УДК 519.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ

А. Б. Калинина[1]

Рассмотрена задача стабилизации по правой части неустойчивых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана теорема существования искомого управления, предложен и обоснован алгоритм его построения, приведены результаты численных расчетов.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08–01–00415-а, 08–05–00738-а).

Ключевые слова: методы стабилизации, обыкновенные дифференциальные уравнения, неустойчивые решения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A^{-}u + h(u,v), \\ \dot{v} &= A^{+}v + g(u,v), \end{aligned} \tag{1}$$

где $u \in U = \mathbb{R}^l$, $v \in V = \mathbb{R}^m$, $l + m = n$, спектр матрицы A^- лежит слева от мнимой оси, спектр матрицы A^+ — справа от мнимой оси, функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле.

Пусть заданы $u_0 \in U$, v_0, $v_1 \in V$, $T \in \mathbb{R}$ и такое подпространство $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$, что $P_V\mathcal{F} = V$, где P_V — ортогональный проектор на V. Требуется найти такой не зависящий от времени вектор управления $\bigl(f^-, f^+\bigr) = f(u_0, v_0, v_1, T) \in \mathcal{F}$, $f^- \in U$, $f^+ \in V$, чтобы для системы

$$\begin{aligned} &\dot{u} = A^{-}u + h(u,v) + f^{-}, \\ &\dot{v} = A^{+}v + g(u,v) + f^{+}, \\ &u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \end{aligned} \tag{2}$$

в фиксированный момент времени T выполнялось условие

$$v(T) = v_1. \tag{3}$$

По сути, искомое управление обеспечивает требуемую динамику на подпространстве V. Если $V \subseteq \mathcal{F}$, то искомый вектор f принадлежит подпространству V.

Решение данной задачи можно использовать для стабилизации по правой части неустойчивых решений эволюционных систем. Отметим, что задача асимптотической стабилизации по краевым условиям рассматривалась в работах [1, 2], а по начальным данным — в работе [3].

2. Алгоритм решения. Пусть вектор f^+ найден; тогда из условия $P_V\mathcal{F} = V$ следует, что вектор $f = \bigl(f^-, f^+\bigr)$ с наименьшей нормой в подпространстве $\mathcal{F}$ существует, единственен и принадлежит подпространству $P_{\mathcal{F}}V$. Выразим f^- через f^+ следующим образом.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — некоторый базис в V, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — соответствующий ему базис в подпространстве $P_{\mathcal{F}}V$, $\eta_1, \ldots, \eta_l$ — некоторый базис в U. Построим матрицу D с элементами $d_{ij} = \langle \xi_i, \psi_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, m$, и матрицу B с элементами $b_{ij} = \langle \eta_i, \psi_j \rangle$, $i = 1, \ldots, l$, $j = 1, \ldots, m$, где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда выражение для вектора f^- примет вид

$$f^- = BD^{-1}f^+. \tag{4}$$

---

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: vokati@yandex.ru

Отметим, что решение задачи (2), (3) удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u(t) = e^{A^- t} u_0 + \int\limits_0^t e^{A^-(t-s)} h\big(u(s), v(s)\big)\, ds + \int\limits_0^t e^{A^-(t-s)} f^-\, ds,$$

$$v(t) = e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int\limits_t^T e^{-A^+(s-t)} g\big(u(s), v(s)\big)\, ds - \int\limits_t^T e^{-A^+(s-t)} f^+\, ds, \quad v(0) = v_0.$$

Введем матрицу I^+ по формуле $I^+ = \int\limits_0^T e^{-A^+ s}\, ds.$

Если исходная задача линейна (т.е. g, $h \equiv 0$), то из условия $v(0) = v_0$ для искомой поправки $f^+ \equiv f^{0+}$ получим уравнение $I^+ f^{0+} = e^{-A^+ T} v_1 - v_0$, а вектор f^{0-} найдем по формуле (4). В нелинейном случае (т.е. при $f, g \not\equiv 0$) используем вектор $f^0 = \big(f^{0-}, f^{0+}\big)$ в качестве начального приближения для нижеследующего итерационного процесса.

