УДК 517.955.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ТРЕХМЕРНОМ ЦИЛИНДРЕ

А. Н. Демидова[1], Я. М. Жилейкин[2]

Предложены и обоснованы условия устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца по начальным данным в зависимости от спектрального состава начальных функций и их погрешностей. Задача рассматривается в трехмерном полубесконечном цилиндре. Изучена устойчивость конечно-разностной схемы по начальным данным, предназначенной для численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндре с прямоугольным сечением. Получены ограничения на шаги разностной схемы, обеспечивающие ее устойчивость. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08–01–00285).

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача Коши, устойчивость по начальным данным, разностные схемы, волновое уравнение.

1. Введение. Линейные и нелинейные волновые процессы играют важную роль в различных областях физики и техники. Многие из них описываются волновыми уравнениями. Если закон колебаний физической среды гармонически зависит от времени, то волновое уравнение можно преобразовать к уравнению Гельмгольца.

При исследовании ряда волновых задач возникает необходимость решать задачу Коши для уравнения Гельмгольца. Однако в общем случае такая задача для эллиптических уравнений является некорректно поставленной из-за неустойчивости решения [1]. Это обусловливает особую значимость вопроса выяснения условий устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца [2].

В настоящей статье выполнен анализ зависимости устойчивости решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном полубесконечном цилиндре от спектрального состава начальных функций и функций погрешности, а также исследуется устойчивость по начальным данным конечно-разностной схемы, используемой для численного решения задачи Коши.

Выбор цилиндра в качестве области решения обусловлен тем, что задачи о распространении оптических пучков в нелинейных средах часто решаются именно в такой области.

2. Анализ устойчивости задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном полубесконечном цилиндре. Пусть G — трехмерный полубесконечный цилиндр:

$$G = \big\{(x,y,z)\,:\,(x,y)\in G_2,\ z>0\big\},$$

где G_2 — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. Рассмотрим в области G задачу Коши для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+k^2A=0,\quad (x,y,z)\in G;\\
&A=0,\quad (x,y)\in\Gamma,\quad z>0;\quad A(x,y,0)=A_0(x,y),\quad \left.\frac{\partial A(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0}=A_1(x,y),\quad (x,y)\in G_2.
\end{aligned}\tag{1}$$

Решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца неустойчиво в том случае, когда при заданной начальной погрешности, не превосходящей ε_0, погрешность решения задачи возрастает с ростом z. Решение задачи Коши устойчиво, когда погрешность решения ограничена некоторой константой, умноженной на ε_0.

Проведем анализ устойчивости решения задачи Коши (1) в зависимости от спектра начальных функций и спектра погрешностей. Для этого используем метод Фурье.

[1] Институт криптографии, связи и информатики, Мичуринский просп., 70, 117602, Москва; e-mail: alyona_demidova@mail.ru

[2] Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Москва; e-mail: jam@srcc.msu.ru

Решение задачи (1) будем искать в виде разложения

$$A(x,y,z)=\sum_j A_j(z)u_j(x,y) \tag{2}$$

по собственным функциям задачи

$$\Delta_\perp u_j(x,y)+\lambda_j u_j(x,y)=0,\quad (x,y)\in G_2,$$
$$\triangle_\perp=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad u_j(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma}=0.$$

Здесь u_j и λ_j, $j=1,\ldots,$ — собственные функции и собственные значения. Будем называть $\{A_j(z)\}$ спектром решения $A(x,y,z)$.

Для вычисления $A_j(z)$ получаем задачу Коши

$$\frac{d^2A_j}{dz^2}-\lambda_jA_j+k^2A_j=0,\quad A_j\big|_{z=0}=A_j^0,\quad \frac{dA_j}{dz}\bigg|_{z=0}=A_j^1,\quad j=1,\ldots, \tag{3}$$

где A_j^0 и A_j^1 — коэффициенты разложения функций $A_0(x,y)$ и $A_1(x,y)$ по собственным функциям $\{u_j\}$.

