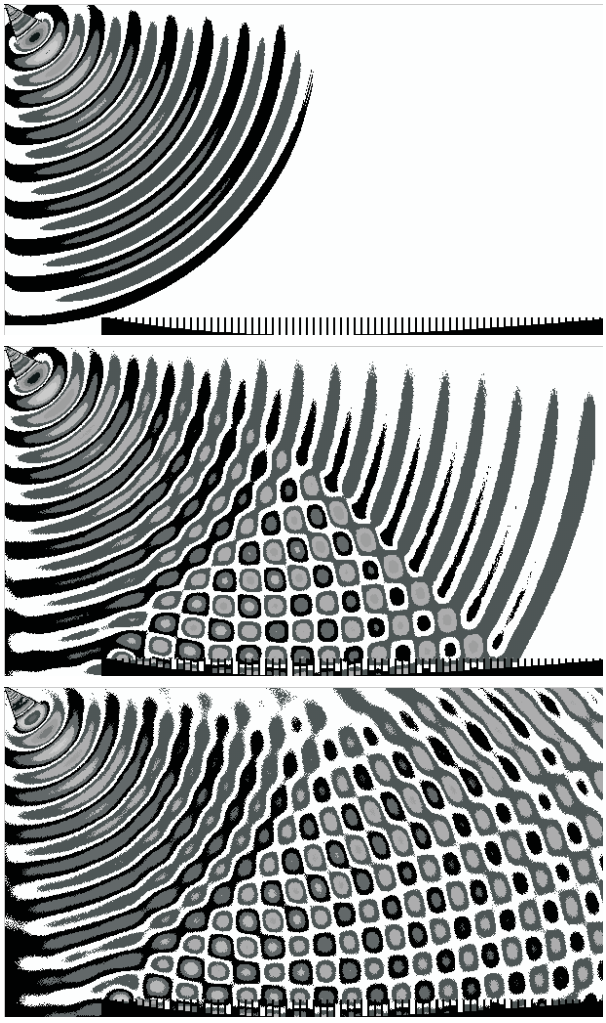


Рис. 24. Расчет широкополосной плоской отражающей антенны с наклонным лучом

4. Двумерные импедансные сетки. Длительный опыт использования программ на основе RLC- и $R\tau$-сеток показал эффективность двумерных импедансных сеток для анализа широкого класса СВЧ-устройств. Если краевую задачу удается свести к анализу двумерных сеток, то достигается лучшая точность, уменьшается время анализа и увеличивается исследуемый электродинамический объем. Существенно упрощаются алгоритмы анализа 2D-сеток по сравнению с 3D-сетками. В большей мере оказывается возможным использовать конечно-разностную трактовку процессов, особенно ориентируясь на аппарат телеграфных уравнений.

4.1. Двумерные RLC-сетки. Для двумерных задач (для H-волн вида $H_z = 0$, $E_x = E_y = 0$ и при отсутствии сторонних источников тока и зарядов) эквивалентные RLC-схемы элементарных объемов могут быть легко выведены на основе конечно-разностных представлений [30]. Для этого рассмотрим стационарные уравнения Максвелла в следующей форме:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega_0\mu_0 H_x, \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega_0\mu_0 H_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega_0\varepsilon_0 E_z, \tag{10}$$

где ω_0 — циклическая частота, ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума и μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; здесь и далее временна́я зависимость для импедансных сеток принимается равной $e^{i\omega_0 t}$.

Систему уравнений (10) можно записать в конечных разностях:

$$\frac{\Delta E_z}{\Delta y} = -i\omega_0\mu_0 H_x, \quad -\frac{\Delta E_z}{\Delta x} = -i\omega_0\mu_0 H_y, \quad \frac{\Delta H_y}{\Delta x} - \frac{\Delta H_x}{\Delta y} = i\omega_0\varepsilon_0 E_z. \tag{11}$$

Систему (11) можно решать непосредственно, как это делается в методе конечных разностей, либо опосредованно, сводя промежуточную конечно-разностную задачу к эквивалентной ей задаче теории це-

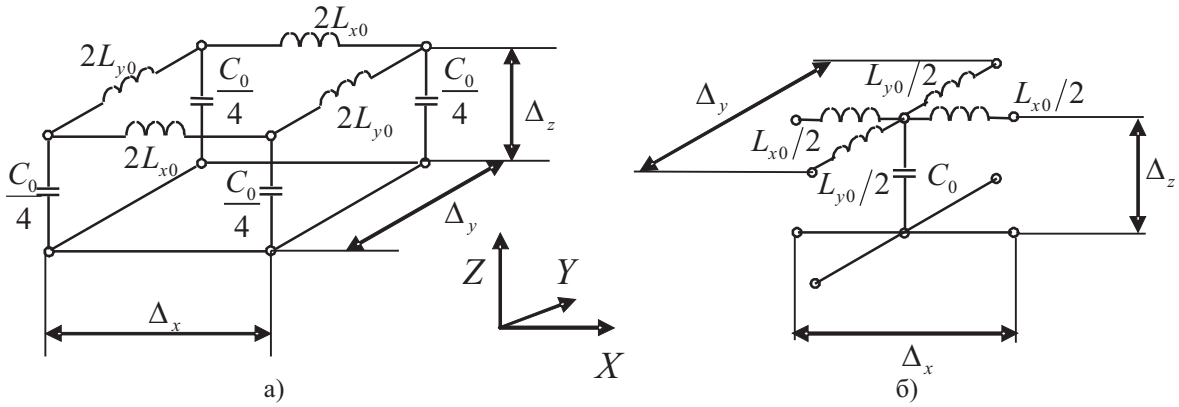


Рис. 25. Эквивалентная RLC-схема элемента пространства: а) четырехугольник, б) четырехлучевая звезда

пей [25]. Для этого системе (11) ставится в соответствие RLC-схема замещения элемента пространства (рис. 25), эквивалентная (в смысле близости процессов) двумерному телеграфному уравнению [3, 15, 16, 55].

При таком сопоставлении напряжение U на конденсаторах определяется напряженностью электрического поля E_z, а токи I_x и I_y через катушки индуктивности определяются значениями напряженностей магнитного поля H_y и H_x соответственно: $U = E_z\Delta_z$, $I_x = H_y\Delta_y$, $I_y = H_x\Delta_x$, где Δ_x, Δ_y, Δ_z — геометрические размеры элемента пространства (прямоугольного параллелепипеда) вдоль осей X, Y, Z соответственно. Номиналы элементов эквивалентной схемы определяются параметрами элемента пространства [23, 33, 56, 57]: $C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{\Delta_x\Delta_y}{\Delta_z}$, $L_{x0} = \mu_0 \dfrac{\Delta_x\Delta_z}{\Delta_y}$, $L_{y0} = \mu_0 \dfrac{\Delta_y\Delta_z}{\Delta_x}$.

Схема сеточного вакуума собирается из элементарных объемов путем объединения эквивалентных схем элементов пространства, при этом уравнения, описывающие импедансную сетку, задаются системой (11) (первые два уравнения — закон Ома для индуктивностей, третье — закон Кирхгофа). Таким образом, топология сеточного вакуума задает взаимнооднозначное соответствие между конечно-разностной моделью (поля E_z, H_y, H_x) и сеточной RLC-схемой (напряжение U и токи I_x, I_y).

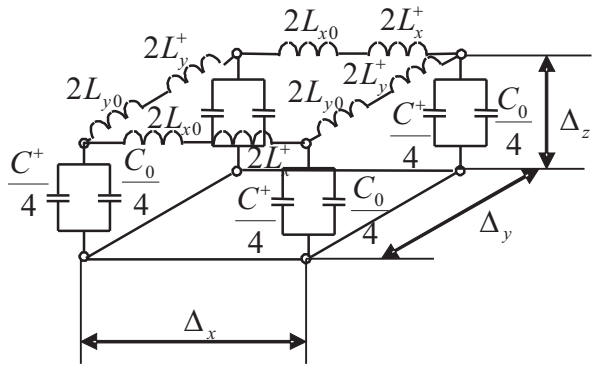


Рис. 26. Моделирование в RLC-схеме элемента пространства диэлектрического и магнитного заполнения для вещества с $\varepsilon_a \geqslant \varepsilon_0$ и $\mu_a \geqslant \mu_0$

Вещество моделируется стандартным для метода ИАЭП образом — подключением к эквивалентной схеме вакуума (рис. 25) двухполюсников [36]. Напомним: это означает, что влияние вещества локально и все взаимодействие осуществляется через сеточный вакуум. Вещество с параметрами $\varepsilon_a \geqslant \varepsilon_0$, $\mu_a \geqslant \mu_0$ моделируется подключением дополнительных емкостей и индуктивностей. При этом вещество увеличивает емкость элемента пространства C_0 на C^+ и индуктивности элемента пространства L_{x0} и L_{y0} на L_x^+ и на L_y^+ соответственно. Эквивалентная схема элемента пространства, представленная на рис. 25 а, преобразуется в схему, изображенную на рис. 26.

Емкости и индуктивности, вносимые веществом, описываются формулами

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 + \varepsilon^+, \quad C^+ = \varepsilon^+ \frac{\Delta_x\Delta_y}{\Delta_z}, \quad \mu_a = \mu_0 + \mu^+, \quad L_x^+ = \mu^+ \frac{\Delta_x\Delta_z}{\Delta_y}, \quad L_y^+ = \mu^+ \frac{\Delta_y\Delta_z}{\Delta_x}.$$

При наличии в веществе потерь к эквивалентной схеме рис. 26 подключаются дополнительные сопротивления — параллельно к емкостям и последовательно к индуктивностям.

Для устройств со сложной геометрией могут производиться операции по сгущению и изменению формы элементарных объемов сетки.

Эквивалентная RLC-схема устройства собирается из элементарных объемов путем объединения эквивалентных схем элементов пространства [25, 58] (рис. 1): сначала мы выполняем декомпозицию сложной

анализируемой области на простые однотипные узлы (рис. 25 а или рис. 26), а затем проводим процедуру рекомпозиции устройства из элементарных узлов [14]. Таким образом, мы получаем вместо электродинамической задачи задачу нахождения параметров сетки многополюсников [23, 58, 59], эквивалентной всей анализируемой области, — задачу теории цепей.

Граничные условия в импедансной сетке задаются путем подключения к клеммам получаемого многополюсника различных нагрузок: условие короткого замыкания для металла и холостого хода для магнитной стенки.