Пусть найдено некоторое приближение искомого управления f^N, $N \geqslant 0$.

1. Построим решение $u^N(t)$, $v^N(t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} &\dot u = A^- u + h(u, v) + f^{N-}, \\ &\dot v = A^+ v + g(u, v) + f^{N+}, \\ &u(0) = u_0, \quad v(T) = v_1 \end{aligned} \tag{5}$$

с помощью следующего итерационного метода при $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} &u^{N,0}(t) = e^{A^- t} u_0 + \int\limits_0^t e^{A^-(t-s)} f^{N-}\, ds, \\ &v^{N,0}(t) = e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int\limits_t^T e^{-A^+(s-t)} f^{N+}\, ds; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &u^{N,k+1}(t) = u^{N,0}(t) + \int\limits_0^t e^{A^-(t-s)} h\big(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\big)\, ds, \\ &v^{N,k+1}(t) = v^{N,0}(t) - \int\limits_t^T e^{-A^+(s-t)} g\big(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\big)\, ds. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Значение $f^{(N+1)+}$ определим из условия

$$v_0 = e^{-A^+ T} v_1 - \int\limits_0^T e^{-A^+ s} g\big(u^N(s), v^N(s)\big)\, ds - \int\limits_0^T e^{-A^+ s} f^{(N+1)+}\, ds.$$

3. По найденному значению $f^{(N+1)+}$ построим $f^{(N+1)-}$ по формуле (4).

Отметим, что итерационный процесс (6), (7) решения уравнения (5) аналогичен описанному в [4] методу решения краевой задачи вблизи седлового положения равновесия.

3. Обоснование сходимости метода. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\operatorname{spec} A^-$ *лежит слева от мнимой оси,* $\operatorname{spec} A^+$ *— справа от мнимой оси, функции* g *и* h *непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле и задано такое подпространство* $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$*, что* $P_V \mathcal{F} = V$*. Тогда для любого* $T > 0$ *найдется такое* $\varepsilon > 0$*, что при произвольных* $u_0 \in U$*,* $v_0, v_1 \in V$*:* $\|u_0\| \leqslant \varepsilon$*,* $\|v_1\| \leqslant \|v_0\| \leqslant \varepsilon$ *существует вектор* $f = f(u_0, v_0, v_1, T) \in \mathcal{F}$*, обеспечивающий выполнение условия* (3) *для системы уравнений* (2).

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы итерационный процесс 1 – 3 сходится к искомому вектору управления f. Пусть $\Theta = \max\Big\{1, \big\|BD^{-1}\big\|\Big\}$, где матрицы B и D взяты из формулы (4).

Пусть значения $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ таковы, что спектр матрицы A^- лежит в комплексной плоскости строго слева от прямой $\operatorname{Re} z = -\lambda$, а спектр матрицы A^+ — строго справа от прямой $\operatorname{Re} z = \gamma$. В этом случае существует такая постоянная $C_1 \geqslant 1$, что при любом $s \in [0, \infty)$ выполняются оценки

$$\left\| e^{A^- s} \right\| \leqslant C_1 e^{-\lambda s}, \quad \left\| e^{-A^+ s} \right\| \leqslant C_1 e^{-\gamma s}. \tag{8}$$

Обозначим $\Gamma = \max\left\{\lambda^{-1}, \gamma^{-1}\right\}$.

