УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. В. Алиев[1]

Уровень развития вычислительных технологий, достигнутый к настоящему времени, сделал возможным проведение математического моделирования сложных научных проблем и природных явлений, таких как образование звездных и планетарных систем из протовещества и их дальнейшее развитие. Одним из наиболее эффективных газодинамических вычислительных методов для астрофизического моделирования является бессеточный метод сглаженных частиц (SPH-метод), лагранжева природа которого позволяет проводить моделирование в очень широком динамическом диапазоне плотностей, давлений и температур газа. Рассмотрен цикл компьютерных расчетов, полученных SPH-методом. Для учета гравитационных взаимодействий применялся приближенный иерархический метод (tree-code).

Ключевые слова: математическое моделирование, SPH-метод, метод сглаженных частиц, вычислительная астрофизика, газодинамика.

1. Введение. Бессеточный метод сглаженных частиц [1] представляет собой мощный и достаточно универсальный подход для решения задач гравитационной газовой динамики (астрофизическое моделирование), а также ряда других задач механики сплошной среды с сильными деформациями (такими как высокоскоростные столкновения и пробивание). Данный метод является полностью лагранжевым; в отличие от других известных методов частиц, например PIC-метода [2], SPH-метод не использует какой-либо пространственной сетки для аппроксимации, что снимает значительное число теоретических и алгоритмических трудностей.

Выбор этого метода был связан с тремя основными обстоятельствами. Во-первых, это вычислительные достоинства метода. Естественная лагранжева природа SPH-метода позволяет проводить моделирование в очень широком динамическом диапазоне плотностей во времени и пространстве, от массивных скоплений газа до глубокого вакуума с нулевой плотностью. Метод отличается полной пространственной изотропией, а сама схема сконструирована на основе физической сущности решаемой задачи — движении частиц, эволюция которых во времени и пространстве непосредственно (не через систему дифференциальных уравнений) отражает законы сохранения массы, импульса и момента импульса. Этого нельзя сказать о большинстве алгоритмов, формально аппроксимирующих непрерывные дифференциальные уравнения их дискретными аналогами безотносительно к физической сущности задачи.

Во-вторых, этот метод допускает расширение круга решаемых задач (физико-химические процессы, излучение) без кардинальной перестройки всего алгоритма, а также прозрачный и естественный интерфейс с другими сегментами программного комплекса математического моделирования. Кроме того, он легко распараллеливается.

В-третьих, опыт применения SPH-метода [3] свидетельствует о его высоком потенциале для моделирования задач космической гравитационной газодинамики, особенно в комбинации с иерархическим приближением задачи N тел.

Отметим, что основным “конкурирующим” подходом к моделированию задач космической газодинамики является применение адаптивных сеток [4], которые обладают рядом своих собственных как преимуществ, так и недостатков.

2. Физико-математическая постановка задач. Рассматриваемые в настоящей статье задачи гравитационной газовой динамики описываются системой дифференциальных уравнений первого порядка для моделирования газовой динамики и моделью парных взаимодействий для учета гравитационной ком-

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, пр. Лаврентьева, 6, 630090, Новосибирск; e-mail: alexey.aliev@gmail.com

поненты:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{V}), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\left(\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}\right) + \boldsymbol{a}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\left(\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla e\right). \tag{3}$$

Здесь ρ — плотность, $\boldsymbol{V}$ — вектор скорости, e — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\boldsymbol{a}$ — ускорение от воздействия сил гравитации.

Система уравнений газовой динамики (1)–(3) замыкается уравнением состояния, которое связывает давление с другими модельными термодинамическими параметрами: $p = p(S, T)$. Для модели совершенного идеального газа уравнение состояния имеет вид $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1)$, где γ — показатель адиабаты газа.

