

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРЕДОБУСЛОВЛИВАТЕЛЯ CPR К ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

К. Ю. Богачев¹, И. Г. Горелов¹

Для решения задачи фильтрации вязкой сжимаемой многофазной смеси в пористой среде на параллельных ЭВМ рассмотрен предобусловливатель CPR для линейной системы, получаемой в результате пространственной дискретизации неявной схемы и последующего применения метода Ньютона для решения нелинейных систем. Проведено сравнение эффективности и масштабируемости в зависимости от числа процессоров для предобусловливателей CPR и ILU(0) на реальных задачах.

Ключевые слова: линейные системы, предобусловливатель, фильтрация жидкости, неявные схемы, параллельные вычисления.

1. Введение. Для задачи фильтрации вязкой сжимаемой многофазной смеси в пористой среде рассмотрена проблема выбора предобусловливателя для линейной системы, получаемой в результате пространственной дискретизации неявной схемы и последующего применения метода Ньютона. Проанализирован метод CPR (Constrained Pressure Residual), основанный на идее выбора в качестве предобусловливателя матрицы, фактически отвечающей за неявную только по давлению аппроксимацию IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) и потому имеющей в несколько раз меньшую размерность (в три раза для типичной трехкомпонентной смеси).

Метод CPR был впервые предложен в работе [1]. Его эффективность для полностью неявной схемы на модельных задачах со структурированной сеткой детально исследована в работе [2]. В настоящей статье метод рассмотрен применительно к реальным задачам гидродинамики на параллельных ЭВМ с использованием неоднородных сред и неструктурированных сеток. Рассмотрены различные виды алгебраических преобразований, переводящих одну задачу в другую. На большом количестве реальных задач проведено сравнение практической эффективности различных вариантов CPR-метода [3], в том числе с применением в его составе алгебраического многосеточного метода [4–6], а также проведено сравнение с алгебраическим предобусловливателем ILU(0) — Incomplete LU [7].

Сопоставление таких параметров, как вычислительная сложность, накопление численной ошибки и эффективность распараллеливания на многопроцессорных системах, демонстрирует хорошие перспективы внедрения CPR-метода в вычислительную практику.

2. Постановка задачи. Исходная задача сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi N_c) &= \operatorname{div} \sum_{l=o,w,g} x_{c,l} \xi_l \left(\mathbf{k} \frac{k_{r,l}}{\mu_l} (\nabla p_l - \gamma_l \nabla D) \right) + q_c, \quad c = 1, \dots, n_c, \\ p_o - p_g &= P_{cog}, \quad p_o - p_w = P_{cow}, \\ S_w + S_o + S_g &= 1, \\ N_w &= \frac{S_w}{B_w}, \quad N_o = \frac{S_o}{B_o}, \quad N_g = \frac{S_g}{B_g} + R_{g,o} \frac{S_o}{B_o}, \end{aligned} \quad (1)$$

где n_c — количество компонентов в смеси; $R_{g,o} = R_{g,o}(p_o)$ — растворимость газа в нефтяной фазе; $B_l = B_l(p_l)$ — коэффициент объемного расширения фазы l , $l = o$ (oil), g (gas), w (water); $\phi = \phi(p_w, p_o, p_g, x, y, z)$ — пористость среды; $x_{c,l} = x_{c,l}(p_w, p_o, p_g, \mathbf{N})$ — молярная доля компонента c , $c = 1, \dots, n_c$, в фазе l ; $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_{n_c})$ — вектор молярных плотностей; $\xi_l = \xi_l(p_l, \mathbf{N})$ — молярная плотность фазы l ; тензор абсолютной проницаемости $\mathbf{k} = \mathbf{k}(p_w, p_o, p_g, x, y, z)$; $k_{r,l} = k_{r,l}(S_w, S_g)$ — относительная проницаемость фазы l ; $\mu_l = \mu_l(p_l)$ — вязкость фазы l ; $\gamma_l = \rho_l g$ — вертикальный градиент гидростатического давления в фазе l ; g — гравитационная постоянная; $D = D(x, y, z)$ — вектор глубины (сверху вниз); $p_l = p_l(p_l)$ — массовая плотность фазы l ; $P_{cog} = P_{cog}(S_g)$ — капиллярное давление в системе нефть–газ; $P_{cow} = P_{cow}(S_w)$ —