Возбуждение импедансной сетки производится с помощью согласующих трансформаторов. Схемы некоторых трансформаторов описаны в [23, 30, 60].

Вышеописанная процедура называется построением импедансной модели исходной электродинамической задачи. Она позволяет перейти от языка дифференциальных уравнений к наглядному описанию задачи в терминах импедансных сеток.

Анализируются RLC-сетки с помощью эквивалентных преобразований электрических схем [23, 56, 58], являющихся, по существу, радиотехническими аналогами фронтальных методов решения больших разреженных систем линейных уравнений. Фронтальные методы, формально введенные в вычислительную математику только в 1970-е годы, и на сегодня являются наиболее эффективными прямыми методами решения разреженных систем линейных уравнений [61, 62]. Анализ RLC-сеток с помощью эквивалентных преобразований требует порядка $N^{1.5}$ операций, где N — число элементов сетки.

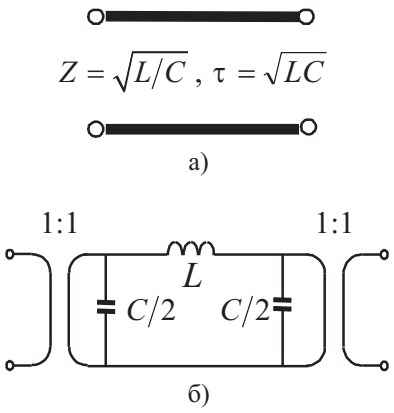


Рис. 27. Линия передачи (а) и ее эквивалентный четырехполюсник (б)

Сочетание метода прямых с исключительно быстродействующими и гибкими процедурами анализа планарных RLC-сеток, моделирующих E- и H-плоскостные волноводные СВЧ-устройства, позволило создать высокоэффективные программные комплексы TAMIC-E, TAMIC-H и TAMIC-W [30, 56, 59, 63]. Для этих пакетов точность расчетов E- и H-плоскостных устройств, как правило, превышает возможности современной измерительной аппаратуры, в результате чего полностью исключается этап настройки и доводки разработанных элементов. Это позволяет исключить настроечные элементы из конструкции и разрабатывать устройство с учетом применяемых технологий изготовления устройств. Комплексное применение пакета позволяет рассчитывать как отдельные элементы (фильтры, поляризаторы, тройники, диплексоры, мосты и т.п.), так и тракты целиком [64, 65].

4.2. Двумерные эквивалентные $R\tau$-схемы. Эквивалентные $R\tau$-схемы элементарного объема пространства состоят из отрезков линий передачи без потерь (и сопротивлений при наличии потерь в веществе). Если схему предполагается анализировать во временно́й области, то временны́е задержки в линиях передачи должны быть одинаковы. Эквивалентная $R\tau$-схема формируется на основе соответствующей RLC-схемы и базируется на соответствии отрезка линии передачи с временно́й задержкой $\tau = \sqrt{LC}$ и характеристическим импедансом $Z = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (рис. 27 а) и ее LC-аналога (рис. 27 б).

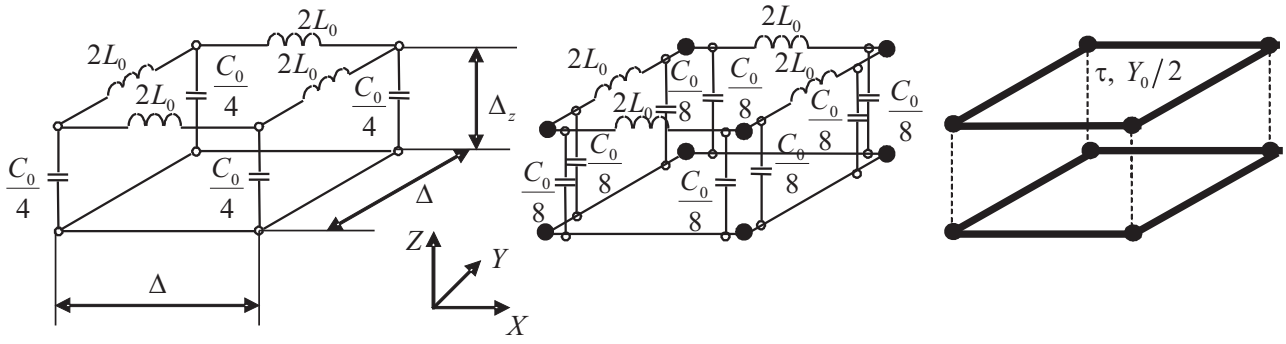


Рис. 28. Преобразование эквивалентной RLC-схемы “четырехугольник” в эквивалентную $R\tau$-схему для элемента пространства, не заполненного веществом

На рис. 28 [25, 26] изображено преобразование RLC-схемы (рис. 25 а) в $R\tau$-схему для случая квадратной сетки ($\Delta_x = \Delta_y = \Delta$ и $L_{x0} = L_{y0} = L_0$). Все длинные линии на схеме рис. 28 имеют время задержки

сигнала τ и волновой адмитанс $\dfrac{Y_0}{2}$.

На рис. 29 [16] изображена $R\tau$-схема, полученная из схемы рис. 25 б. На схеме рис. 29 символами Π_i и O_i обозначены соответственно падающие и отраженные волны с ориентацией электрического поля вдоль оси Z. Волны Π_i и O_i с индексами $i = 1, 3$ ($i = 2, 4$) распространяются вдоль оси X (Y). Время задержки сигнала в длинных линиях равно $\dfrac{\tau}{2}$, волновой адмитанс линий — Y_0. Параметры τ и Y_0 удовлетворяют следующим соотношениям [33]:

$$\tau = \Delta\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}}\,, \quad Y_0 = \frac{\Delta}{\Delta_z}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\mu_0}}\,. \tag{12}$$

Как видно из (12), для планарной (двумерной) задачи время задержки сигнала в линиях τ соответствует локальной скорости распространения сигналов между двумя соседними узлами сетки (микроскопической скорости), в $\sqrt{2}$ раз большей скорости света $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Данный факт легко объясняется дискретностью модели: плоская волна, распространяющаяся под углом 45° к осям координат, распространяется без отражений на узлах $R\tau$-сетки по ломаной траектории длиной в $\sqrt{2}$ раз большей реального расстояния, пройденного волной. Отметим, что это означает отсутствие какой-либо сеточной дисперсии в данном направлении.

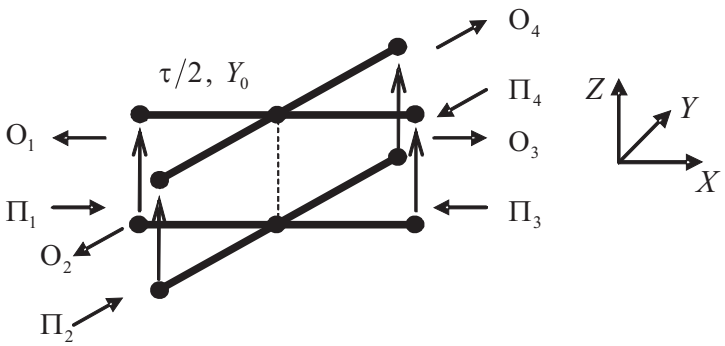


Рис. 29. $R\tau$-схема, соответствующая RLC-схеме “четырехлучевая звезда”

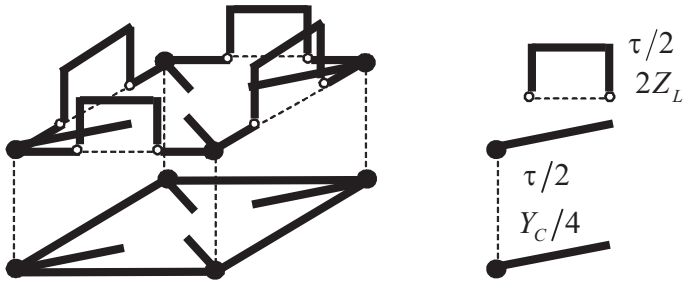


Рис. 30. Моделирование в $R\tau$-схеме элемента пространства диэлектрического и магнитного заполнения для вещества с $\varepsilon_a \geqslant \varepsilon_0$ и $\mu_a \geqslant \mu_0$

Вещество моделируется так же, как и в RLC-схеме, — подключением дополнительных емкостей (разомкнутые шлейфы) и индуктивностей (короткозамкнутые шлейфы). Задержки шлейфов могут различаться, но всегда должны быть кратны $\dfrac{\tau}{2}$. На рис. 30 [25, 26] показана $R\tau$-схема элемента пространства с параметрами $\varepsilon_a \geqslant \varepsilon_0$, $\mu_a \geqslant \mu_0$, соответствующая RLC-схеме “четырехугольник”, со шлейфами длиной $\dfrac{\tau}{2}$, характеристической проводимостью $\dfrac{Y_C}{4}$ для разомкнутого шлейфа и характеристическим сопротивлением $2Z_L$ для короткозамкнутого шлейфа.

4.3. Моделирование частотно-зависимых диэлектриков. Отличительной особенностью метода ИАЭП является простота и физическая наглядность моделирования частотно-зависимых диэлектриков. Например, эквивалентные схемы элементарных объемов для диэлектриков с параметрами $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_0$ и $\mu_a \leqslant \mu_0$ можно получить из схемы рис. 26 (рис. 30) с помощью замены дополнительных отрицательных емкостей/индуктивностей (разомкнутых/короткозамкнутых шлейфов с отрицательным характеристическим сопротивлением) на положительные индуктивности/емкости (короткозамкнутые/разомкнутые шлейфы с положительным характеристическим сопротивлением) [26]. Получающиеся схемы показаны на рис. 31.

Достаточно интересным следствием данного подхода является обязательная частотная зависимость диэлектрической и/или магнитной проницаемости от частоты в случаях $\varepsilon_a < \varepsilon_0$ и/или $\mu_a < \mu_0$ для консервативных $R\tau$-сеток. Причем такая зависимость от частоты диэлектрической и магнитной проницаемости не может иметь произвольный вид (в теории цепей аналогичное утверждение носит название теоремы Фостера). Это согласуется с физическими представлениями о невозможности превысить фазовую скорость плоской электромагнитной волны в вакууме — скорость света.