Общее решение уравнения в задаче (3) имеет вид

$$A_j=\begin{cases} c_j^{(1)}e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}+c_j^{(2)}e^{iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}, & \lambda_j<k^2,\\ c_j^{(1)}e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}}+c_j^{(2)}e^{z\sqrt{\lambda_j-k^2}}, & \lambda_j>k^2,\\ c_j^{(1)}+c_j^{(2)}z, & \lambda_j=k^2. \end{cases} \tag{4}$$

Определим решение задачи (3) следующим образом:

$$A_j=\begin{cases} A_j^0e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}, & \lambda_j<k^2,\\ A_j^0e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}}, & \lambda_j>k^2,\\ A_j^0, & \lambda_j=k^2. \end{cases}$$

При $\lambda_j>k^2$ и $\lambda_j=k^2$ такой выбор A_j обусловливается условием невозрастания решения при $z\to\infty$, а при $\lambda_j<k^2$ — выделением волны, распространяющейся в положительном направлении оси z (“волна$+$”).

Следовательно, чтобы выделить решение “волна$+$” уравнения Гельмгольца, коэффициенты A_j^1 должны удовлетворять условию $A_j^1=\beta_jA_j^0$, где $\beta_j=\begin{cases}-i\sqrt{k^2-\lambda_j}, & \lambda_j\leqslant k^2\\ -\sqrt{\lambda_j-k^2}, & \lambda_j>k^2.\end{cases}$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть погрешности начальных функций $\varepsilon_0(x,y)$ и $\varepsilon_1(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\varepsilon_0(x,y)$ *и* $\varepsilon_1(x,y)$ *— ограничены;*

2) *в спектре функций $\varepsilon_0(x,y)$ и $\varepsilon_1(x,y)$ компоненты $\varepsilon_j^{(0)}=0$, $\varepsilon_j^{(1)}=0$ при любом j, для которого $\lambda_j>M$, где $0<M<k^2$.*

Тогда решение задачи Коши (1) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть начальные условия заданы с погрешностью: $\widetilde A_0(x,y)=A_0(x,y)+\varepsilon_0(x,y)$, $\widetilde A_1(x,y)=A_1(x,y)+\varepsilon_1(x,y)$. Тогда для вычисления коэффициентов $\widetilde c_j^{(1)}$ и $\widetilde c_j^{(2)}$ в (4) получаем следующие системы:

$$\widetilde c_j^{(1)}+\widetilde c_j^{(2)}=A_j^0+\varepsilon_j^{(0)},\quad \beta_j\widetilde c_j^{(1)}-\beta_j\widetilde c_j^{(2)}=\beta_jA_j^0+\varepsilon_j^{(1)}\quad \text{при}\quad \lambda_j\leqslant M,$$
$$\widetilde c_j^{(1)}+\widetilde c_j^{(2)}=A_j^0,\quad \beta_j\widetilde c_j^{(1)}-\beta_j\widetilde c_j^{(2)}=\beta_jA_j^0\quad \text{при}\quad \lambda_j>M.$$

Решения этих систем имеют вид

$$\widetilde c_j^{(1)}=A_j^0+\frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}+\frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}},\quad \widetilde c_j^{(2)}=\frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}-\frac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}}\quad \text{при}\quad \lambda_j\leqslant M,$$
$$\widetilde c_j^{(1)}=A_j^0,\quad \widetilde c_j^{(2)}=0\quad \text{при}\quad \lambda_j>M.$$

Следовательно, коэффициенты $\widetilde{A}_j(z)$ в разложении (2) функции $\widetilde{A}(x,y,z)$ представляются следующим образом:

$$\widetilde{A}_j(z)=\begin{cases}\left(A_j^0+\dfrac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}+\dfrac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}}\right)e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}}+\left(\dfrac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}-\dfrac{i\varepsilon_j^{(1)}}{2\sqrt{k^2-\lambda_j}}\right)e^{iz\sqrt{k^2-\lambda_j}} & \text{при} \quad \lambda_j\leqslant M,\\ A_j^0e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}} \quad \text{при} \quad M<\lambda_j<k^2,\\ A_j^0 \quad \text{при} \quad \lambda_j=k^2,\\ A_j^0e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}} \quad \text{при} \quad \lambda_j>k^2.\end{cases}$$

Оценим квадрат нормы разности функций $\widetilde{A}(x,y,z)$ и $A(x,y,z)$:

$$\left\|\widetilde{A}-A\right\|^2=\sum_j\left|\widetilde{A}_j-A_j\right|^2=\sum_{\lambda_j\leqslant M}\left|\widetilde{A}_j-A_j\right|^2+\sum_{\lambda_j>M}\left|\widetilde{A}_j-A_j\right|^2\leqslant\sum_{\lambda_j\leqslant M}\left(\left|\varepsilon_j^{(0)}\right|^2+\frac{\left|\varepsilon_j^{(1)}\right|^2}{k^2-\lambda_j}\right).$$