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: bogachev@mech.math.msu.su; gorelov.ilya@rfdynamics.ru

капиллярное давление в системе вода–нефть; $q_c = q_c(p_w, p_o, p_g, \mathbf{N}, t, x, y, z)$ — источник компонента c (скважина).

Неизвестными в этой системе являются

- 1) $N_c = N_c(t, x, y, z)$ — молярная плотность компонента c (для модели черной нефти компонентами служат вода, нефть и газ),
- 2) $S_l = S_l(t, x, y, z)$ — насыщенность фазы l ,
- 3) $p_l = p_l(t, x, y, z)$ — давление в фазе l .

В случае композиционной модели общее количество неизвестных компонентов n_c может достигать до 21, а вместо последних трех уравнений системы записываются n_c уравнений, связывающих компонентный и фазовый состав смеси.

Для аппроксимации по времени используется либо схема IMPES [8], представляющая собой полуневяную схему, в которой значение давления берется с верхнего слоя по времени, а молярные плотности — с предыдущего, либо полностью неявная схема. Для расчетов реальных месторождений практически всегда используется полностью неявная схема, поскольку она позволяет выбрать больший шаг.

Аппроксимацией по пространственным переменным методом конечных объемов либо конечных элементов первоначальная задача сначала сводится к системе нелинейных уравнений вида

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{n_c}) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{p} = (p^i)$ и $\mathbf{N}_c = (N_c^i)$ — векторы значений давления и молярных плотностей в блоках сетки. Для решения системы нелинейных уравнений $F(U) = 0$, $U \equiv (\mathbf{p}, \mathbf{N})$, используется стандартный метод Ньютона

$$U^{m+1} = U^m - \left(\frac{\partial F(U^m)}{\partial U} \right)^{-1} F(U^m),$$

где $\frac{\partial F(U^m)}{\partial U}$ — отображение (матрица) $\mathbb{R}^{n_c(K+J)} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c(K+J)} \times \mathbb{R}^{n_c(K+J)}$ (одна переменная исключается с помощью уравнения (1)), K — число блоков сетки и J — число скважин.

На каждом шаге метода Ньютона необходимо решать линейную систему с несимметричной матрицей $\frac{\partial F(U^m)}{\partial U}$, т.е. задача сводится к решению системы линейных уравнений: $Ax = r$, матрица которой есть якобиан из метода Ньютона. Матрицу A можно рассматривать как матрицу, элементами которой являются блоки размера $n_c \times n_c$. Значение n_c , в свою очередь, варьируется в зависимости от типа задачи от двух до 21.

3. Идея CPR-метода. Алгоритм предобусловливания этим методом базируется на том факте, что уравнения системы (2) в ячейке с номером i не зависят или мало зависят от значений переменных N_c^i в ячейках, отличных от i -й. В результате появляется возможность приближенно найти переменные p_i , приравняв к нулю все производные по переменным, отличным от p во внедиагональных блоках. Данный алгоритм весьма похож на метод IMPES: если взять значения насыщенностей не с верхнего слоя, а с предыдущего, то производные по ним в матрице A будут равны нулю, причем в диагональном блоке не обязательно полагать значения равными нулю, поскольку их можно сделать нулями с помощью гауссова исключения. Полученное приближенное значение давления используется для предобусловливания всей матрицы A . Таким образом, мы избегаемся от основного недостатка IMPES-метода — слишком малого шага по времени, на котором метод продолжает сходиться. Для приближенного вычисления p используем часть матрицы, состоящую из первых элементов блоков, соответствующих переменной давления.