Еще более удивительно то, что $R\tau$-схемы вида рис. 31 б, полученные столь простым способом, очень хорошо описывают поведение некоторых реальных веществ с частотно-зависимыми параметрами (напри-

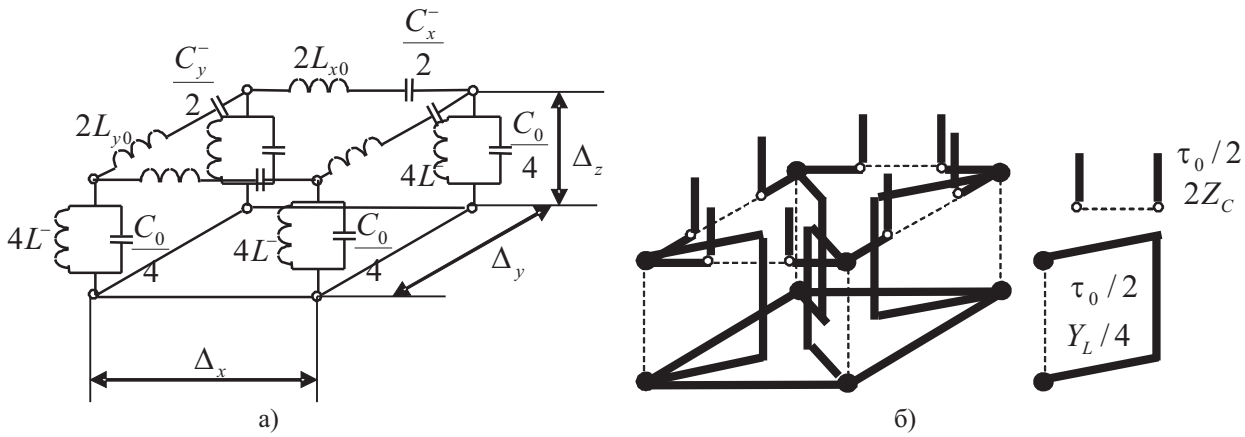


Рис. 31. *RLC*- (а) и $R\tau$- (б) схемы элемента пространства для вещества с диэлектрическим $\varepsilon_a < \varepsilon_0$ и магнитным заполнением $\mu_a < \mu_0$

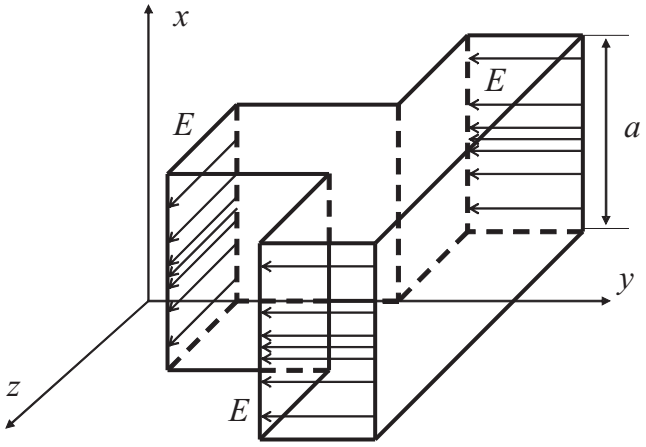


Рис. 32. Геометрия *E*-плоскостного устройства на основе прямоугольного волновода

мер, высокотемпературной плазмы) в достаточно широкой полосе частот. Таким образом, элементы вида рис. 31 б пригодны для расчета как стационарных, так и переходных процессов в данных веществах.

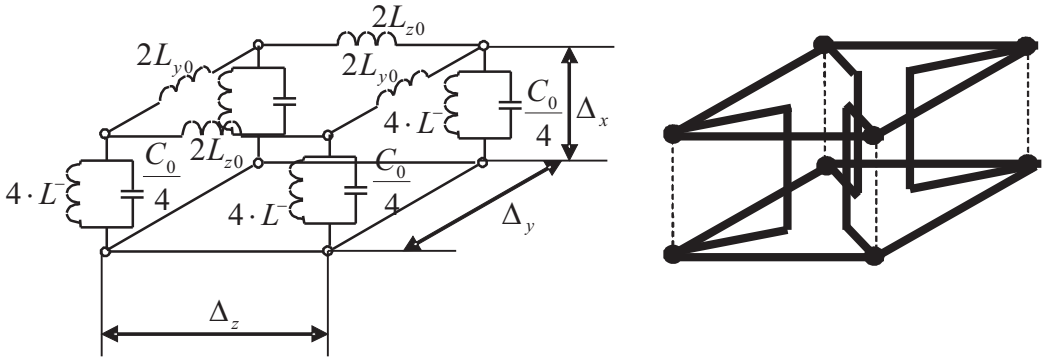


Рис. 33. *RLC*- и $R\tau$-схемы элемента пространства для *E*-плоскостных устройств

Аналогичные схемы получаются для *E*-плоскостных волноводных систем (рис. 32), описываемых

следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial H_x(y,z)}{\partial z} = i\omega\varepsilon_a\left(1 - \frac{\omega^2_{\mathrm{cr}Hm0}}{\omega^2}\right)E_y(y,z),$$
$$-\frac{\partial H_x(y,z)}{\partial y} = i\omega\varepsilon_a\left(1 - \frac{\omega^2_{\mathrm{cr}Hm0}}{\omega^2}\right)E_z(y,z),$$
$$\frac{\partial E_z(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(y,z)}{\partial z} = -i\omega\mu_a H_x(y,z),$$

где ω —циклическая частота и $\omega_{\mathrm{cr}Hm0}$ — критическая частота для волны H_{m0}. Данные схемы показаны на рис. 33. Формулы для параметров L_{y_0}, L_{z_0}, C_0 и L^- приведены в [25].

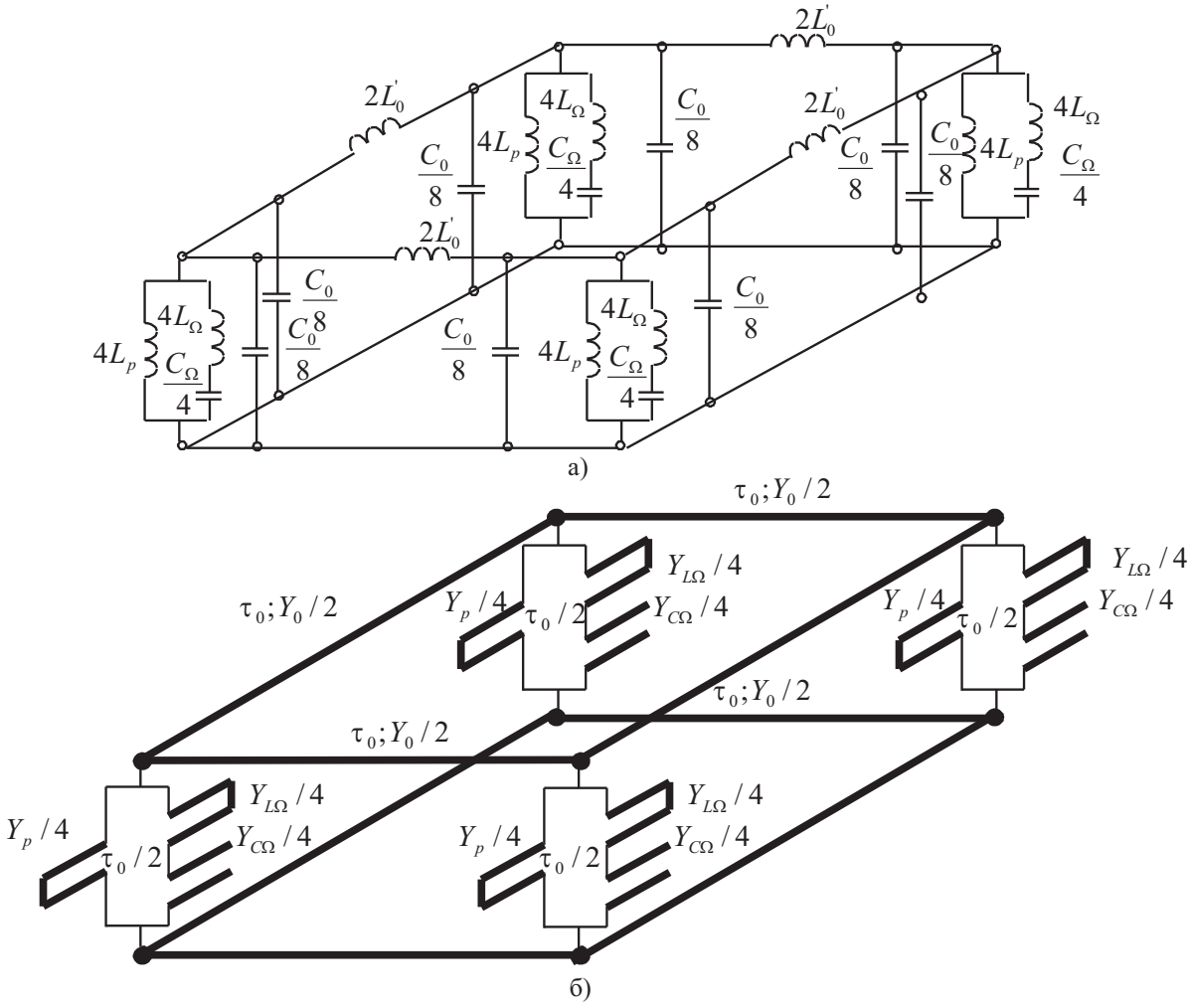


Рис. 34. *RLC*- (а) и $R\tau$- (б) схемы элемента пространства, содержащего подмагниченную плазму

Более сложные схемы получаются для подмагниченной плазмы [28] (рис. 34). Данные схемы получены для системы уравнений, описывающей волны E-поляризации ($E_z = 0$, $H_x = H_y = 0$):

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \left(p\varepsilon_0 + \frac{p\varepsilon_0\omega_p^2}{p^2+\Omega^2}\right)E_x - \frac{\varepsilon_0\omega_p^2\Omega}{p^2+\Omega^2}\,E_y,$$
$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0\omega_p^2\Omega}{p^2+\Omega^2}\,E_x + \left(p\varepsilon_0 + \frac{p\varepsilon_0\omega_p^2}{p^2+\Omega^2}\right)E_y,$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -p\mu_0 H_z,$$

где $p = i\omega$, ω_p — плазменная частота, Ω — циклическая циклотронная частота. Формулы для параметров L_Ω, C_Ω, L_p, L_0, Y_p, $Y_{L\Omega}$ и $Y_{C\Omega}$ приведены в [25, 28].