3. Метод решения. Приведенные выше уравнения решались бессеточным методом сглаженных частиц. Для этого в пространство моделирования помещается N "сферических" частиц, наделенных массой, скоростью, координатами и внутренней энергией. В дальнейшем производные для аппроксимации газодинамических уравнений вычисляются посредством сплайн-интерполяции. В рамках данного формализма вычисление любой неизвестной величины f в произвольной точке пространства моделирования $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ осуществляется по формуле

$$\langle f(\boldsymbol{r})\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho(\boldsymbol{r}_j)} f(\boldsymbol{r}_j) W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j, h),$$

где суммирование производится по соседним N частицам, h — радиус сглаживания (своего рода аналог шага пространственной сетки в эйлеровых численных методах), $\boldsymbol{r}_j$ — координата соседней частицы, $\rho(\boldsymbol{r}_j)$ — плотность вещества в точке, m_j — масса частицы и W — сглаживающее (интерполяционное) ядро вида

$$W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j, h) = \frac{C}{h^D}\begin{cases}\left(1 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{4}k^3\right), & k < 1,\\ \frac{1}{4}(2-k)^3, & 1 < k < 2,\\ 0, & k > 2,\end{cases} \qquad k = \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|}{h}, \qquad C = \begin{cases}\frac{2}{3}, & D = 1,\\ \frac{10}{7\pi}, & D = 2,\\ \frac{1}{\pi}, & D = 3,\end{cases}$$

где D — размерность пространства моделирования ($D = 1,\ 2,\ 3$).

Плотность вещества в точке определяется как $\langle\rho(\boldsymbol{r}_j)\rangle \equiv \sum\limits_{i=1}^{N} m_i W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j, h)$. Уравнение движения (2) в SPH-формализме аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{V}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} m_j\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij}\right)\nabla W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h).$$

Здесь $\boldsymbol{V}_i$ — вектор скорости i-й частицы, а $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{r}_j$ — радиус-векторы (координаты в пространстве) i-й и j-й частиц соответственно.

Аналогичное выражение для уравнения энергии (3) записывается в форме

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{j=1}^{N} m_j\left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{1}{2}\Pi_{ij}\right)(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j)\cdot\nabla W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h),$$

где $\boldsymbol{V}_j$ — вектор скорости j-й частицы и Π_{ij} — термы, описывающие кинематическую искусственную вязкость следующего вида:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{2}(f_i + f_j)\Lambda_{ij}, \quad \Lambda_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-\alpha\bar{c}_{ij}\mu_{ij} + \beta\mu_{ij}^2}{\bar{p}_{ij}}, & \text{если} \quad (\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j)\cdot(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) < 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\mu_{ij} = \frac{h(\boldsymbol{V}_i - \boldsymbol{V}_j)(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)}{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon h^2}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}, \quad \bar{p}_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}, \quad \alpha = 1.0, \quad \beta = 0.5, \quad \varepsilon = 0.01,$$

$$f_i = \frac{\left|(\nabla\cdot\boldsymbol{V})_i\right|}{\left|(\nabla\cdot\boldsymbol{V})_i\right| + \left|(\nabla\times\boldsymbol{V})_i + 0.0001c_i/h\right|}.$$

Следует заметить, что законы сохранения массы и импульса в данном варианте SPH-метода выполняются автоматически и уравнение (1) аппроксимируется естественным образом в ходе переноса вещества за счет движения частиц в пространстве; следовательно, в его явном выражении нет необходимости.

Интегрирование по времени осуществлялось явной схемой Рунге–Кутта второго порядка. В используемом вычислительном алгоритме для повышения точности применялся адаптивный (переменный) шаг сглаживания h [5]. Гравитационные взаимодействия частиц (задача N-тел) учитывались также полностью бессеточным приближенным иерархическим методом, известным как tree-code и имеющим алгоритмическую сложность порядка $N \log N$. Иерархический метод использовался и для реализации быстрого алгоритма поиска частиц-соседей.

4. Верификация вычислительного алгоритма. В процессе создания программного комплекса проводилась его верификация как на простых тестах (газодинамических задачах с известными аналитическими решениями), так и на более сложных задачах гравитирующей газовой динамики. В настоящее время сложилась практика, когда все разрабатываемые или улучшаемые вычислительные алгоритмы (и одновременно реализующие их комплексы программ) проходят верификацию на одних и тех же тестах [7]. Это дает возможность адекватного сравнения различных и идейно разнообразных вычислительных алгоритмов и программных комплексов между собой. Для алгоритмов и вычислительных схем, применяющихся в области газовой динамики, очень показательным тестом является задача о распаде разрыва.