В пользу CPR-метода говорит также и тот факт, что соответствующие давлению значения производных в матрице A в случае реальной модели часто на порядок превосходят по модулю значения производных, соответствующих молярным плотностям. В результате основной вклад в вектор невязки дает именно та часть матрицы, которая соответствует переменной давления.

Данный алгоритм можно также назвать значительно упрощенной версией алгебраического многосеточного метода, учитывающей специфику конкретной задачи. Более того, получающаяся в результате подматрица A_p часто обладает следующими свойствами:

- все диагональные элементы (за исключением, быть может, нескольких) больше нуля;
- абсолютное большинство внедиагональных элементов меньше или равны нулю;
- сумма элементов в строке больше или равна нулю (слабое диагональное преобладание).

Эти свойства проистекают из того факта, что наши исходные уравнения являются “почти эллиптическими” относительно переменной давления. Реальные вычисления подтверждают эту гипотезу. В случае когда некоторые строки матрицы не имеют описанных свойств, можно немного их подкорректировать

как с помощью исключения части блоков методом Гаусса, так и просто заменой некоторых элементов, поскольку мы ищем лишь приближенное значение давления. Таким образом, для решения подсистемы с матрицей A_p можно применить быстрый алгебраический многосеточный алгоритм.

4. Алгоритм CPR-метода. Обозначим процесс обнуления соответствующих элементов матрицы через $\text{Null}(A)$, процесс коррекции методом Гаусса через $\text{Gauss}(A)$ и процесс выделения из матрицы A подматрицы давления через $\text{Reduce}(A)$. Тогда матрица для приближенного вычисления давления A_p может быть вычислена по формуле $A_p = \text{Reduce}(\text{Gauss}(\text{Null}(A)))$.

На примере одной блочной строки с размером блока 3×3 эта процедура принимает вид следующей последовательности действий:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Null}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Reduce}} a''_{11} \text{ — для диагонального блока;}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Null}} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} b''_{11} & 0 & 0 \\ b'_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Reduce}} b''_{11} \text{ — для внедиагонального блока;}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Null}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} r''_1 \\ r'_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Reduce}} r''_1 \text{ — соответствующая правая часть.}$$

$$\text{Метод Гаусса в данном случае имеет вид} \quad \begin{cases} \{2\}' = \{2\} - \frac{\{3\}}{a_{33}} a_{23}, \\ \{1\}' = \{1\} - \frac{\{3\}}{a_{33}} a_{13}, \\ \{1\}'' = \{1\}' - \frac{\{2\}'}{a'_{22}} a'_{12}. \end{cases}$$

Здесь $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$ — соответственно первая, вторая и третья строки в блоке (или векторе). Для блоков большей (или меньшей) размерности преобразования полностью аналогичны.

Обозначим теперь через M^{cpr} искомый предобусловливатель для матрицы A . Необходимо найти действие M^{cpr} на вектор r , т.е. найти $\bar{x}^{\text{cpr}} = M^{\text{cpr}} r$. Мы стремимся к тому, чтобы действие матрицы M^{cpr} на r давало такой $\bar{x}^{\text{cpr}}$, что $A\bar{x}^{\text{cpr}} \approx r$. Действие предобусловливателя M^{cpr} имеет вид

$$M^{\text{cpr}} Ax = M^{\text{cpr}} r = Mr + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} - MA \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} = \bar{x}^{\text{cpr}}, \quad (3)$$

где M — любой “обычный” (в дальнейшем будем называть его глобальным) предобусловливатель (например $\text{ILU}(0)$), а $\bar{x}_p^{\text{cpr}}$ — подвектор давления, являющийся результатом решения системы

$$A_p \bar{x}_p^{\text{cpr}} = r_p. \quad (4)$$

$$\text{Вектор } r_p \text{ получен из } r \text{ по формуле } r = \begin{pmatrix} P^1 \\ N_1^1 \\ N_2^1 \\ \dots \\ P^n \\ N_1^n \\ N_2^n \end{pmatrix} \Rightarrow r_p = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ \dots \\ P^n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что формула (3) имеет смысл только в том случае, если вектор r есть результат действия матрицы A на искомый вектор x .