По условию теоремы погрешности $\varepsilon_0(x,y)$ и $\varepsilon_1(x,y)$ ограничены: $\left\|\varepsilon_0\right\|^2\leqslant l_1$ и $\left\|\varepsilon_1\right\|^2\leqslant l_2$, где l_1 и l_2 — некоторые константы и норма понимается в смысле пространства L^2. Таким образом, имеем

$$\left\|\widetilde{A}-A\right\|^2\leqslant\|\varepsilon\|^2,\quad \text{где}\quad \frac{1}{2}\,\|\varepsilon\|^2=\max\left\{l_1^2,\frac{l_2^2}{a}\right\},\quad a=\begin{cases}k^2-M & \text{при}\quad k^2-M<1,\\ 1 & \text{при}\quad k^2-M\geqslant 1.\end{cases}\tag{5}$$

Из оценки (5) следует, что решение задачи Коши (1) устойчиво. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть в спектре погрешности начальной функции $\varepsilon_0(x,y)$ существует хотя бы одно j, такое, что $\varepsilon_j^{(0)}\neq 0$, а $\lambda_j>k^2$. Тогда решение задачи Коши* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Пусть у начальной функции $A_0(x,y)$ спектр погрешности $\varepsilon_0(x,y)$ состоит из одной j^*-й компоненты, т.е. $\varepsilon_{j^*}^{(0)}\neq 0$, $\lambda_{j^*}>k^2$, а при всех остальных j выполнено $\varepsilon_j^{(0)}=0$. Тогда для вычисления коэффициентов $\widetilde{c}_j^{(1)}$ и $\widetilde{c}_j^{(2)}$ в (4) получаем системы

$$\begin{aligned}&\widetilde{c}_j^{(1)}+\widetilde{c}_j^{(2)}=A_j^0+\varepsilon_j^{(0)}, && \beta_j\widetilde{c}_j^{(1)}-\beta_j\widetilde{c}_j^{(2)}=\beta_jA_j^0 && \text{при}\quad j=j^*,\\ &\widetilde{c}_j^{(1)}+\widetilde{c}_j^{(2)}=A_j^0, && \beta_j\widetilde{c}_j^{(1)}-\beta_j\widetilde{c}_j^{(2)}=\beta_jA_j^0 && \text{при остальных } j.\end{aligned}$$

Решения этих систем имеют вид

$$\begin{aligned}&\widetilde{c}_j^{(1)}=A_j^0+\frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}, && \widetilde{c}_j^{(2)}=\frac{\varepsilon_j^{(0)}}{2} && \text{при}\quad j=j^*,\\ &\widetilde{c}_j^{(1)}=A_j^0, && \widetilde{c}_j^{(2)}=0 && \text{при остальных } j.\end{aligned}$$

Тогда коэффициенты $\widetilde{A}_j(z)$ в разложении (2) функции $\widetilde{A}(x,y,z)$ приобретают вид

$$\widetilde{A}_j(z)=\begin{cases}\left(A_j^0+\dfrac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}\right)e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}}+\dfrac{\varepsilon_j^{(0)}}{2}\,e^{z\sqrt{\lambda_j-k^2}} & \text{при}\quad j=j^*,\\ A_j^0e^{-iz\sqrt{k^2-\lambda_j}} \quad \text{при}\quad \lambda_j<k^2,\\ A_j^0 \quad \text{при}\quad \lambda_j=k^2,\\ A_j^0e^{-z\sqrt{\lambda_j-k^2}} \quad \text{при}\quad \lambda_j>k^2.\end{cases}$$

Оценим квадрат нормы разности функций $\widetilde{A}(x,y,z)$ и $A(x,y,z)$:

$$\left\|\widetilde{A}-A\right\|^2=\sum_j\left|\widetilde{A}_j-A_j\right|^2=\left|\widetilde{A}_{j^*}-A_{j^*}\right|^2=\frac{\left|\varepsilon_{j^*}^{(0)}\right|^2}{4}\left(e^{-z\sqrt{\lambda_{j^*}-k^2}}+e^{z\sqrt{\lambda_{j^*}-k^2}}\right)^2\geqslant\frac{\left|\varepsilon_{j^*}^{(0)}\right|^2}{4}\,e^{2z\sqrt{\lambda_{j^*}-k^2}}.\tag{6}$$

Из оценки (6) следует, что погрешность решения экспоненциально возрастает по z. Следовательно, решение задачи Коши (1) неустойчиво. Что и требовалось доказать.