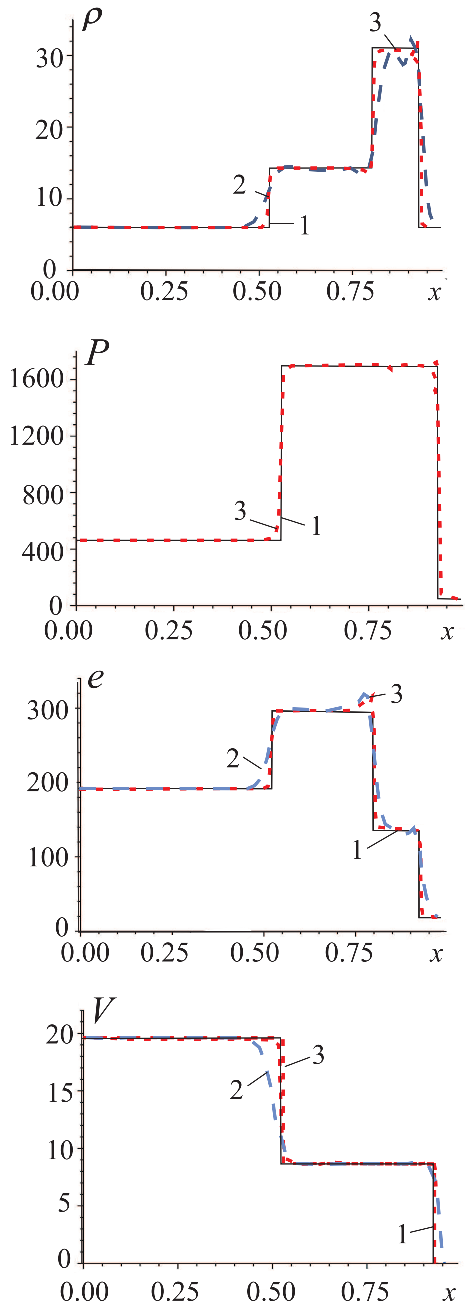

Рис. 1. Профили плотности ρ, внутренней энергии e, давления p и скорости V. Сплошная линия (1) — аналитическое, штриховая (2) — численное (800 частиц), пунктирная линия (3) — численное (3200 частиц) решения

Эта задача формулируется следующим стандартным образом. В одномерной области $x \in [0, 1]$ существуют две подобласти с границей раздела $x = 0.5$, в которых находится однородный газ с различными параметрами в каждой из них. Слева от границы раздела заданы значения ρ_l, V_l и p_l плотности, скорости и давления, а справа — соответственно ρ_r, V_r, p_r. В момент времени $t = 0$ перегородка исчезает и стартует вычислительный процесс. Наборы этих параметров и взаимное соотношение между их числовыми значениями определяют совершенно различные типы формирующихся газодинамических течений с образованием одной или нескольких ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов. Для уравнений Эйлера эти тестовые задачи имеют аналитические решения, вообще говоря, достаточно сложные и весьма разнообразные, но позволяющие провести всестороннюю верификацию и анализ вычислительного алгоритма, в том числе процесса сходимости численного решения к точному по своим внутренним параметрам (числу узлов сетки, количеству частиц и т.д.). Анализ решения (распределения $\rho(x)$, $V(x)$, $p(x)$ и внутренней энергии $e(x)$ в каждый момент времени t) позволяет вынести заключение об алгоритме для моделирования тех или иных задач газовой динамики. Здесь мы приводим результаты решения задачи со следующими начальными данными: $\rho_l = 5.99924$, $V_l = 19.5975$, $p_l = 460.894$, $\rho_r = 5.992242$, $V_r = -6.1963$ и $p_r = 46.055$. На рис. 1 приведены профили решения в момент времени $t = 0.035$.

Тест помогает выявить способность метода отслеживать сложную ударно-волновую конфигурацию с контактным разрывом. Решение содержит две ударные волны и один контактный разрыв, движущийся направо. Использование 3200 частиц значительно уменьшает нефизические осцилляции и сглаживание ударных волн по сравнению с решением, состоящим из 800 частиц.