Предобусловливание CPR-методом состоит из двух этапов. Сначала нужно применить в качестве предобусловливателя матрицу A_p^{-1} для переменных, соответствующих давлению p . Для этого необходимо выделить из вектора r соответствующий подвектор r_p и решить систему (4), вычислив приближенное значение подвектора $\bar{x}_p^{\text{cpr}}$. Полученный результат следует подставить в формулу (3).

Обозначим через $\bar{x}$ величину MAx и рассмотрим следующие векторы разностей в обычном и CPR-

случаях:

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= x - MAx = (I - MA)x, \\ x - \bar{x}^{\text{cpr}} &= x - Mr - \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} + MA \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} = (I - MA)x - (I - MA) \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} = \\ &= (I - MA) \begin{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (3) значительно более эффективна, если значения $\bar{x}_p^{\text{cpr}}$ близки к значениям x_p .

Заметим, что CPR-метод не зависит ни от метода решения локальной системы с матрицей A_p и, соответственно, от типа используемого локального предобусловливателя, ни от метода решения всей системы в целом, а также от типа глобального предобусловливателя M . Следовательно, этот метод может быть использован в любой задаче, обладающей описанными свойствами, как способ улучшения сходимости, и для его внедрения практически не потребуется менять уже имеющиеся алгоритмы решения. Применимость данного метода зависит от того, насколько найденный нами вектор $\bar{x}_p^{\text{cpr}}$ будет близок к соответствующей части x_p вектора x .

5. Особенности практической реализации на параллельных ЭВМ. Метод CPR достаточно легко интегрируется в параллельные алгоритмы решения систем линейных уравнений, основанных на перекрытии расчетных областей в разных процессах.

Пусть $x_i = (p_i, N_i^1, \dots, N_i^{n_c})$ — i -я компонента решения, $X^k = (x_{i_1^k}, \dots, x_{i_{m_k}^k})$ — компоненты, отнесенные к k -му процессу (потoku исполнения), A^k и b^k — соответствующие части матрицы A размера $m_k \times n_c \times (K + J)$ и правой части b в k -м процессе (поточе).

Для алгоритмов с перекрытием имеем $\sum_{k=1}^s m_k > (n_c \times (K + J))$, где s — число процессов. Тогда, например, метод простой итерации в k -м процессе можно записать в виде

$$M^k \frac{X_{l+1}^k - X_l^k}{\pi} + A^k X_l^k = b^k$$

с обычными методами синхронизации компонент решения в общих подобластях. Метод CPR применяется к матрице A^k в каждом процессе:

$$M^{\text{cpr } k} A^k x^k = M^{\text{cpr } k} r^k = M^k r^k + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}, k} \end{pmatrix} - M^k A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_p^{\text{cpr}, k} \end{pmatrix} = \bar{x}^{\text{cpr}, k}.$$

Здесь индекс k означает соответствующую часть матрицы или вектора в k -м процессе. Заметим, что решение системы $A_p^k \bar{x}_p^{\text{cpr}, k} = r_p^k$ происходит независимо в каждом из процессов и не требует пересылки данных между ними.

В качестве глобального предобусловливателя M^k брался параллельный вариант ILU(0), а в качестве предобусловливателя для матрицы A_p^k использовался либо обычный предобусловливатель ILU(0), либо алгебраический многосеточный метод AMG (Algebraic MultiGrid). Заметим, что такой подход обеспечивает эффективное распараллеливание AMG-метода для рассматриваемой задачи.

6. Численные эксперименты. Описанный CPR-метод был реализован в составе российского промышленного гидродинамического симулятора tNavigator. Тестирование проводилось на моделях реальных месторождений. Критерием остановки алгоритма решения системы (4) является выполнение условия $\frac{\|A_p \bar{x}_p^{\text{cpr}}\|_2}{\|r_p\|_2} < \varepsilon$, где ε — точность локального алгоритма.