3. Анализ устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца. В работе [3] было проведено исследование устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца. Задача Коши рассматривалась для канала двумерного пространства.

Проведем анализ устойчивости численного решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца в трехмерном цилиндре с прямоугольным сечением.

Пусть область G_2 — прямоугольник $\{0 < x < l_x, 0 < y < l_y\}$ с границей Γ. В области $G = G_2 \times (0, Z]$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + k^2 A = 0, \quad (x, y, z) \in G,\\
&A(x, y, 0) = g(x, y), \quad \left.\frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z}\right|_{z=0} = g_1(x, y), \quad (x, y) \in G_2,\\
&A(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \times (0, Z].
\end{aligned}$$

Введем функцию v следующим образом: $A = ve^{-ikz}$. Тогда для v получим задачу Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y, z) \in G,\\
&v(x, y, 0) = g(x, y), \quad \left.\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z}\right|_{z=0} = f(x, y), \quad (x, y) \in G_2,\\
&v(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma \times (0, Z].
\end{aligned} \tag{7}$$

Введем сетку Ω_h по переменным x и y:

$$\Omega_h = \left\{(x_l, y_j)\,|\, x_l = lh_x,\, y_j = jh_y,\, l = 0, \ldots, N_x,\, j = 0, \ldots, N_y,\, h_x N_x = l_x,\, h_y N_y = l_y\right\}.$$

Множество точек сетки Ω_h, принадлежащих Γ, обозначим γ_h, а множество внутренних точек — ω_h. Тогда $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$. По переменной z введем равномерную сетку $\omega_z = \left\{z_n = nh_z,\, n = 0, \ldots, N_z,\, N_z h_z = Z\right\}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&u^n_{lj} = u(x_l, y_j, z_n), \quad u^n_{\overline{z}z,lj} = \frac{u^{n+1}_{lj} - 2u^n_{lj} + u^{n-1}_{lj}}{h_z^2}, \quad u_{\widehat{z},lj} = \frac{u^{n+1}_{lj} - u^{n-1}_{lj}}{2h_z},\\
&\Lambda u^n_{lj} = u^n_{\overline{x}x,lj} + u^n_{\overline{y}y,lj} = \frac{u^n_{l+1,j} - 2u^n_{lj} + u^n_{l-1,j}}{h_x^2} + \frac{u^n_{l,j+1} - 2u^n_{lj} + u^n_{l,j-1}}{h_y^2}.
\end{aligned}$$

Дифференциальную задачу (7) аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned}
&u^n_{\overline{z}z,lj} - 2iku^n_{\widehat{z},lj} + \frac{1}{2}\left(\Lambda u^{n-1}_{lj} + \Lambda u^{n+1}_{lj}\right) = 0,\ l = 1, \ldots, N_x - 1,\ j = 1, \ldots, N_y - 1,\ n = 1, \ldots, N_z - 1,\\
&u^0_{lj} = g(x_l, y_j) = g_{lj}, \quad u^1_{lj} = \varphi(x_l, y_j) = \varphi_{lj}, \quad (x_l, y_j) \in \Omega_h,\\
&u^n_{lj} = 0, \quad (x_l, y_j) \in \gamma_h, \quad n = 1, \ldots, N_z.
\end{aligned} \tag{8}$$

Проведем исследование устойчивости задачи (8) методом Фурье. Для этого рассмотрим задачу на собственные значения для пятиточечного разностного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}
&u_{\overline{x}x,lj} + u_{\overline{y}y,lj} + \lambda u_{lj} = 0, \quad (x_l, y_j) \in \omega_h,\\
&u_{lj} = 0, \quad (x_l, y_j) \in \gamma_h.
\end{aligned}$$