Важным, даже принципиальным требованием, предъявляемым к алгоритму решения астрофизических задач, является "корректное" поведение газодинамического численного метода при моделировании открытой границы между газом и вакуумом. Возникновение таких ситуаций практически исключено при моделировании, например, задач обтекания летательных аппаратов. Поэтому требования к численным методам, ориентированным на астрофизические задачи, имеют свою специфику, существенно отличающуюся от других приложений газовой динамики.

Разработанный программный комплекс тестировался на квазиодномерной задаче плоского истечения газа в вакуум. Этот тест аналогичен тесту о распаде разрыва, в котором справа от перегородки находится вакуум. Расчет проводился с использованием двумерного алгоритма и 160 000 частиц (по 400 в каждом направлении осей координат). На примере этой задачи исследовалось также влияние стартового расположения частиц в SPH-методе.

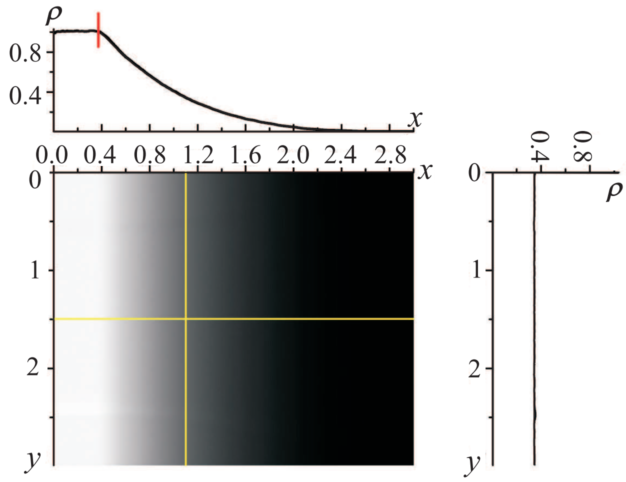

Рис. 2. Плоское истечение газа в вакуум. Распределения плотности газа в момент времени $t = 0.5$

На рис. 2 приведены два одномерных графика и одна двумерная картина в момент времени $t = 0.5$, предоставляющая достаточную информацию для анализа распределения плотности в области решения. На двумерной картине уменьшение плотности среды показано промежуточными градациями тона от белого цвета (плотная среда) до черного (глубокий вакуум). На этой картине нанесены две прямые линии: горизонтальная $y = C_1$ и вертикальная $x = C_2$. Вдоль этих линий приведены одномерные распределения плотности $\rho(x, y)$: сверху — $\rho(x, C_1)$, справа — $\rho(C_2, y)$. Таким образом, верхний график представляет волну разрежения, движущуюся в газе влево, поскольку истечение газа в вакуум происходит вправо. Правый график $\rho(C_2, y)$ позволяет контролировать сохранение одномерности течения, получаемого в расчете.

Как известно, волна разрежения должна двигаться со скоростью звука $c_0 = \sqrt{\gamma \dfrac{p}{\rho}} = 1.1832$; в соответствии с теорией этот вид течения не имеет особенностей. Для момента времени $t = 0.5$ волна должна дойти до точки $x = 1 - c_0 t = 0.4$. На верхнем графике $\rho(x, C_1)$ вертикальной линией обозначена эта точка. Видно, что на этой границе область течения газа заканчивается. Таким образом, численное решение правильно моделирует эволюцию волны разрежения.

График $\rho(C_2, y)$ показывает высокую степень сохранения одномерности решения (практически прямая линия), небольшие флуктуации в котором вызваны погрешностью от рандомизации начального распределения частиц.

Как и для большинства численных методов решения сложных нелинейных задач, для SPH-метода важную роль играют начальные данные [6]. В существенно нестационарных задачах при возможном наличии точек бифуркации решения начальные данные фактически определяют ветвь финального решения. Рассмотрим влияние на получаемое решение различных способов задания начального распределения частиц в SPH-методе на примере уже рассмотренной тестовой задачи плоского истечения газа в вакуум. Возможны следующие варианты расположения частиц, обеспечивающие одно и то же начальное значение плотности слева от границы разрыва:

— расположение частиц регулярными рядами,

— расположение частиц в шахматном порядке,

— расположение частиц в шахматном порядке с последующей рандомизацией (случайным сдвигом) положения каждой частицы относительно расчетного “шахматного” расположения,

— расположение частиц полностью случайным образом в соответствии с некоторой функцией распределения.