Тестовый стенд представляет собой компьютер с двумя четырехъядерными процессорами частотой 2.8 ГГц и с общей памятью объемом 16 Гб, работающей на частоте 800 МГц.

6.1. Поиск оптимального значения локальной точности. Приведем результаты тестирования, позволяющие определить оптимальное значение ε . Все тесты данного раздела были выполнены на восьми ядрах. Модель — одно из реальных месторождений западной Сибири (рис. 1).

Таким образом (см. табл. 1), в качестве критерия остановки локального алгоритма логично брать значение $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$ или $\varepsilon = 10^{-2}$. Заметим, что число глобальных итераций линейного алгоритма при этом сокращается почти в четыре раза.

6.2. Масштабируемость. Все результаты расчетов приведены для симулятора в целом, а не только для его части, отвечающей за решение системы. Результаты тестирования зависимости времени работы от

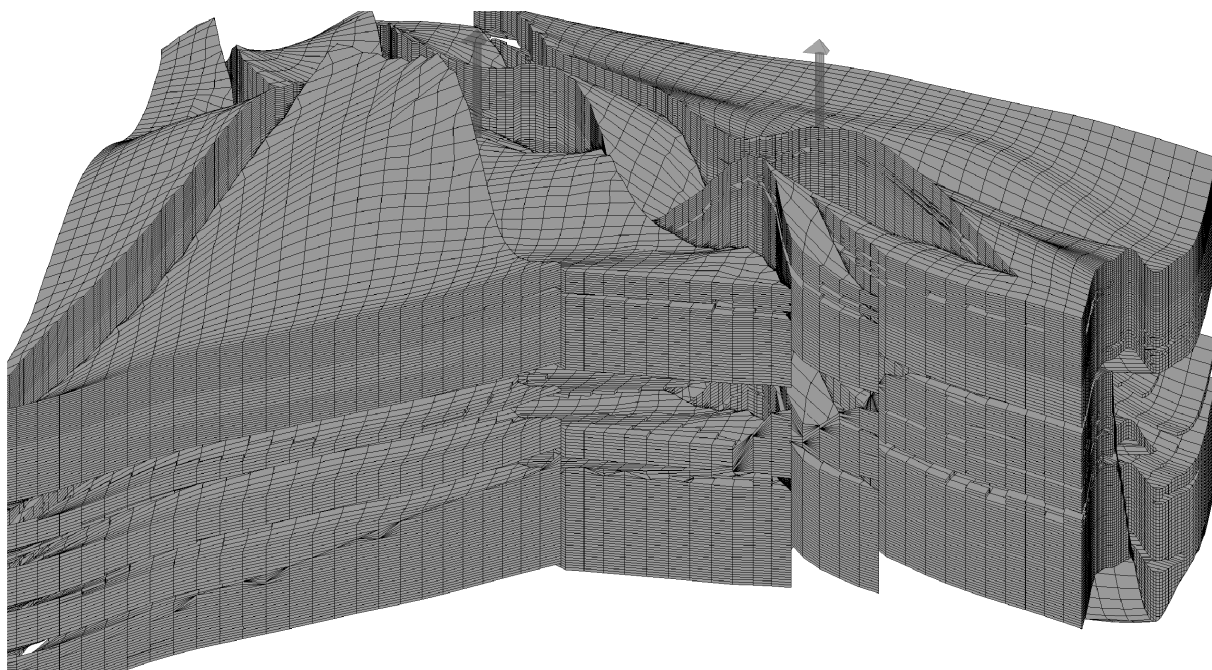
Рис. 1. Модель 1. Количество неизвестных $255\,366 \times 3$

Таблица 1

Метод	Кол. ит. метода Ньют.	Кол. ит. глоб. алг.	Время (сек.)
ILU(0)	79	643	177
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$)	78	262	163
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 10^{-1}$)	78	188	150
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$)	78	164	150
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 10^{-2}$)	79	165	156
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$)	79	172	165
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 10^{-3}$)	79	172	176

числа процессоров приведены на рис. 2. Модель — месторождение 1. Результаты CPR+ILU(0) отмечены сплошной линией со знаками + и номером 2, а ILU(0) — пунктиром со знаками × и номером 1.