Поскольку функции g и h непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности нуля и равны нулю вместе со своими первыми производными в нуле, то в ε-окрестности нуля в пространстве (u, v) для дифференциала отображения (h, g) выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial(h, g)}{\partial(u, v)} \right\| \leqslant \delta; \tag{9}$$

следовательно,

$$\|h, g\| \leqslant \delta \|u, v\|, \tag{10}$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а через $\|a, b\|$ обозначен $\max\left\{\|a\|, \|b\|\right\}$. Выберем значение ε настолько малым, чтобы для всех u и v, таких, что $\|u\| \leqslant C_2\varepsilon$ и $\|v\| \leqslant C_2\varepsilon$, выполнялись оценки (9), (10), а значение δ удовлетворяло неравенству

$$C_1 C_2 \Gamma \delta \leqslant \theta < 1, \tag{11}$$

где $C_2 = C_1 + C_1\Gamma\Theta C_3 + \theta$ и $C_3 = \left\|(I^+)^{-1}\right\| (C_1 + 1 + \theta)$.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть известно f^{N+}: $\left\|f^{N+}\right\| \leqslant C_3\varepsilon$, где величина ε обеспечивает выполнение условия* (11). *Тогда при любых $u_0 \in U$, $v_1 \in V$, $T \in \mathbb{R}$, таких, что $\|u_0\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_1\| \leqslant \varepsilon$, $T > 0$, итерационный процесс* (6), (7) *сходится и при всех $t \in [0, T]$ верны оценки*

$$\left\|u^N(t)\right\| \leqslant C_2\varepsilon, \quad \left\|v^N(t)\right\| \leqslant C_2\varepsilon. \tag{12}$$

Доказательство леммы 1. Покажем сначала, что при всех $t \in [0, T]$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$\left\|u^{N,k}(t)\right\| \leqslant C_2\varepsilon, \quad \left\|v^{N,k}(t)\right\| \leqslant C_2\varepsilon. \tag{13}$$

При $k = 0$ верны оценки

$$\left\|u^{N,0}(t)\right\| \leqslant C_1 e^{-\lambda t} \|u_0\| + \int\limits_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \left\|f^{N-}\right\| ds \leqslant C_1\varepsilon + C_1\lambda^{-1} \left\|BD^{-1}\right\| C_3\varepsilon \leqslant (C_1 + C_1\Gamma\Theta C_3)\,\varepsilon \leqslant C_2\varepsilon,$$

$$\left\|v^{N,0}(t)\right\| \leqslant C_1 e^{-\gamma(T-t)} \|v_1\| + \int\limits_t^T C_1 e^{-\gamma(s-t)} \left\|f^{N+}\right\| ds \leqslant C_1\varepsilon + C_1\gamma^{-1} C_3\varepsilon \leqslant (C_1 + C_1\Gamma\Theta C_3)\,\varepsilon \leqslant C_2\varepsilon.$$

Чтобы обосновать неравенства (13) при всех значениях k, используем метод математической индукции. Пусть оценка (13) верна для некоторого $k \geqslant 0$ при всех $t \in [0, T]$. Из условий (7) и неравенств (8) и (10) получаем

$$\left\|u^{N,k+1}(t)\right\| \leqslant \left\|u^{N,0}(t)\right\| + \int\limits_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \delta \left\|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\right\| ds,$$

$$\left\|v^{N,k+1}(t)\right\| \leqslant \left\|v^{N,0}(t)\right\| + \int\limits_t^T C_1 e^{-\gamma(s-t)} \delta \left\|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\right\| ds,$$

откуда

$$\left\|u^{N,k+1}(t), v^{N,k+1}(t)\right\| \leqslant (C_1 + C_1\Gamma\Theta C_3)\,\varepsilon + C_1\Gamma\delta \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \left\|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\right\|.$$

Из неравенства (11) заключаем, что если при всех $s \in [0, T]$ имеет место неравенство $\left\|u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\right\| \leqslant C_2\varepsilon$, то

$$\left\|u^{N,k+1}(t), v^{N,k+1}(t)\right\| \leqslant (C_1 + C_1\Gamma\Theta C_3 + \theta)\,\varepsilon = C_2\varepsilon$$

при всех $t \in [0,T]$, откуда следует, что неравенства (13) выполняются для любого $k \geqslant 0$.