Последний способ здесь рассматриваться не будет, поскольку его погрешность порядка $N^{-0.5}$, что делает этот способ ограниченно пригодным для применения только с очень большим числом частиц в специальных случаях.

Результаты решения двумерной задачи с начальным распределением частиц по первым трем способам приведены на рис. 3. Слева точками отображены стартовые порядки частиц на плоскости, справа — значение плотности в момент времени $t = 0.5$. Правые рисунки представлены парами: сверху — одномерное распределение плотности вдоль белой линии, обозначенной снизу на двумерном поле значений.

Как следует из рис. 3 а, первый вариант стартового расположения частиц приводит к финальному моменту времени к значительным осцилляциям в решении, связанным с “отрывом” рядов частиц друг от друга.

При стартовом шахматном порядке частиц (рис. 3 б), вследствие их более равномерного распределения, амплитуда осцилляции значительно уменьшилась.

Поясним третий способ организации стартового распределения частиц. После того как частицы были распределены в шахматном порядке (по второму способу), к координате каждой частицы прибавлялось случайное число из диапазона $[0, R/4]$, где R — характерное расстояние между двумя соседними частицами. Этим было достигнуто лучшее перемешивание частиц. Как хорошо видно из рис. 3 в, в этом случае решение свободно от каких-либо нефизических особенностей.

Таким образом, в методе сглаженных частиц начальное распределение частиц должно быть достаточно случайным и нежелательно наличие какой-либо регулярной структуры в виде рядов из частиц. Заметим, что это требование типично для всех методов частиц, а также частиц в ячейках и иногда приводит к определенным технологическим трудностям в задании начальных распределений. Описанные здесь примеры стартовых распределений частиц на плоскости легко обобщаются на пространственный случай.

Следует отметить, что рандомизация положения частиц вносит погрешность в начальную плотность распределения газа, которая тем меньше, чем больше число частиц.

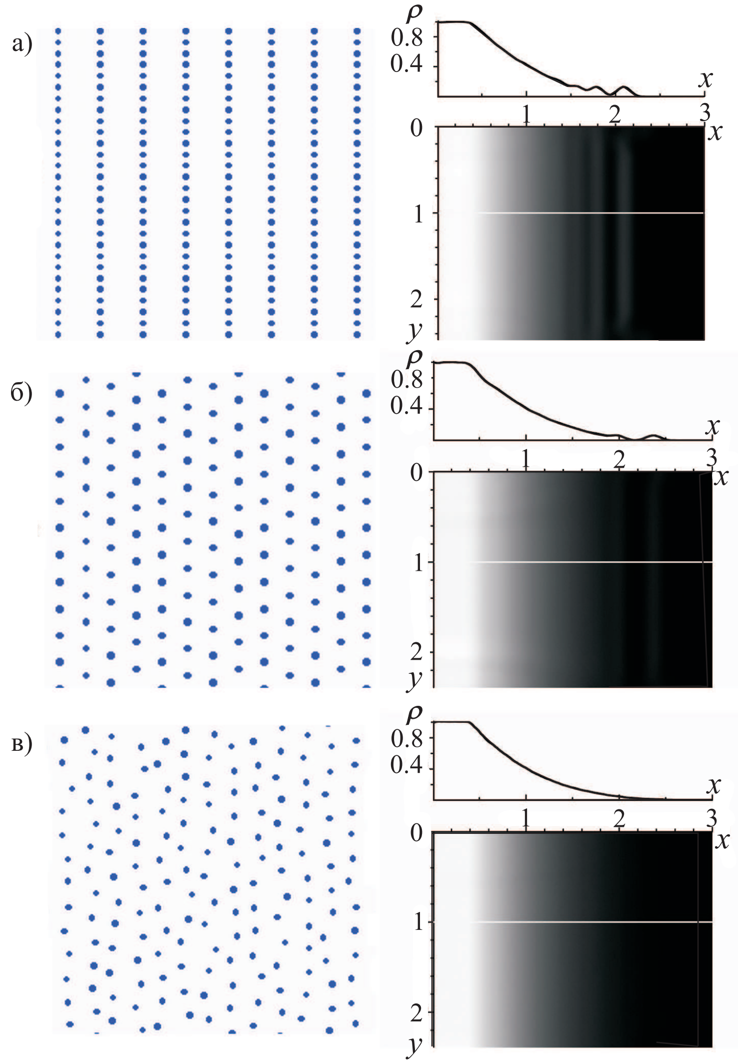

Рис. 3. Истечение газа в вакуум (плоская задача). Начальное распределение частиц: а) рядами, б) в шахматном порядке, в) в шахматном порядке с рандомизацией и соответствующее этим начальным данным распределение плотности в решении в момент $t = 0.5$