6.3. Устойчивость. Было выполнено тестирование устойчивости алгоритма по отношению к размеру задачи (модель — рис. 3).

Сходимость метода и сокращение числа итераций почти в три раза (см. табл. 2) говорит о том, что алгоритм сохраняет свою эффективность на крупных моделях.

6.4. Тестирование с применением AMG-метода. Тестирование CPR-алгоритма совместно с алгебраическим многосеточным методом AMG представлено в табл. 3 (модель — рис. 4).

7. Заключение. Просуммируем выводы, полученные в результате численных экспериментов.

Преимущества CPR-метода состоят в следующем:

- существенное сокращение числа “глобальных” итераций;
- лучшая “распараллеливаемость”: малое число “глобальных” итераций приводит к резкому уменьшению точек синхронизации в программе и меньшей нагрузке на шину, отвечающую за пересылку данных от одного процесса к другому;
- возможность применения алгоритма алгебраического многосеточного метода для решения системы с матрицей A_p либо его вариантов с некоторыми модификациями, учитывающими специфику задачи;
- возможность применения последовательных методов для решения системы (4) в случае, когда весь

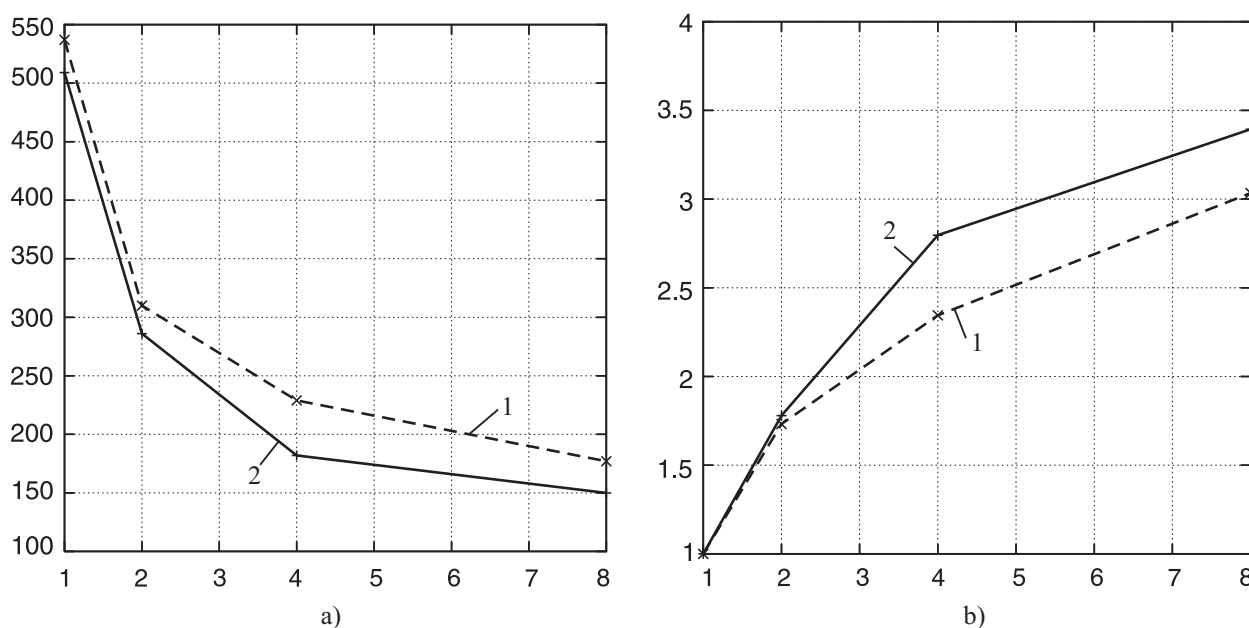


Рис. 2. Зависимость времени работы от числа процессоров: 1 — ILU(0), 2 — CPR.
На рис. а) представлена зависимость времени работы (сек.) от числа логических процессоров,
на рис. б) — зависимость ускорения от числа логических процессоров