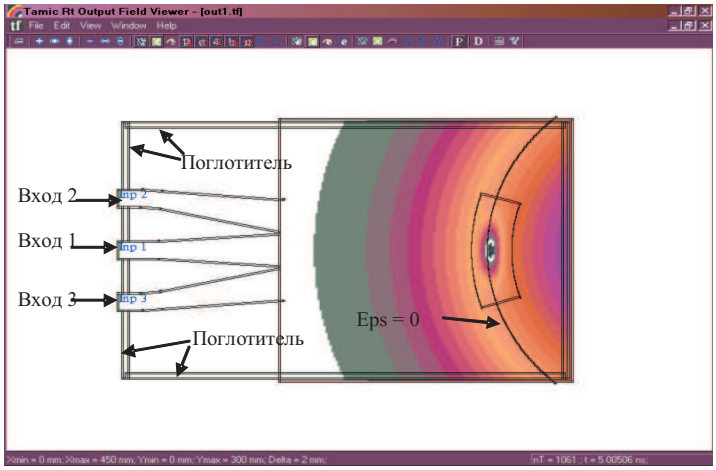


Рис. 35. Геометрия задачи рассеяния на цилиндре с гауссовым возмущением вблизи радиуса с диэлектрической проницаемостью ε, равной нулю

На базе вышеописанных схем создан пакет прикладных программ TAMIC-Rt-H для расчета планарных СВЧ-устройств и анализа плазмы в системах типа ТОКАМАК. Данный пакет используется в РНЦ "Курчатовский институт" для оптимизации волноводной системы рефлектометрической диагностики проектируемой термоядерной установки ITER, а также для сравнения результатов расчета параметров плазмы с экспериментальными данными, полученными на установке ТОКАМАК-10. В настоящее время это единственный пакет, применяемый для диагностики плазмы в установке ТОКАМАК-10.

Пример типичной задачи для ТОКАМАК-10 приведен на рис. 35. В данной задаче требовалось рассчитать отражение от неоднородного (по радиусу) цилиндра с гауссовым возмущением диэлектрической проницаемости вблизи границы, где $\varepsilon = 0$.

Распределения поля E_z в различные моменты времени показано на рис. 36.

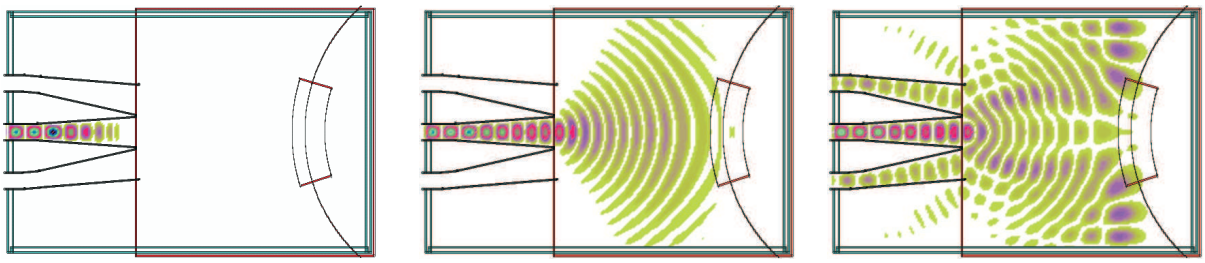


Рис. 36. Распределение амплитуды E_z в различные моменты времени

Подробно вопросы моделирования методом $R\tau$-сеток сред с частотно-зависимыми параметрами изложены в [25 – 28, 66].

4.4. Вычисления во временно́й области. Вычислительные алгоритмы для двумерных $R\tau$-сеток могут быть построены по аналогии с вычислительными алгоритмами для трехмерных сеток. Рассмотрим вычислительный алгоритм для $R\tau$-сетки, составленной из элементов рис. 29.

На рис. 37 изображено девять элементов этой сетки. Пунктирными линиями обозначены границы элементов, жирными — линии передачи, кружками — их пересечение. S-матрица центрального узла элемента рис. 29 (т.е. S-матрица пересечения линий передачи) задается следующей формулой [16, 23]:

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Данная S-матрица не зависит от частоты. Этот факт позволяет использовать элемент рис. 29 при вычислениях как в частотной, так и во временно́й области. В частотной области падающие и отражен-

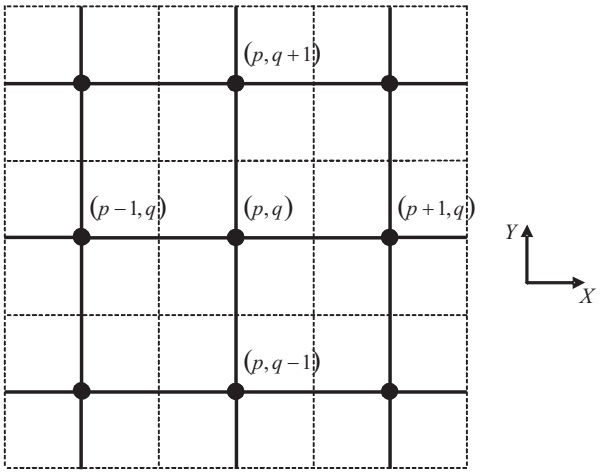


Рис. 37. Бесконечная $R\tau$-сетка, образованная из элементов рис. 29 (вид сверху)

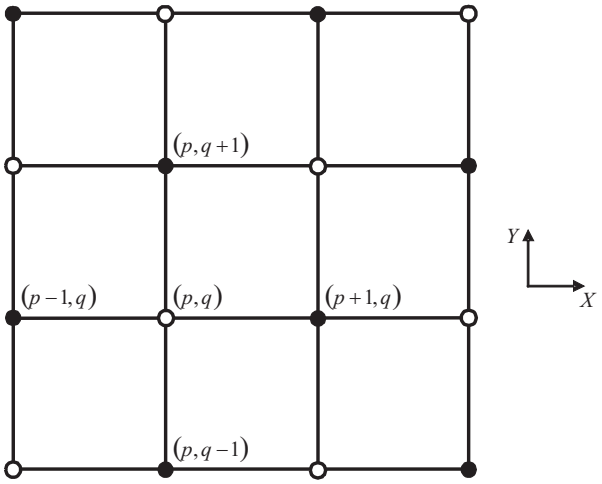


Рис. 38. Бесконечная $R\tau$-сетка, образованная из элементов рис. 28 (вид сверху)

ные волны будут связаны следующим образом: $\mathbf{O} = \left(e^{-i\omega_0\tau} \cdot S\right) \times \mathbf{\Pi}$, где $\mathbf{\Pi} = \left[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\right]$ — вектор падающих волн, $\mathbf{O} = \left[\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \mathrm{O}_3, \mathrm{O}_4\right]$ — вектор отраженных волн. Во временно́й области данная S-матрица связывает вектор прямоугольных импульсов $\mathbf{\Pi}^{(n)} = \left[\Pi_1^{(n)}, \Pi_2^{(n)}, \Pi_3^{(n)}, \Pi_4^{(n)}\right]$ длительностью τ, падающих на входы элемента в момент времени $t_n = n\tau$, с вектором прямоугольных импульсов $\mathbf{O}^{(n+1)} = \left[\mathrm{O}_1^{(n+1)}, \mathrm{O}_2^{(n+1)}, \mathrm{O}_3^{(n+1)}, \mathrm{O}_4^{(n+1)}\right]$, отраженных от входов элемента в момент времени t_{n+1}:

$$\mathbf{O}^{(n+1)} = S \times \mathbf{\Pi}^{(n)}. \tag{14}$$

В данном случае импульс с амплитудой U соответствует элементарному потоку Гюйгенса с энергией $U^2 Y_0 \tau$.

Пронумеруем в $R\tau$-сетке рис. 37 каждый элемент индексами (p, q) соответственно по оси X и Y. Координаты центрального узла элемента с индексами (p, q) положим равными $(p\Delta, q\Delta)$. Обозначим через $\mathbf{\Pi}^{(p,q,n)}\left(\mathbf{O}^{(p,q,n)}\right)$ вектор импульсов, падающих на входы (отражаемых от входов) элемента с индексами (p, q) в момент времени t_n. Тогда согласно (14) падающие и отраженные импульсы будут связаны следующим образом:

$$\mathbf{O}^{(p,q,n+1)} = S \times \mathbf{\Pi}^{(p,q,n)}. \tag{15}$$

Импульсы $\mathrm{O}_k^{(p,q,n+1)}$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, отраженные от входов элемента с индексами (p, q), являются падающими для соседних элементов:

$$\Pi_{2-l}^{(p+l,q,n)} = \mathrm{O}_{2+l}^{(p,q,n)}, \quad \Pi_{3-l}^{(p,q+l,n)} = \mathrm{O}_{3+l}^{(p,q,n)}, \quad l \in \{-1, 1\}. \tag{16}$$

Вычислительный процесс для $R\tau$-сетки рис. 37 аналогичен описанному выше для трехмерной потоковой $R\tau$-сетки и состоит в циклическом повторении двух этапов: в момент времени $t_0 = 0$ на входах исследуемой системы задаются падающие импульсы $\mathbf{\Pi}^{(p,q,0)}$, производится операция "рассеяния" согласно формулам (13), (15) и определяются отраженные импульсы $\mathbf{O}^{(p,q,\tau)}$. Затем производится операция "переброса" импульсов согласно формулам связи (16). После этого вычислительный процесс повторяется до достижения необходимой точности анализа системы. Таким образом, для проведения вычислений по данному алгоритму требуется хранить $4N$ переменных, где N — количество элементов, и использовать восемь операций на один временной шаг для одного элемента [23, 67]. Критерий прекращения вычислений — такой же, как и для трехмерной потоковой $R\tau$-сетки.

Граничные условия для описанного алгоритма вводятся на гранях элементов. Идеальный металл моделируется коротким замыканием клемм на грани, идеальный магнетик (магнитная стенка) — холостым ходом. Алгоритмически это соответствует изменению операции "переброса" импульсов. Например, при введении металла на грани со входом 1 (рис. 29) соответствующее уравнение связи в (16) изменится на следующее: $\Pi_1^{(p,q,n)} = -\mathrm{O}_1^{(p,q,n)}$.