Собственными значениями и собственными функциями пятиточечного разностного оператора Лапласа являются $\lambda_m = \frac{4}{h_x^2}\sin^2\frac{\pi m_x h_x}{2l_x} + \frac{4}{h_y^2}\sin^2\frac{\pi m_y h_y}{2l_y}$ и $\mu(x_l, y_j) = \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}}\sin\frac{\pi m_x x_l}{l_x}\sin\frac{\pi m_y y_j}{l_y}$ соответственно, где $m = (m_x, m_y)$, $m_x = 1, \ldots, N_x - 1$, $m_y = 1, \ldots, N_y - 1$. Решение задачи (8) можно представить в виде

$$u(x_l, y_j, z_n) = \sum_{m=1}^{M} a_m(z_n)\mu(x_l, y_j), \quad \text{где} \quad M = (N_x - 1)(N_y - 1). \tag{9}$$

Обозначим $a_m^n = a_m(z_n)$. Тогда для вычисления a_m^n получим следующее разностное уравнение:

$$\left(1 - ikh_z - \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right)a_m^{n+1} - 2a_m^n + \left(1 + ikh_z + \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right)a_m^{n-1} = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $a_m^n = c_m q^n$. Для q получаем уравнение

$$\left(1 - ikh_z - \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right)q^2 - 2q + \left(1 + ikh_z + \frac{\lambda_m h_z^2}{2}\right) = 0. \tag{10}$$

Обозначим $D = \lambda_m - (k^2 + \lambda_m^2 h_z^2/4)$. Пусть λ_m такое, что $D \leqslant 0$; тогда решение уравнения (10) имеет вид $q_m = \dfrac{1 \pm ih_z\sqrt{|D|}}{1 - ikh_z - \lambda_m h_z^2/2}$. Комплексные числа q_{1m} и q_{2m} запишем в показательной форме

$$q_{1m} = e^{i\psi_{1m}}, \quad \text{где} \quad \psi_{1m} = \operatorname{arctg} \frac{kh_z + (1 - \lambda_m h_z^2/2)h_z\sqrt{|D|}}{1 - \lambda_m h_z^2/2 + kh_z^2\sqrt{|D|}},$$

$$q_{2m} = e^{i\psi_{2m}}, \quad \text{где} \quad \psi_{2m} = \operatorname{arctg} \frac{kh_z - (1 - \lambda_m h_z^2/2)h_z\sqrt{|D|}}{1 - \lambda_m h_z^2/2 + kh_z^2\sqrt{|D|}}.$$

Пусть λ_m такое, что $D > 0$; тогда $q_m = \dfrac{1 \pm h_z\sqrt{|D|}}{1 - ikh_z - \lambda_m h_z^2/2}$. В показательной форме числа q_{1m} и q_{2m} представляются в виде $q_{1m} = \rho_{1m}e^{i\psi_m}$ и $q_{2m} = \rho_{2m}e^{i\psi_m}$, где

$$\rho_{1m} = \frac{\sqrt{1 + h_z\sqrt{D}}}{\sqrt{1 - h_z\sqrt{D}}}, \quad \rho_{2m} = \frac{\sqrt{1 - h_z\sqrt{D}}}{\sqrt{1 + h_z\sqrt{D}}}, \quad \psi_m = \operatorname{arctg} \frac{kh_z}{1 - \lambda_m h_z^2/2}.$$

Общее решение имеет вид

$$a_m^n = \begin{cases} c_m^{(1)} e^{i\psi_{1m}n} + c_m^{(2)} e^{i\psi_{2m}n} & \text{при} \quad D \leqslant 0, \\ c_m^{(1)} \rho_{1m}^n e^{i\psi_m n} + c_m^{(2)} \rho_{2m}^n e^{i\psi_m n} & \text{при} \quad D > 0. \end{cases}$$

В решении (9) задачи (8) для a_m^n выберем следующие значения:

$$a_m^n = \begin{cases} g_m e^{i\psi_{2m}n} & \text{при} \quad D \leqslant 0, \\ g_m \rho_{2m}^n e^{i\psi_m n} & \text{при} \quad D > 0. \end{cases}$$

Здесь $g_m = (g, \mu_m)$ — коэффициент Фурье функции $g(x_l, y_j)$. При $D > 0$ такой выбор значений a_m^n обусловливается условием невозрастания решения при увеличении n, а при $D \leqslant 0$ — выделением волны, распространяющейся в положительном направлении оси z.