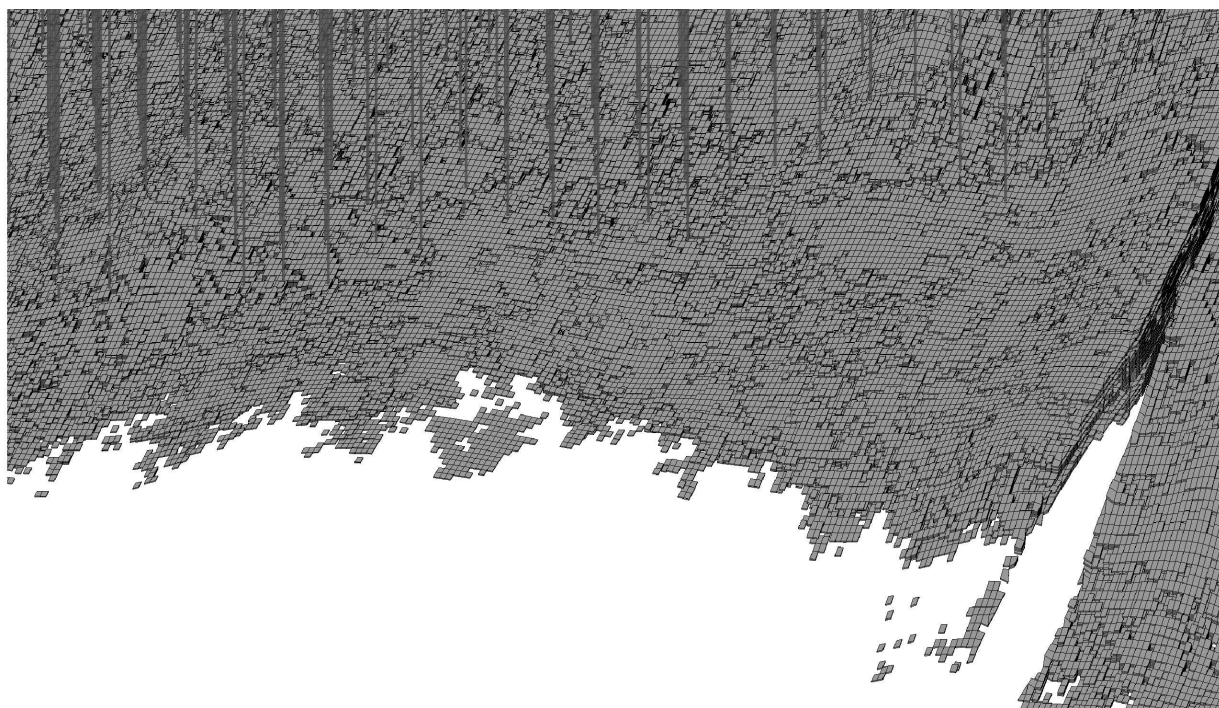


Рис. 3. Модель 2. Количество неизвестных $2\,307\,383 \times 3$ (на рисунке фрагмент)

остальной алгоритм является параллельным; как следствие — возможность объединения параллельных алгоритмов, имеющих хорошую масштабируемость, с эффективными последовательными методами решения линейных систем;

— возможность сокращения объема используемой памяти на величину порядка 40% за счет отказа от использования глобального предобусловливателя M .

Недостатками CPR-метода являются необходимость при применении предобусловливателя решать систему (4) и некоторое увеличение расходуемой памяти по сравнению с базовым алгоритмом.