Теперь покажем, что при всех $k = 1, 2, \dots$ верно неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \left\| u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t), v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t)\right\| \leqslant \\ \leqslant \alpha \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\|, \tag{14}$$

где $\alpha < 1$. Для этого выпишем оценки

$$\left\| h\big(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\big) - h\big(u^{N,k-1}(s), v^{N,k-1}(s)\big)\right\| \leqslant \\ \leqslant \max_{\|u,v\|\leqslant C_2\varepsilon} \left\| \frac{\partial(h,g)}{\partial(u,v)}\right\| \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\| \leqslant \\ \leqslant \delta \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\|,$$

$$\left\| g\left(u^{N,k}(s), v^{N,k}(s)\right) - g\left(u^{N,k-1}(s), v^{N,k-1}(s)\right)\right\| \leqslant \delta \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\|.$$

Из уравнений (7) следует, что

$$\left\| u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t)\right\| \leqslant \int\limits_0^t C_1 e^{-\lambda(t-s)} \delta \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\| ds \leqslant \\ \leqslant C_1\lambda^{-1}\delta \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\|,$$

$$\left\| v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t)\right\| \leqslant C_1\gamma^{-1}\delta \max_{0\leqslant s\leqslant T} \left\| u^{N,k}(s) - u^{N,k-1}(s), v^{N,k}(s) - v^{N,k-1}(s)\right\|.$$

Положим $\alpha = C_1\Gamma\delta$, тогда в силу неравенства (11) имеем $\alpha C_2 \leqslant \theta < 1$. Поскольку $C_2 \geqslant 1$, то $\alpha < 1$. Таким образом, из полученных неравенств следует оценка (14).

В силу неравенства (14) члены ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(u^{N,k+1}(t) - u^{N,k}(t), v^{N,k+1}(t) - v^{N,k}(t)\big) \tag{15}$$

при любом $t \geqslant 0$ ограничены по норме членами геометрической прогрессии с показателем $\alpha < 1$. Таким образом, ряд (15) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\big(u^N(t), v^N(t)\big)$. По построению $\big(u^N(t), v^N(t)\big)$ — предел последовательных приближений (6), (7). Переходя в уравнениях (7) к пределу при $k \to \infty$, получим, что $\big(u^N(t), v^N(t)\big)$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u^N(t) = e^{A^- t} u_0 + \int\limits_0^t e^{A^-(t-\tau)} h\big(u^N(\tau), v^N(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_0^t e^{A^-(t-\tau)} f^{N-}\, d\tau,$$

$$v^N(t) = e^{-A^+(T-t)} v_1 - \int\limits_t^T e^{-A^+(\tau-t)} g\big(u^N(\tau), v^N(\tau)\big)\, d\tau - \int\limits_t^T e^{-A^+(\tau-t)} f^{N+}\, d\tau.$$

Дифференцирование правых частей этих уравнений по t показывает, что $\big(u^N(t), v^N(t)\big)$ — решение системы уравнений (5).

Переходя в неравенствах (13) к пределу при $k \to \infty$, получим оценки (12). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\|u_0\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_1\| \leqslant \|v_0\| \leqslant \varepsilon$, $T > 0$, *а величина* ε *обеспечивает выполнение условия* (11). *Тогда при любом* $N = 0, 1, 2, \dots$ *верна оценка* $\left\| f^{N+}\right\| \leqslant C_3\varepsilon = \left\| (I^+)^{-1}\right\| (C_1 + 1 + \theta)\varepsilon$.