5. Примеры решения некоторых задач. *Коллапс газового диска.* Исследуется эволюция самогравитирующей газовой среды, расположенной в глубоком вакууме. В начальный момент времени газовая среда полагается неподвижной (в собственной системе координат, связанной с ее центром массы), однородной и имеет форму диска с резкой (скачкообразной) границей “газ–

вакуум”. Безразмерные параметры газа: давление $p_0 = 1$, плотность $\rho_0 = 1$, удельная внутренняя энергия $e_0 = 2.5$, радиус $R_0 = 1$. Заметим, что такое соотношение p, ρ и e с использованием модели идеального и совершенного газа соответствует двухатомному газу (молекулярному водороду) с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$.

Эволюция газовой системы определяется двумя факторами: давлением, приводящим к расширению газа в пустоту, и самогравитацией среды, приводящей к коллапсу (сжатию газа). Эффективный центр самогравитационных сил, очевидно, совпадает с центром системы.

Цель вычислительного эксперимента — определить, какой тип процесса возникнет: разлет или коллапс газового диска? Если коллапс, то какова будет финальная степень сжатия среды? Произойдет ли стягивание в точку (аналог возникновения “черной дыры”)? Заметим, что это — модельная задача, в которой не учитывается изменение реальных свойств газа при высоких давлениях и изменение метрики пространства при росте концентрации массы. Возможно, возникнет баланс сил давления и самогравитации с формированием (хотя бы и асимптотическим) стационарного газового диска с радиусом R_f. В этом случае весьма интересен вопрос: больше или меньше R_f, чем R_0?

Кроме изучения физического процесса, в вычислительном эксперименте проводилась верификация алгоритма “на изотропность”. При правильном функционировании программного комплекса газовая среда во все моменты времени должна сохранять симметрию; степень отклонения этой формы от круговой является показателем точности вычислительного алгоритма или наличия в комплексе ошибок программирования.

На рис. 4 показана эволюция газового облака, отнесенная к различным моментам времени t. Представлены двумерное поле плотности $\rho(x, y)$ в экваториальном сечении и два одномерных распределения $\rho(x)$ при $y = 0$ и $\rho(y)$ при $x = 0$ (сверху и справа соответственно).