Таким образом, рассматривается частный случай задачи Коши, когда для выделения решения "волна+" начальная функция $\varphi(x_l, y_j)$ должна удовлетворять условию $\varphi_m = e^{i\psi_{2m}} g_m$, где g_m и φ_m — коэффициенты Фурье функций $g(x_l, y_j)$ и $\varphi(x_l, y_j)$ соответственно.

Исследуем вопрос об устойчивости разностной схемы (8) по начальным данным. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Если для всех m выполняется неравенство $D \leqslant 0$, то разностная схема* (8) *устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Оценим норму функции u^{n+1} в дискретном пространстве L_2^h. В силу ортонормированности базиса $\{\mu_m\}$ получаем

$$\left\|u^{n+1}\right\|^2 = \sum_{l=1}^{N_x-1} h_x \sum_{j=1}^{N_y-1} h_y \left|u_{lj}^{n+1}\right|^2 = \sum_{m=1}^{M}\left|a_m^{n+1}\right|^2 = \sum_{m=1}^{M}\left|e^{i\psi_{2m}}\right|^2 \left|g_m e^{i\psi_{2m}n}\right|^2;$$

следовательно, $\left\|u^{n+1}\right\| \leqslant \max\limits_m \left|e^{i\psi_{2m}}\right| \left\|u^n\right\|$. Так как $\left|e^{i\psi_{2m}}\right| = 1$ при любом m, то

$$\left\|u^{n+1}\right\| \leqslant \left\|u^n\right\|. \tag{11}$$

На основании (11) получаем $\|u^{n+1}\| \leqslant \|u^n\| \leqslant \|u^{n-1}\| \leqslant \ldots \leqslant \|u^0\|$. Это означает устойчивость схемы (8) по начальным данным в норме пространства L_2^h. Что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если существует хотя бы одно значение m, при котором $D > 0$, то разностная схема (8) неустойчива по начальным данным.*

Доказательство. Пусть начальные функции g и φ заданы с погрешностью

$$\widetilde{u}^0_{lj} = g_{lj} + \varepsilon^{(0)}_{lj}, \quad \widetilde{u}^1_{lj} = \varphi_{lj} + \varepsilon^{(1)}_{lj}.$$

Предположим, что при некотором m^* выполняется неравенство $D > 0$. Тогда для коэффициентов $\widetilde{c}^{(1)}_{m^*}$ и $\widetilde{c}^{(2)}_{m^*}$ получаем систему

$$\begin{aligned}&\widetilde{c}^{(1)}_{m^*} + \widetilde{c}^{(2)}_{m^*} = g_{m^*} + \varepsilon^{(0)}_{m^*},\\ &\widetilde{c}^{(1)}_{m^*}\rho_{1m^*}e^{i\psi_{m^*}} + \widetilde{c}^{(2)}_{m^*}\rho_{2m^*}e^{i\psi_{m^*}} = g_{m^*}\rho_{2m^*}e^{i\psi_{m^*}} + \varepsilon^{(1)}_{m^*}.\end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\widetilde{c}^{(1)}_{m^*} = \frac{\varepsilon^{(0)}_{m^*}\rho_{2m^*}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}} - \frac{\varepsilon^{(1)}_{m^*}e^{-i\psi_{m^*}}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}}, \quad \widetilde{c}^{(2)}_{m^*} = g_{m^*} + \frac{\varepsilon^{(0)}_{m^*}\rho_{1m^*}}{\rho_{1m^*} - \rho_{2m^*}} - \frac{\varepsilon^{(1)}_{m^*}e^{-i\psi_{m^*}}}{\rho_{1m^*} - \rho_{2m^*}}.$$

Справедлива оценка

$$\left|\widetilde{a}^n_{m^*} - a^n_{m^*}\right| = \left|\widetilde{c}^{(1)}_{m^*}\rho^n_{1m^*} + \delta_{m^*}\rho^n_{2m^*}\right| \geqslant \left|\widetilde{c}^{(1)}_{m^*}\right|\rho^n_{1m^*} - \left|\delta_{m^*}\right|,$$