Доказательство леммы 2. Докажем лемму 2 по индукции. При $N = 0$ имеем

$$f^{0+} = (I^+)^{-1}\big(e^{-A^+T} v_1 - v_0\big), \quad \left\| f^{0+}\right\| \leqslant \left\| (I^+)^{-1}\right\| (C_1 + 1)\varepsilon < C_3\varepsilon.$$

Пусть для некоторого $N \geqslant 0$ утверждение леммы 2 верно; тогда по лемме 1 можно найти $\bigl(u^N(t), v^N(t)\bigr)$, удовлетворяющие неравенствам (12). Из выражения

$$I^+ f^{(N+1)+} = e^{-A^+T} v_1 - v_0 - \int\limits_0^T e^{-A^+s} g\left(u^N(s), v^N(s)\right) ds$$

следует оценка $\left\| f^{(N+1)+} \right\| \leqslant \left\| (I^+)^{-1} \right\| (C_1 + 1 + C_1 C_2 \Gamma \delta)\varepsilon \leqslant C_3 \varepsilon$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\|u_0\| \leqslant \varepsilon$, $\|v_1\| \leqslant \|v_0\| \leqslant \varepsilon$, $T > 0$, *а величина* ε *обеспечивает выполнение условия* (11). *Тогда существует такая величина* $\beta < 1$, *что* $\left\| f^{(N+1)+} - f^{N+} \right\| \leqslant \beta \left\| f^{N+} - f^{(N-1)+} \right\|$ *при всех* $N > 0$.

Доказательство леммы 3. При $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned} I^+ f^{(N+1)+} &= e^{-A^+T} v_1 - v_0 - \int\limits_0^T e^{-A^+s} g\left(u^N(s), v^N(s)\right) ds, \\ I^+ f^{N+} &= e^{-A^+T} v_1 - v_0 - \int\limits_0^T e^{-A^+s} g\left(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+} = - \int\limits_0^T e^{-A^+s} \Bigl[g\bigl(u^N(s), v^N(s)\bigr) - g\bigl(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s)\bigr) \Bigr] ds.$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \left\| I^+ \bigl(f^{(N+1)+} - f^{N+}\bigr) \right\| &\leqslant \int\limits_0^T C_1 e^{-\gamma s} \left\| g\bigl(u^N(s), v^N(s)\bigr) - g\bigl(u^{N-1}(s), v^{N-1}(s)\bigr) \right\| ds \leqslant \\ &\leqslant C_1 \gamma^{-1} \delta \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \left\| u^N(s) - u^{N-1}(s), v^N(s) - v^{N-1}(s) \right\|. \end{aligned}$$

Пусть $W = \max\limits_{0 \leqslant s \leqslant T} \left\| u^N(s) - u^{N-1}(s), v^N(s) - v^{N-1}(s) \right\|$, тогда

$$\left\| I^+ f^{(N+1)+} - I^+ f^{N+} \right\| \leqslant C_1 \Gamma \delta W. \tag{16}$$

Решение $\bigl(u^N(t), v^N(t)\bigr)$ краевой задачи (5) удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$u^N(s) = e^{A^-s} u_0 + \int\limits_0^s e^{A^-(s-\tau)} h\bigl(u^N(\tau), v^N(\tau)\bigr) d\tau + \int\limits_0^s e^{A^-(s-\tau)} f^{N-} d\tau, \tag{17}$$

$$v^N(s) = e^{-A^+(T-s)} v_1 - \int\limits_s^T e^{-A^+(\tau-s)} g\bigl(u^N(\tau), v^N(\tau)\bigr) d\tau - \int\limits_s^T e^{-A^+(\tau-s)} f^{N+} d\tau. \tag{18}$$