При моделировании внешних задач применяются различные поглощающие граничные условия [41 – 43]. В простейшем случае ко входам элементов подключаются резисторы с сопротивлением, равным волновому сопротивлению вакуума.

Для данного алгоритма поля могут определяться как в центре элемента, так и на его гранях. Приведем связь импульсов-потоков и полей на левой и нижней гранях элемента на рис. 29:

$$E_z^{(p-1/2,q,n)} = \frac{\Pi_1^{(p,q,n)} + \mathrm{O}_1^{(p,q,n)}}{\Delta_z}, \quad H_y^{(p-1/2,q,n)} = Y_0 \frac{-\Pi_1^{(p,q,n)} + \mathrm{O}_1^{(p,q,n)}}{\Delta},$$
$$E_z^{(p,q-1/2,n)} = \frac{\Pi_2^{(p,q,n)} + \mathrm{O}_2^{(p,q,n)}}{\Delta_z}, \quad H_x^{(p,q-1/2,n)} = Y_0 \frac{\Pi_2^{(p,q,n)} - \mathrm{O}_2^{(p,q,n)}}{\Delta}.$$

Описанный выше алгоритм называется четырехпараметрическим (по количеству хранимых параметров). Более эффективным в вычислительном отношении является двухпараметрический алгоритм. Данный алгоритм применяется для $R\tau$-сетки, составленной из элементов рис. 28 (рис. 38), и оперирует импульсами напряжений на узлах сетки.

Поскольку бесконечные $R\tau$-сетки рис. 37 и рис. 38 идентичны (различаются только способы введения граничных условий), то для построения вычислительного алгоритма в пустом пространстве будем использовать сетку рис. 37. Анализ схемы элемента рис. 29 показывает [23], что импульс напряжения $U_{p,q}^{(n+1/2)}$ в центральном узле элемента с индексами (p,q) в момент времени $t_{n+1/2}$ связан с импульсами-потоками на входах элемента следующим образом:

$$U_{p,q}^{(n+1/2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \Pi_i^{(p,q,n)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \mathrm{O}_i^{(p,q,n+1)}. \tag{17}$$

Анализ S-матрицы (13) дает еще одну связь между импульсами-потоками и импульсами напряжения:

$$\mathrm{O}_i^{(p,q,n+1)} = U_{p,q}^{(n+1/2)} - \Pi_i^{(p,q,n)}, \tag{18}$$

откуда получаем уравнение связи для импульсов напряжения на соседних узлах:

$$U_{p,q}^{(n+1)} = \frac{U_{p-1,q}^{(n)} + U_{p+1,q}^{(n)} + U_{p,q-1}^{(n)} + U_{p,q+1}^{(n)}}{2} - U_{p,q}^{(n-1)}. \tag{19}$$

Таким образом, для расчета напряжений в момент времени t_{n+1} необходимо знать напряжения в моменты времени t_n и t_{n-1}. Нетрудно заметить, что формула (19) совпадает с одним из консервативных вариантов конечно-разностной схемы 2-го порядка для волнового уравнения. Поэтому алгоритм анализа сетки рис. 38 во многом совпадает с конечно-разностным алгоритмом анализа данного уравнения. В методе ИАЭП принято использовать "шахматный" алгоритм расчета, основанный на понятии четности узла [54, 68]. Каждому узлу с индексами (p,q) присваивается четность $P_{p,q} = (p+q) \bmod 2$. Тогда согласно (19) можно вести расчет для четных узлов (белые кружки на рис. 38) только в четные моменты времени $t_{2n} = 2n\tau$, а для нечетных узлов (черные кружки на рис. 38) — только в нечетные моменты времени $t_{2n+1} = (2n+1)\tau$, что позволяет вдвое уменьшить количество хранимых параметров. Данный алгоритм является однопараметрическим и требует в среднем 2.5 операции на один временной шаг для одного узла [25].

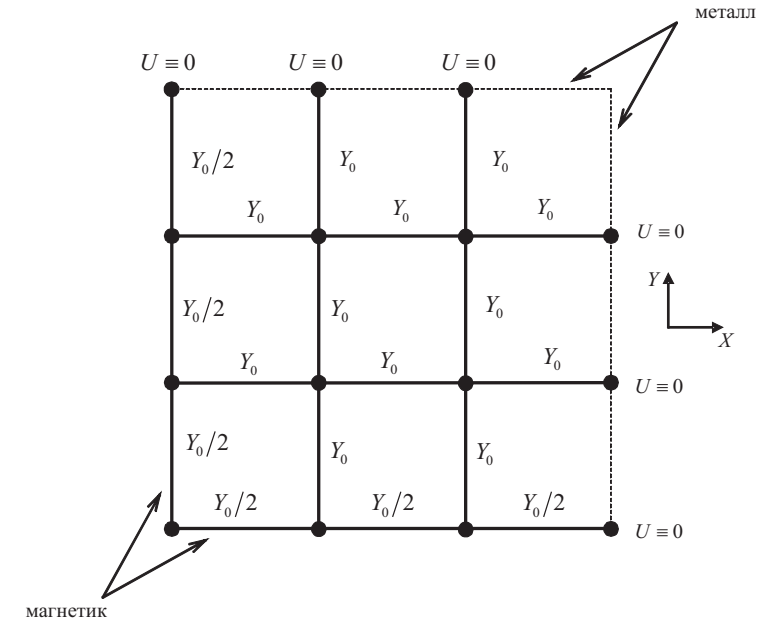


Рис. 39. Введение граничных условий в сетку рис. 38

Граничные условия для сетки рис. 38 вводятся на гранях элементов рис. 28. Электрическая стенка соответствует подключению к узлам нагрузки с нулевым сопротивлением, магнитная — подключению

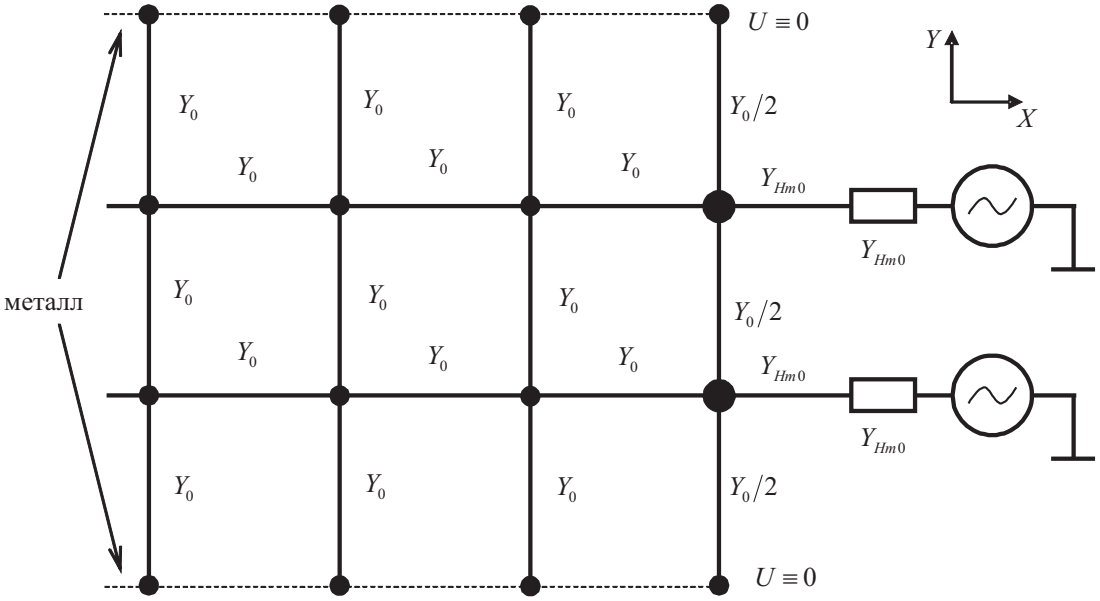


Рис. 40. Одномодовый одночастотный трансформатор для двумерной $R\tau$-сетки рис. 38

нагрузки с нулевой проводимостью. Поэтому эквивалентные схемы электрической и магнитной стенок существенно различны: электрическая стенка закорачивает граничные узлы и удаляет линии передач между ними, магнитная стенка сохраняет линии передачи между граничными узлами, но удваивает их характеристическое сопротивление (рис. 39). Изменение схемы узла на границе анализируемой области влечет изменение формулы (17) для напряжения и формулы рассеяния (19). Например, если узел лежит на электрической стенке, то полагают $U_{p,q}^{(n+1/2)} = \Pi^{(p,q,n)} + \mathrm{O}^{(p,q,n+1)} = 0$.

Отметим, что такой способ введения граничных условий сохраняет возможность расчета по "шахматному" алгоритму.

На рис. 40 изображен одномодовый одночастотный трансформатор [25, 69] для волновода шириной $N\Delta$. Трансформатор состоит из $N-1$ генераторов потоков с внутренней проводимостью $Y_{Hm0} = \dfrac{1}{W_{Hm0}}$. В момент времени $t_0 = 0$ генераторы начинают излучать с тактом τ падающую волну (эквидистантный пакет прямоугольных импульсов с синусоидальной огибающей): $\Pi_k(t_n) = U_{k0}\sin(\omega_0 n\tau)$, $k = 1, \ldots, N-1$. Эти импульсы излучаются в линии передач с характеристической проводимостью Y_{Hm0}, непосредственно подключенные к генераторам. Энергия каждого импульса-потока равна $\Pi_k^2(t_n)Y_{Hm0}\tau$.