Тестирование этого метода на реальных задачах и многопроцессорных системах показывает хорошие

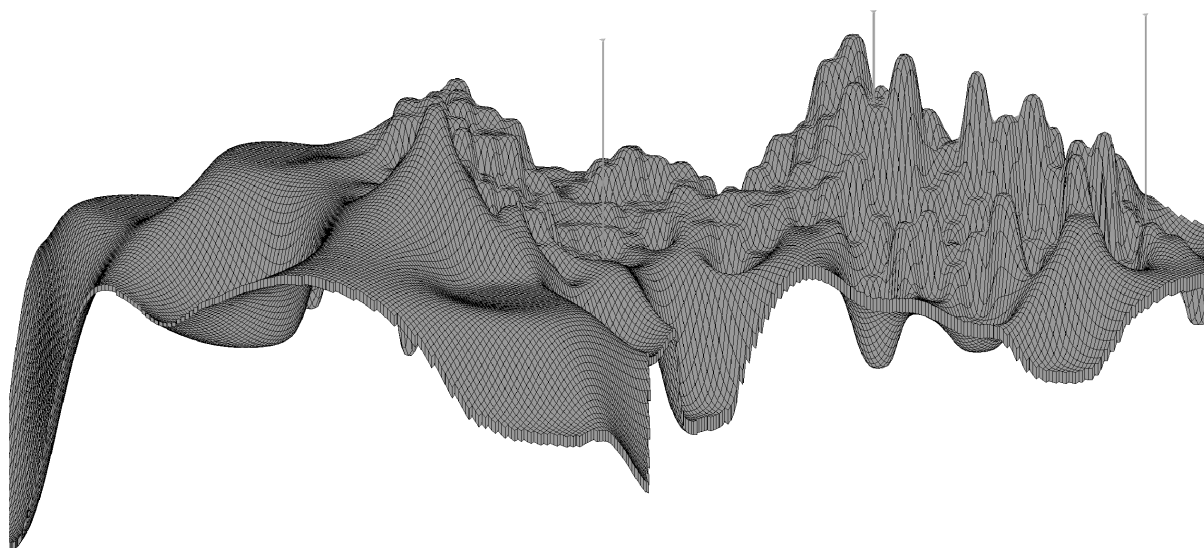
Рис. 4. Модель 3. Количество неизвестных $31\,923 \times 3$

Таблица 2

Версия метода	Кол-во итер. глоб. алг.
ILU(0)	1741
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 10^{-2}$)	588

Таблица 3

Версия метода	Кол-во итер. глоб. алг.
ILU(0)	485
CPR+ILU(0) ($\varepsilon = 10^{-2}$)	113
CPR+AMG ($\varepsilon = 10^{-2}$)	114

перспективы для его внедрения в вычислительную практику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wallis J.R. Incomplete Gaussian elimination as a preconditioning for generalized conjugate gradient acceleration // Proc. of the 1983 SPE Symposium on Reservoir Simulation. San Francisco, 1983. SPE 12265.
2. Wallis J.R., Kendall R.P., Little T.E. Constraint residual acceleration of conjugate residual methods // Proc. of the 1985 SPE Symposium on Reservoir Simulation. Dallas, 1985. SPE 13536.
3. Durlofsky L.J., Aziz K. Advanced techniques for reservoir simulation and modeling of nonconventional wells. Report to US Department of Energy, Stanford University. Stanford, 2004.
4. Stuben K., Clees T., Klie H., Lu B., Wheeler M.F. Algebraic multigrid methods (AMG) for the efficient solution of fully implicit formulations in reservoir simulation // Proc. of the 2007 SPE Symposium on Reservoir Simulation. Houston, 2007. SPE 105832.
5. Stuben K. Algebraic multigrid (AMG): experiences and comparisons // Proc. of the Int. Multigrid Conference. Copper Mountain, 1983.
6. Wagner C. Introduction to algebraic multigrid. Course Notes. University of Heidelberg. Heidelberg, 1999.
7. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Philadelphia: SIAM, 2003.
8. Aziz K., Settari A. Petroleum reservoir simulation. London: Applied Science Publishers, 1979.

Поступила в редакцию
03.05.2008