Из уравнений (17), (18), записанных для N и $N-1$, следуют оценки

$$\left\|u^N(s)-u^{N-1}(s)\right\| \leqslant \int\limits_0^s C_1 e^{-\lambda(s-\tau)}\left\|h\big(u^N(\tau),v^N(\tau)\big)-h\big(u^{N-1}(\tau),v^{N-1}(\tau)\big)\right\|d\tau +$$
$$+\int\limits_0^s C_1 e^{-\lambda(s-\tau)}\left\|f^{N-}-f^{(N-1)-}\right\|d\tau \leqslant C_1\Gamma\delta W + C_1\Gamma\left\|BD^{-1}\right\|\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|,$$
$$\left\|v^N(s)-v^{N-1}(s)\right\| \leqslant \int\limits_s^T C_1 e^{-\gamma(\tau-s)}\left\|g\big(u^N(\tau),v^N(\tau)\big)-g\big(u^{N-1}(\tau),v^{N-1}(\tau)\big)\right\|d\tau +$$
$$+\int\limits_s^T C_1 e^{-\gamma(\tau-s)}\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|d\tau \leqslant C_1\Gamma\delta W + C_1\Gamma\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|.$$

Из полученных оценок находим, что $W \leqslant C_1\Gamma\delta W + C_1\Gamma\Theta\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|$; следовательно,

$$(1-C_1\Gamma\delta)W \leqslant C_1\Gamma\Theta\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|.$$

Поскольку $C_1\Gamma\delta \leqslant \dfrac{\theta}{C_2} < 1$, то можно разделить обе части полученного неравенства на $(1-C_1\Gamma\delta)$ и подставить результат в оценку (16). Получим

$$\left\|I^+f^{(N+1)+}-I^+f^{N+}\right\| \leqslant \frac{C_1\Gamma\delta}{1-C_1\Gamma\delta}\,C_1\Gamma\Theta\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|.$$

Отсюда

$$\left\|f^{(N+1)+}-f^{N+}\right\| = \left\|(I^+)^{-1}\big(I^+f^{(N+1)+}-I^+f^{N+}\big)\right\| \leqslant \frac{C_1\Gamma\delta}{1-C_1\Gamma\delta}\left\|(I^+)^{-1}\right\|C_1\Gamma\Theta\left\|f^{N+}-f^{(N-1)+}\right\|.$$

Пусть $Q = \left\|(I^+)^{-1}\right\|C_1\Gamma\Theta$ и $\beta = \dfrac{C_1\Gamma\delta Q}{1-C_1\Gamma\delta}$. В силу неравенства (11) имеем $\beta \leqslant \dfrac{\theta Q}{C_2-\theta}$. Поскольку $C_2 = C_1+\theta+Q(C_1+\theta)+Q > Q$, а $\theta<1$, то $\beta<1$. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 3 следует, что последовательность $\left\{f^{N+}\right\}_{N=0}^{\infty}$ — фундаментальная, поэтому она сходится к некоторому вектору f^+. Поскольку f^{N-} восстанавливается однозначно по формуле (4), то и последовательность векторов f^N сходится. Теорема доказана.

4. Результаты расчетов. Для уравнения Чафе–Инфанта

$$\begin{aligned} &w_t(t,x) = w_{xx}(t,x) + \alpha w(t,x) + \beta w^3(t,x),\\ &w(0,x) = w_0(x), \quad w(t,0) = w(t,\pi) = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $x\in[0,\pi]$ и $t\geqslant 0$, можно записать n-е приближение по методу Галеркина. Будем предполагать, что $w(t,x) \approx \sum\limits_{j=1}^n w_j(t)e_j(x)$, $e_j(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\sin jx$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot w_j(t) = \lambda_j w_j(t) + \beta\big\langle w^3(t,x), e_j(x)\big\rangle,\\ &w_j(0) = \big\langle w_0(x), e_j(x)\big\rangle = w_{j0}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $\lambda_j = -j^2+\alpha$ и $j=1,\dots,n$.

Применим предложенный метод стабилизации по правой части к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (20).