где $\delta_{m^*} = \dfrac{\varepsilon^{(1)}_{m^*}e^{-i\psi_{m^*}} - \varepsilon^{(0)}_{m^*}\rho_{1m^*}}{\rho_{2m^*} - \rho_{1m^*}}$. Оценим норму функции $\widetilde{u}^n - u^n$ в пространстве L_2^h. Из (9) в силу ортонормированности базиса $\{\mu_m\}$ получаем

$$\left\|\widetilde{u}^n - u^n\right\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{M}\left|\widetilde{a}^n_m - a^n_m\right|^2} \geqslant \left|\widetilde{a}^n_{m^*} - a^n_{m^*}\right| \geqslant \left|\widetilde{c}^{(1)}_{m^*}\right|\rho^n_{1m^*} - \left|\delta_{m^*}\right|.$$

Так как $\rho_{1m^*} > 1$, то из последнего неравенства следует, что с ростом n увеличивается погрешность решения, т.е. разностная схема (8) неустойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Проанализируем устойчивость разностной схемы (8) по начальным данным в зависимости от величин h_z, h_x, h_y. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Если $h_z > 1/k$, $0 < h_x < \infty$, $0 < h_y < \infty$, то разностная схема (8) устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Рассмотрим D как функцию от λ_m: $D(\lambda_m) = \lambda_m - \left(k^2 + \dfrac{\lambda_m^2 h_z^2}{4}\right)$. Корнями этого трехчлена являются $\lambda_m = \dfrac{2}{h_z^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - k^2h_z^2}\right)$. Если $h_z > \dfrac{1}{k}$, то $h_z k > 1$; следовательно, многочлен $D(\lambda_m)$ не имеет действительных корней и $D(\lambda_m) < 0$ для любого λ_m. Тогда из теоремы 3 следует, что разностная схема (8) устойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $l_x = l_y = l$, $h_x = h_y = h$, $N_x = N_y = N$.

Теорема 6. *Если $h > \dfrac{2\sqrt{2}}{k}$, $0 < h_z < \infty$, то разностная схема (8) устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Так как $h > \dfrac{2\sqrt{2}}{k}$, то $k^2 > \dfrac{8}{h^2}$. Для любого собственного значения λ_m справедливо неравенство $\lambda_m < \dfrac{8}{h^2}$. Отсюда следует, что $k^2 > \lambda_m$. Из этого неравенства вытекает, что $k^2 + \dfrac{\lambda_m^2 h_z^2}{4} > \lambda_m$. Следовательно, $D(\lambda_m) < 0$ при любом λ_m. Тогда из теоремы 3 следует, что разностная схема (8) устойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Теорема 7. *Если $h_z < \dfrac{4\pi}{(\pi^2 + 4)k}$ и $h \leqslant \dfrac{\pi h_z}{\sqrt{2}}$, то разностная схема (8) неустойчива по начальным данным.*

Доказательство. Рассмотрим $\overline{m} = m_x = m_y$, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{l\sqrt{1 - \sqrt{1 - k^2h_z^2}}}{2h_z} \leqslant \overline{m} \leqslant \frac{l\sqrt{1 + \sqrt{1 - k^2h_z^2}}}{\pi h_z}.$$

Из условий теоремы следует, что такое значение $\overline{m}$ существует. Можно показать, что для соответствующего $\lambda_{\overline{m}}$ выполняются неравенства

$$\frac{2(1-\sqrt{1-k^2h_z^2}\,)}{h_z^2} \leqslant \lambda_{\overline{m}} \leqslant \frac{2(1+\sqrt{1-k^2h_z^2}\,)}{h_z^2}\,. \tag{12}$$

Левая и правая части в (12) — корни многочлена $D(\lambda_m)$. Из неравенства (12) вытекает, что $D(\lambda_{\overline{m}}) > 0$. Тогда из теоремы 4 следует, что разностная схема (8) неустойчива по начальным данным. Что и требовалось доказать.

Из результатов анализа устойчивости численного решения задачи Коши следует, что при указанном соотношении между шагами разностной схемы рассматриваемая задача устойчива и может быть решена конечно-разностными методами. Главную роль в этом случае играет разностная аппроксимация дифференциальной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М.* О постановке некоторых некорректных задач математической физики // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск: Наука, 1966. 258–276.
2. *Завадский В.Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972.
3. *Барановская М.А., Жилейкин Я.М.* Численное решение задачи Коши для уравнения Гельмгольца // Математические методы решения задач волновой физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 44–51.

Поступила в редакцию
16.04.2008