Алгоритм расчета на узлах, непосредственно прилегающих к генератору (более крупные кружки на рис. 40, см. также рис. 41), изменяется: напряжения определяются по более общей формуле

$$U = \frac{2\sum_{j=1}^{4} Y_j \Pi_j}{\sum_{j=1}^{4} Y_j}.$$

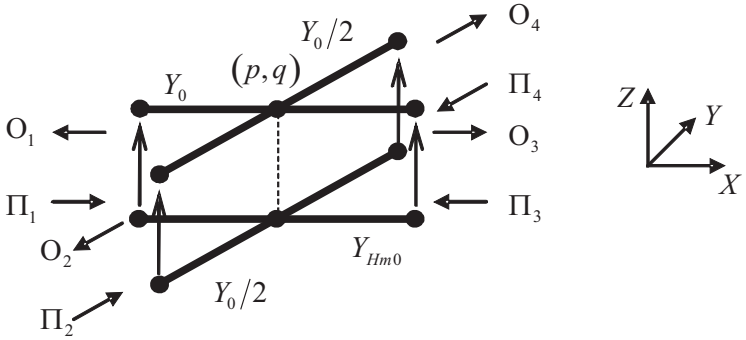


Рис. 41. Схема отдельного узла одномодового трансформатора рис. 40

Отраженные обратно в генератор импульсы-потоки определяются по формуле (18). Поскольку в начальный момент времени напряжения на всех узлах и потоки во всех линиях равны нулю, то указанных формул достаточно для определения напряжения на всех узлах и отраженных импульсов-потоков на всех входах исследуемой системы. Параметры отраженной волны определяются на основе Фурье-анализа отраженных импульсов. Точный учет сеточного волнового сопротивления позволяет добиться для данного трансформатора идеального согласования (с точностью до машинного шума) возбуждающего устройства и волноводной системы [25, 69]. Процедура нахождения сеточного вол-

нового сопротивления описана в следующем разделе статьи.

4.5. Оценка точности двумерных импедансных сеток. В методе ИАЭП точность регулярных импедансных сеток обычно оценивается с помощью анализа сеточной дисперсии. В данном разделе мы опишем известные результаты для наиболее простых импедансных сеток. Начнем анализ с наиболее известного типа сеточной дисперсии — фазовой дисперсии плоских волн.

Для RLC-сетки, составленной из элементарных схем рис. 25, 26, плоская сеточная волна определяется как собственное решение вида $U_{n,m} = U_0 \exp(-i\boldsymbol{k}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{r}_{n,m})$, где $\boldsymbol{r}_{n,m} = (n\Delta_x, m\Delta_y)$ — радиус-вектор емкости (узла) с индексами (n, m), $U_{n,m}$ — комплексное напряжение на емкости с индексами (n, m), U_0 — комплексная амплитуда волны, $\boldsymbol{k}_{\mathrm{c}} = k_{\mathrm{c}}\boldsymbol{n} = (k_x, k_y)$ — сеточный волновой вектор, $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ — направление распространения волны. В [23] выведено уравнение дисперсии для плоской волны:

$$\frac{\Delta_x}{\Delta_y}\left[1 - \cos(k_y\Delta_y)\right] + \frac{\Delta_y}{\Delta_x}\left[1 - \cos(k_x\Delta_x)\right] = \frac{\Delta_x\Delta_y}{2}\,k_0^2, \tag{20}$$

где $k_0 = \omega_0\sqrt{\mu_a\varepsilon_a}$ — волновой вектор в среде с диэлектрическим заполнением μ_a, ε_a. Там же приведена приближенная формула для длины волны в сетке:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_{\mathrm{c}} - \lambda_0}{\lambda_0} \approx -\frac{\pi^2}{6}\,\frac{\Delta_x^2\cos^4\alpha + \Delta_y^2\sin^4\alpha}{\lambda_0^2}, \tag{21}$$

где $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{k_0}$ — длина волны в среде с диэлектрическим заполнением μ_a, ε_a и $\lambda_{\mathrm{c}} = \dfrac{2\pi}{k_{\mathrm{c}}}$ — длина волны в сетке.

Дисперсные свойства $R\tau$-сеток, как правило, существенно лучше дисперсных свойств их RLC-аналогов. Например, для $R\tau$-сетки рис. 28, 29 ($R\tau$-аналога RLC-сетки рис. 25, 26) уравнение дисперсии для плоской волны описывается формулой [33, 70]

$$2\cos\left(\frac{k_0\Delta}{\sqrt{2}}\right) = \cos(k_x\Delta) + \cos(k_y\Delta), \tag{22}$$

где k_0 — волновой вектор в пустом пространстве, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$. Непосредственный анализ формулы (22) показывает, что при $\alpha = 45^\circ$ фазовая скорость сеточной волны совпадает со скоростью света в вакууме для любого дискрета Δ. Приближенный анализ дает следующую формулу для длины волны в сетке:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_c - \lambda_0}{\lambda_0} = -\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2\cos^2 2\alpha + O(\Delta^4),$$

где $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{k_0}$ — длина волны в свободном пространстве, $\lambda_{\mathrm{c}} = \dfrac{2\pi}{k_{\mathrm{c}}}$ — длина волны в сетке. Сравнивая эту формулу с приближенной формулой (21) для RLC-сетки, получаем, что сеточная дисперсия в $R\tau$-сетке меньше в среднем в три раза.

Более подробное сравнение дисперсии RLC- и $R\tau$-сеток приведено на рис. 42, где изображены дисперсионные кривые, полученные для точных уравнений (20) и (22) (для RLC-сетки — при условии $\Delta = \Delta_x = \Delta_y$).

Другой важный тип сеточной дисперсии — дисперсия волноводных мод H_{m0}. В [33, 71] получены выражения для расчета длины волны H_{m0}, распространяющейся в RLC-сетке рис. 25, 26, моделирующей регулярный полый металлический волновод с поперечным сечением прямоугольной формы. Для определения длины волны λ_{Hm0} принимается допущение о том, что в продольном направлении, то есть вдоль оси Y, распределение напряжений имеет характер бегущей волны, а в поперечном направлении напряжение распределено по синусоидальному закону. Полученное выражение имеет вид

$$\lambda_{Hm0} = \frac{2\pi\Delta_y}{\arccos\left\{1 - \dfrac{k_0^2\Delta_y^2}{2} + \dfrac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2}\left[1 - \cos\left(\dfrac{\pi m}{N}\right)\right]\right\}},$$

где N — число элементарных ячеек вдоль широкой стенки волновода. Это выражение совпадает в пределе при Δ_x, $\Delta_y \to 0$ с классической формулой для длины волны H_{m0}. Отметим, что последняя формула превращается в формулу (20), если положить $k_x = \dfrac{\pi m}{N\Delta_x}$ и $k_y = \dfrac{2\pi}{\lambda_{Hm0}}$.

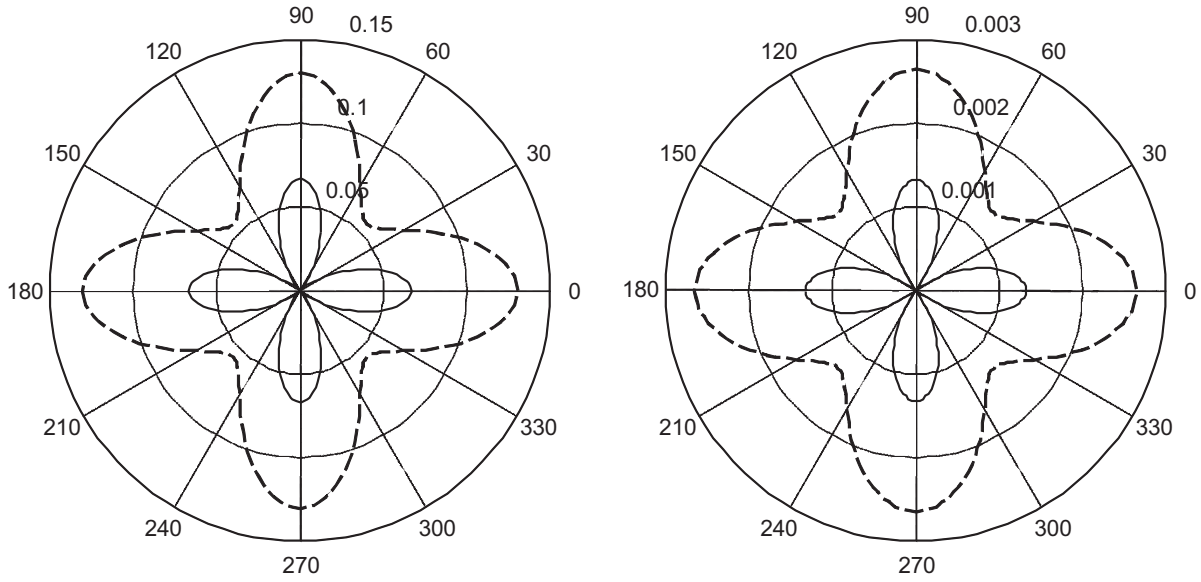


Рис. 42. Зависимость $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ от угла α для планарных RLC- (пунктирная линия) и $R\tau$-сеток (сплошная линия) при различных отношениях $\dfrac{\Delta}{\lambda_0}$: $\dfrac{\Delta}{\lambda_0}=\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{\Delta}{\lambda_0}=\dfrac{1}{25}$

Аналогичным образом исследуется фазовая сеточная дисперсия волн H_{m0} для $R\tau$-сеток. Приведем выражение для длины волны H_{m0} [25, 27] в $R\tau$-сетке рис. 28, 29:

$$\lambda_{Hm0}=\frac{2\pi\Delta}{\arccos\left[2\cos\left(\dfrac{k_0\Delta}{\sqrt{2}}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi m}{N}\right)\right]}.$$

Это выражение также совпадает в пределе при $\Delta\to 0$ с классической формулой для длины волны H_{m0} и превращается в формулу (22), если положить $k_x=\dfrac{\pi m}{N}\,\Delta_x$ и $k_y=\dfrac{2\pi}{\lambda_{Hm0}}$.

Сравнивать фазовую сеточную дисперсию волн H_{m0} не имеет особого смысла, поскольку это сравнение фактически уже представлено на рис. 42.

Погрешность вычислений параметров СВЧ-устройств вызывается не только фазовой сеточной дисперсией, но и амплитудной. Для сеточных мод H_{m0} амплитудная сеточная дисперсия определяется отличием характеристического сопротивления сеточной волны H_{m0} от аналогичного сопротивления для непрерывного случая. Для вычисления сеточного характеристического сопротивления волны H_{m0} в работах [23, 33, 71] использован следующий прием. Регулярный сеточный волновод, составленный из эквивалентных схем рис. 25 а, условно рассекается поперечной плоскостью, проходящей через емкости и индуктивности L_x (рис. 43 а). Каждый узел с клеммами 2, 4, 5, находящимися в этой плоскости (рис. 43 б), разделяется на две части (рис. 43 в). Между клеммами 5 и $5'$ появляется ток.