Отметим, что решение задачи стабилизации по правой части для уравнения (19) в терминах конечно-разностных схем рассматривается в работе [5].

j	$\\|f\\|$	$\\|\mathbf{w}\\|$
1	$1.829\times10^{+01}$	3.850×10^{-01}
2	1.837×10^{-02}	4.376×10^{-02}
3	3.370×10^{-07}	8.838×10^{-03}
4	3.013×10^{-10}	1.786×10^{-03}
5	2.774×10^{-13}	3.611×10^{-04}
6	2.554×10^{-16}	7.301×10^{-05}
7	0.	1.476×10^{-05}
8	0.	2.984×10^{-06}
9	0.	6.032×10^{-07}
10	0.	1.219×10^{-07}

Пусть m таково, что все $\lambda_j < 0$ при $j \leqslant m$ и все $\lambda_j > 0$ при $j > m$. Обозначим $v = (w_1, \dots, w_m)$, $u = (w_{m+1}, \dots, w_n)$, $v_0 = (w_{10}, \dots, w_{m0})$ и $u_0 = \big(w_{(m+1)0}, \dots, w_{n0}\big)$, тогда уравнение (20) примет вид (1) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} &A^+ = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad A^- = \operatorname{diag}\{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}, \\ &g_j(u,v) = \beta\left\langle \left(\sum_{i=1}^n w_i e_i\right)^3, e_j \right\rangle, \quad j = 1, \dots, m, \\ &h_j(u,v) = \beta\left\langle \left(\sum_{i=1}^n w_i e_i\right)^3, e_{j+m} \right\rangle, \quad j = 1, \dots, n-m. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть $\varphi_j(x) = \begin{cases} e_j(x), & x \in D; \\ 0, & x \in [0,\pi] \setminus D, \end{cases}$ где $D = \left[\frac{1}{7}\pi, \frac{2}{7}\pi\right] \cup \left[\frac{3}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi\right]$. Координаты базисных векторов $\overline{\varphi}_j$ пространства $\mathcal{F}$ определим так: $\overline{\varphi}_{ji} = \langle \varphi_j, e_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$. Подпространство $\mathcal{F}$ зададим в виде $\mathcal{F} = \operatorname{span}\left\{\overline{\varphi}_j\right\}_{j=1,\dots,n}$.

Приведем результаты расчетов для случая $\alpha = 17$, $\dim V = 4$, $\beta = -10$, $n = 100$, $T = 0.2$, $v_1 = 0$. Обозначим $\mathbf{w}(t) = \big(v(t), u(t)\big)$. В таблице представлены норма поправки $\|f\|$, вносимой в правую часть уравнения при $t \in \big[(j-1)T, jT\big]$, и норма решения $\|\mathbf{w}\|$ при $t = jT$.

Результаты численных экспериментов показывают, что предложенный алгоритм позволяет решать задачи асимптотической стабилизации для систем нелинейных дифференциальных уравнений большой размерности, при этом уже начальное приближение f^0 достаточно эффективно обеспечивает процесс стабилизации.

Отметим, что норма поправки, необходимой для выполнения условия $v(T) = v_1 = 0$, мало отличается от нормы поправки для произвольного v_1, $\|v_1\| < \|v_0\|$, тогда как в первом случае эффективность процесса стабилизации существенно выше.

Отдельно проводилось сравнение эффективности и области применимости данного алгоритма и алгоритма из работы [5] для приближенного решения задачи стабилизации по правой части уравнения (2). Численно показано, что эти методы дают качественно близкие результаты.

Автор приносит благодарность А. А. Корневу за постановку задачи и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсиков А.В.* Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье–Стокса посредством управления с обратной связью с границы области // Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. Т. 2. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2002. 127–164.
2. *Chizhonkov E.V.* Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. **18**, N 5. 363–376.
3. *Корнев А.А.* Метод асимптотической стабилизации по начальным данным к заданной траектории // Журн. вычисл. матем. матем. физ. 2006. **46**, № 1. 37–51.
4. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
5. *Kornev A.A.* Задачи асимптотической стабилизации по правой части // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2008 (в печати).

Поступила в редакцию
06.05.2008