Теперь, если вместо правой подсхемы подключить к клемме 5 и к "земле" сопротивление $R=W_{Hm0}$ (рис. 43 г), то распределение токов и напряжений в левой подсхеме не изменится. Величина сеточного характеристического сопротивления W_{Hm0} определяется формулой [33]

$$W_{Hm0}=\frac{W_a k_0\Delta_y\Delta_z}{\Delta_x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left[1-\dfrac{k_0^2\Delta_y^2}{2}+\dfrac{\Delta_y^2}{\Delta_x^2}\left(1-\dfrac{\cos\pi m}{N}\right)\right]^2}},$$

где $W_a=\sqrt{\dfrac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ — волновое сопротивление среды.

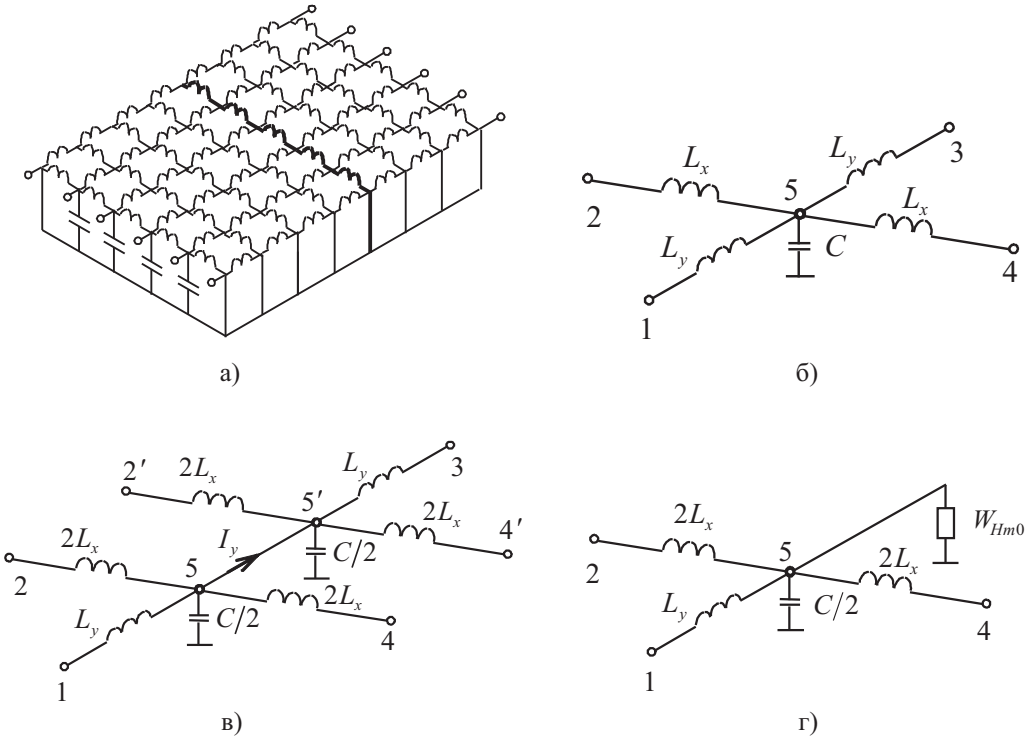


Рис. 43. Определение характеристического сопротивления сеточной волны: а) разделение регулярного волновода поперечной плоскостью, б) отдельный узел в поперечной плоскости, в) разделение узла поперечной плоскостью на две части, г) замена правой части схемы характеристическим сопротивлением

Схема, используемая для определения характеристического сопротивления сеточной волны H_{m0} в $R\tau$-сетке рис. 28, показана на рис. 44.

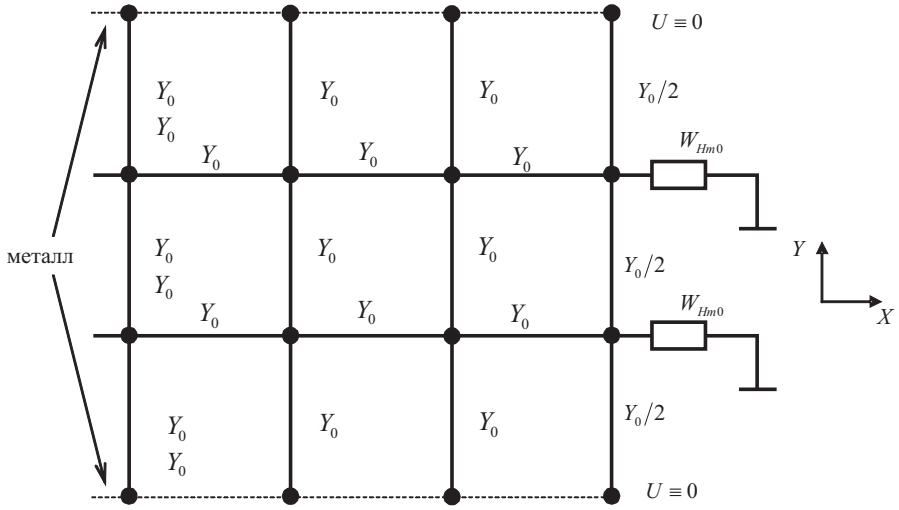


Рис. 44. $R\tau$-схема, предназначенная для определения характеристического сопротивления сеточной волны H_{m0} в $R\tau$-сетке рис. 28

Данная схема является $R\tau$-аналогом схемы рис. 43 г. Величина W_{Hm0}, вычисленная для схемы рис. 44, определяется формулой [27]

$$W_{Hm0} = \sin\left(\frac{k_0\Delta}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{Y_0\sin\left(k_{Hm0}\Delta\right)}, \quad k_{Hm0} = \frac{2\pi}{\lambda_{Hm0}}.$$

5. Заключение. Изложенные концепции метода ИАЭП (импедансных RLC- и $R\tau$-сеток) предполага-

ют использование интуитивно понятной модели изучаемой системы и относительно простого математического аппарата, присущего теории цепей. Одной из основных задач исследователя является синтез удачной эквивалентной схемы, позволяющей создавать эффективные вычислительные алгоритмы. Достигнутые на этом пути результаты не хуже, а зачастую и превосходят результаты, достигнутые с помощью других методов.

Укажем перспективные задачи метода ИАЭП:

— разработка сеток с уменьшенной дисперсионной ошибкой;

— моделирование процессов распространения электромагнитных волн в подмагниченной плазме;

— создание эффективных алгоритмов для многочастотного анализа импедансных $R\tau$-сеток во временно́й области;

— разработка треугольных элементов для уточнения границ;

— разработка эквивалентных схем для киральных и бианизотропных сред;

— решение практических задач проектирования планарных СВЧ-устройств и систем любого требуемого уровня сложности;

— расширение метода для решения смежных физико-математических и технических задач: акустики, термодинамики, механики, гидродинамики и др. [72];

— уточнение схем элементов, учитывающих концентрацию поля на ребрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сестрорецкий Б.В.* Полупроводниковые коммуникаторы для высокочастотных трактов // Современные проблемы антенно-волноводной техники. М.: Наука, 1967. 126–144.
2. *Сестрорецкий Б.В.* Полупроводниковые регулирующие устройства СВЧ // СВЧ устройства на полупроводниковых диодах. Проектирование и расчет. М.: Сов. радио, 1969. 414–572.
3. *Сестрорецкий Б.В.* Возможности прямого численного решения краевых задач на основе метода импедансного аналога электромагнитного пространства (ИАЭП) // Вопросы радиоэлектроники. Сер. “Общетехническая”. 1976. Вып. 2. 113–128.
4. *Гершгорин С.А.* Об электрических сетках для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа // Журнал прикладной физики. 1929. **6**, вып. 3–4. 3–29.
5. *Гутенмахер Л.И.* Электрическое моделирование. М.: Изд-во АН СССР, 1943.
6. *Тетельбаум И.М.* Электрическое моделирование. М.: Физматгиз, 1959.
7. *Веников В.А.* Физическое моделирование электрических систем. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1956.
8. *Штейн Н.И.* Методы электрического моделирования волноводов // Электрическое моделирование. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
9. *Пухов В.В., Сазонов В.П.* Модели с сосредоточенными параметрами для изучения электромагнитных полей // Вопросы радиоэлектроники. Сер. 1. Электроника. 1961. Вып. 12. 3–32.
10. *Филатова Е.А.* Дисс.... канд. техн. наук. М.: МЭИ, 1969.
11. *Федоров Н.Н.* Решение двумерных задач электродинамики в неоднородных средах методом моделирования // Радиотехника. М.: Труды МЭИ, 1969. Вып. 65.
12. *Федоров Н.Н.* Решение некоторых задач электродинамики в неоднородных средах методами конечно-разностных сеток: Дисс.... канд. техн. наук. М.: МЭИ, 1969.
13. *Kron G.* Equivalent circuits of the field equations of Maxwell // Proc. of I.R.E. May 1944. 289–299.
14. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. М.: Сов. радио, 1978.
15. *Крон Г.* Исследование сложных систем по частям (диакоптика). М.: Наука, 1972.
16. *Johns P.B., Beurle R.L.* Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix // Proc. Inst. Elec. Eng. Sept. 1971. **118**. 1203–1208.
17. *Christopoulos C.* The Transmission-Line Modelling (TLM) method. Series on Electromagnetic Wave Theory. IEEE/Oxford University Press, 1995.
18. *Петров А.С., Иванов С.А, Королев С.А., Фастович С.В.* Метод матриц линий передачи в вычислительной электродинамике // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2002. № 1. 3–38.
19. *Nikol'skii V.V., Lavrova T.I.* The method of minimum autonomous blocks and its application to waveguide diffraction problems // Radio Engineering and Electronic Physics. 1978. **23**, N 2. 1–10.
20. *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983.
21. *Сестрорецкий Б.В., Владимиров Ю.К.* О некоторых задачах машинного проектирования сложных СВЧ систем // Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. Общество “Знание” Украинской ССР. Киев, 1974. Вып. 1. 14–15.
22. *Рыков В.В., Сестрорецкий Б.В.* Машинное моделирование нестационарных процессов в твердотельных СВЧ генераторах // Межвузовский сборник научных трудов “Машинное проектирование устройств и систем СВЧ”. М.: МИРЭА, 1978. Вып. 2. 110–132.

23. *Кухаркин Е.С., Сестрорецкий Б.В.* Диалоговая оптимизация топологии устройств в электродинамических САПР. М.: МЭИ, 1987.
24. *Рученков В.А., Камышев Т.В., Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В., Белостоцкая К.К.* Проектирование режекторных волноводных фильтров для диплексера станций "Индия" // Радиотехнические тетради. М.: ОКБ МЭИ. 2004. № 30. 20–23.
25. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В., Вершков В.А., Солдатов С.В., Камышев Т.В., Рученков В.А.* Электродинамический анализ двумерных неоднородных сред и плазмы. М.: МАКС Пресс, 2005.
26. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В.* Построение консервативных сеток для решения двумерных задач электродинамического анализа систем с произвольным распределением диэлектрической и магнитной проницаемостей // Радиотехника и электроника. 2001. **46**, № 1. 30–39.
27. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В.* Анализ во временной области планарных структур с произвольным распределением диэлектрической проницаемости // Радиотехника и электроника. 2001. **46**, № 3. 271–276.
28. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В.* Построение эквивалентной схемы элементарного объема пространства для подмагниченной плазмы // Радиотехника и электроника. 2005. **50**, № 6. 647–658.
29. *Рученков В.А.* Развитие методики импедансного аналога электромагнитного пространства: Дисс. ... канд. техн. наук. М.: МГИЭМ, 2006.
30. *Кустов В.Ю.* Импедансная интерпретация метода конечных элементов для электродинамического анализа планарных волноводных устройств: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1988.
31. *Сестрорецкий Б.В. RLC* и $R\tau$-аналоги электромагнитного пространства // Межвузовский сборник научных трудов "Машинное проектирование устройств и систем СВЧ". М.: МИРЭА, 1977. 127–158.
32. *Сестрорецкий Б.В.* Балансные *RLC* и $R\tau$ схемы элементарного объема пространства // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1983. Вып. 5. 56–85.
33. *Сестрорецкий Б.В., Петров А.С., Иванов С.А., Климов К.Н., Королев С.А., Фастович С.В.* Анализ электромагнитных процессов на основе *RLC* и $R\tau$ сеток. М.: МГИЭМ, 2000.
34. *Карцев И.Ю.* Метод импедансно-сеточной функции Грина для решения двумерных задач дифракции: Дисс. ... канд. техн. наук. М.: МЭИ, 1991.
35. *Сестрорецкий Б.В., Карцев И.Ю.* Метод импедансно-сеточной функции Грина для решения двумерных задач дифракции // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1991. Вып. 1. 18–26.
36. *Сестрорецкий Б.В., Кустов В.Ю., Шлепнев Ю.О.* Анализ СВЧ-микросборок методом информационного многополюсника // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1988. Вып. 12. 26–42.
37. *Hoefer W.J.R.* The Transmission Line Matrix (TLM) method // Numerical Techniques for Passive Microwave and Millimeter — Wave Structures. T. Itoh, Ed. New York: Wiley, 1989. Ch. 8. 486–591.
38. *Johns P.B.* A new mathematical model to describe the physics of propagation // The Radio and Electronic Eng. 1974. N 44, N 12. 657–665.
39. *Russer P., Bader B.* The Alternating Transmission Line Matrix (ATLM) scheme // 1995 MTT-S International Microwave Symposium Digest. 1995. Vol. I. 19–22.
40. *Иванов С.А., Сестрорецкий Б.В., Середов В.М., Климов К.Н.* Новые эффективные 3D алгоритмы электродинамического анализа на основе потоковых сеток // VII Всероссийская школа-семинар "Волновые явления в неоднородных средах". Красновидово, Московская обл. 22 – 27 мая, 2000. **2**. 101–103.
41. *Berenger J.P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 1994. **114**. 185–200.
42. *Berenger J.P.* An effective PML for the absorption of evanescent waves in waveguides // IEEE Microwave and Guided Wave Letters. May 1998. **8**, N 5. 188–190.
43. *Fang J., Wu Z.* Generalized perfectly matched layer for the absorption of propagating and evanescent waves in lossless and lossy media // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Dec. 1996. 2216–2222.
44. *Сестрорецкий Б.В., Иванов С.А., Климов К.Н.* Теория и точность аппарата потоковых сеток во временной области при одночастотном и многочастотном трехмерном электродинамическом анализе // Сб. трудов IV Международной научно-технической конференции "Антенно-фидерные устройства, системы и средства радиосвязи". Воронеж, 1999. 32–40.
45. *Ivanov S.A., Sestroretsky B.V.* Dispersion of plane waves in 3D stream type grids // Proceedings of 1998 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET'98). Kharkov, June 2 – 5, 1998. **2**. 600–602.
46. *Nielsen J.S., Hoefer W.J.R.* Generalized dispersion analysis and spurious modes of 2-D and 3-D TLM formulations // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Aug. 1993. 1375–1384.
47. *Сестрорецкий Б.В., Азюкин А.В., Дризе М.А., Иванов С.А., Климов К.Н.* Электродинамическое моделирование и испытание опытных образцов широкополосных двух- и четырехпортовых трактов наземных антенн Ku и C диапазонов для перспективных спутников связи // Сб. трудов IV Международной научно-технической конференции "Антенно-фидерные устройства, системы и средства радиосвязи". Воронеж, 1999. 278–291.
48. *Сестрорецкий Б.В., Пригода Б.А., Иванов С.А.* Широкополосная плоская отражающая антенна с наклонным лучом // Сборник трудов III международной научно-технической конференции "Антенно-фидерные устройства, системы и средства радиосвязи (ICARSM-97)". Воронеж, май 1997. **2**. 255–263.
49. *Сестрорецкий Б.В., Пригода Б.А., Дризе М.А., Иванов С.А.* Электродинамическое исследование однослойной

антенны с круговой поляризацией Ка диапазона с отверстиями сложной конфигурации // IX Международная Крымская микроволновая конференция “СВЧ техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь, 13 – 16 сентября 1999. 196–198.
50. *Сестрорецкий Б.В., Дорофеев А.В., Савченко А.Н., Дризе М.А., Иванов С.А.* Электродинамическое моделирование во временной области двухпортовой плоской антенны С-диапазона круговой поляризации с печатными излучателями // Сб. трудов IV Международной научно-технической конференции “Антенно-фидерные устройства, системы и средства радиосвязи”. Воронеж, 1999. 292–295.
51. *Сестрорецкий Б.В., Иванов С.А., Фастович С.В., Петров А.С.* Моделирование волноводных устройств с помощью $R\tau$ метода. М.: МГИЭМ, 1999.
52. *Johns P.B.* A symmetrical condensed node for the TLM method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Apr. 1987. 370–377.
53. *Trenkic V.* The development and characterization of advanced nodes for the TLM method // Thesis Philosophy Doctor Degree. University Nottingham, UK, 1995.
54. *Sestroretsky B.V., Ivanov S.A.* A new 6-parametrical three-dimensional algorithm for 12-port symmetrical condensed node // TLM-99. III International Workshop on TLM Modelling, Theory and Applications. Nitza, France, October 27 – 29, 1999. 197–200.
55. *Akhtarzad S., Johns P.B.* Generalized elements for TLM method of numerical analysis // Proc. IEEE. Dec. 1975. **122**. 1349–1352.
56. *Кухаркин Е.С., Сестрорецкий Б.В.* Машинные методы расчета в инженерной электрофизике. М.: МЭИ, 1986.
57. *Сестрорецкий Б.В., Климов К.Н., Королев С.А., Петров А.С.* Моделирование планарных волноводных устройств с помощью метода импедансных сеток. М.: МГИЭМ, 1999.
58. *Голиус А.Б., Вешникова И.Е., Сестрорецкий Б.В., Чернов И.В.* Расчет волнового сопротивления полосковой линии методом импедансного аналога электромагнитного пространства // Вопросы радиоэлектроники. Сер. “Общетехническая”. 1976. Вып. 3. 38–47.
59. *Сестрорецкий Б.В., Кустов В.Ю.* Эффективный алгоритм анализа плоских волноводных устройств // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1988. Вып. 2. 3–16.
60. *Голиус А.Б., Сестрорецкий Б.В.* Алгоритмы вычисления параметров плоских волноводных систем методом ИАЭП // Межвузовский сборник научных трудов “Машинное проектирование устройств и систем СВЧ”. М.: МИРЭА, 1978. Вып. 2. 133–146.
61. *Бахрах Л.Д., Ильинский А.С. и др.* К 80-летию со дня рождения Б.В. Сестрорецкого // Радиотехника и электроника. 2004. **49**, № 3. 380–382.
62. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
63. *Сестрорецкий Б.В., Зиновьев А.В.* Электродинамический анализ и оптимизация геометрии Е-плоскостных волноводных устройств // Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1988. Вып. 12. 43–50.
64. *Сестрорецкий Б.В., Дризе М.А., Иванов С.А., Климов К.Н.* Тракты наземных антенн Ku и C диапазонов для перспективных спутников связи // III Международная конференция “Антенная теория и техника”. Севастополь, 8 – 11 сентября 1999. 528–533.
65. *Иванов С.А., Сестрорецкий Б.В., Дризе М.А.* Синтез поляризатора, реализованного на изгибе волновода // Крымская микроволновая конференция “СВЧ техника и телекоммуникационные технологии”. Севастополь, 8 – 12 сентября 2003. 55–56.
66. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В.* Дифференциальные уравнения электромагнитных волн во временной области в средах с частотной дисперсией // Радиотехника и электроника. 2001. **46**, № 10. 1223–1225.
67. *Hoefer W.* The transmission-line matrix method — theory and applications // IEEE Trans., Oct. 1985. 882–893.
68. *Russer P.* The Alternating Rotating Transmission Line Matrix (ARTLM) scheme // Electromagnetics. October 1996. N 16 (1). 537–551.
69. *Климов К.Н., Сестрорецкий Б.В.* Граничные условия поглощения и возбуждения плоских и собственных волн прямоугольного волновода в планарной $R\tau$-сетке // Радиотехника и электроника. 2001. **46**, № 9. 1048–1058.
70. *Brewitt-Taylor C.R., Johns P.B.* On the construction and numerical solution of transmission-line and lumped network models of Maxwell's equations // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980. **19**. 13–30.
71. *Голиус А.Б., Сестрорецкий Б.В.* Оценка методических ошибок при расчете плоских волноводных устройств методом ИАЭП // Вопросы радиоэлектроники. Сер. “Общетехническая”. 1979. Вып. 3. 43–57.
72. Digest of the Third International Workshop on Transmission Line Matrix (TLM) // University of Nice-Sophia. Antipolis, France, October 27 – 29, 1999.

Поступила в редакцию
22.08.2008