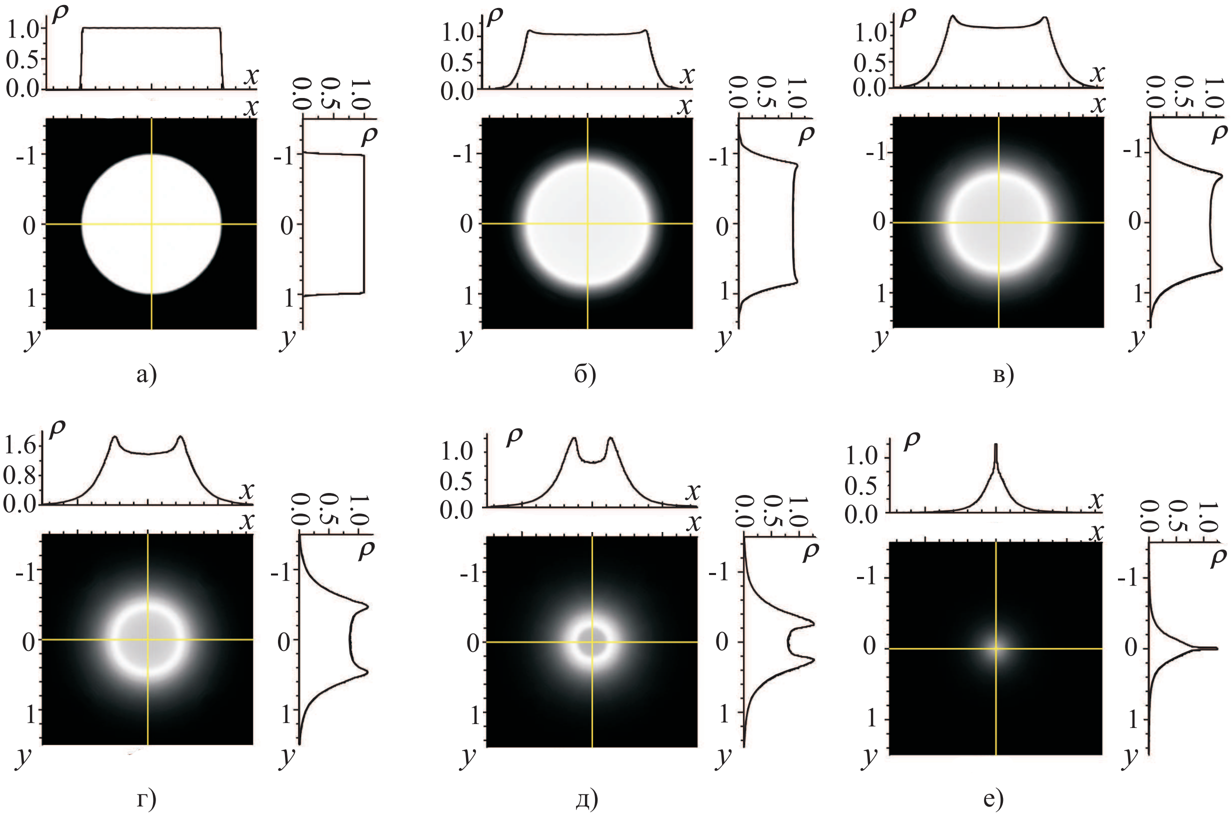

Рис. 4. Эволюция двумерного газового облака. Распределение плотности в экваториальном сечении и вдоль осей x (сверху) и y (справа) в различные моменты времени:
а) $t = 0$; б) 0.1; в) 0.2; г) 0.3; д) 0.4; е) 0.5

В начальный момент времени $t = 0$ (рис. 4 а) плотность внутри диска, в соответствии с постановкой задачи, постоянна и равна 1, вне — равна 0, что иллюстрируется графиками как вдоль x, так и вдоль y в виде ступенек. Далее начинает формироваться следующая структура газового облака.

Первое. Внешняя граница облака постепенно размывается вследствие процесса истечения внешних слоев газа в вакуум. Это размытие с течением времени усиливается. Градиенты плотности уменьшаются, а форма ступеньки постепенно теряется.

Второе. Зарождается (рис. 4 б) и непрерывно усиливается пикообразная структура облака — формируется специфическая внешняя оболочка газового диска с максимальным значением плотности: пики на одномерных графиках, кольца на двумерных сечениях и пространственные оболочки на трехмерных проекциях. Исследование этих пиков не является предметом данной работы; поэтому конкретные цифровые данные здесь не приводятся (их значения могут быть приближенно определены из одномерных графиков). Эта круговая оболочка возникает вследствие двух факторов: давления и гравитации. Газодинамическое давление стремится расширить объем облака. Воздействие давления достаточно одинаково на все газовые слои внутри диска, но на границе "газ–вакуум" противодавления нет. Поэтому внешние газовые слои движутся от центра. Самогравитация газа, наоборот, стремится уменьшить объем диска, поскольку все газовые слои притягиваются к эффективному центру тяготения (центру диска). Сила притяжения пропорциональна $1/r^2$, и воздействие самогравитации на внутренние слои газа больше, чем на внешние. Возникают газовые потоки в центр облака с постепенным ростом ρ, p и e.

Третье. При таком исходном соотношении параметров внешняя оболочка диска сжимается и к моменту времени $t = 0.5$ схлопывается, образуя новую структуру облака: пик значений всех газодинамических параметров в центре диска (рис. 4 б, в, г, д). Амплитуда этого пика лавинообразно растет. Сила гравитации все больше и больше превосходит противостоящую ей силу газодинамического давления. Вся масса газового облака стягивается в точку (рис. 4 е), и возникает "черная дыра".

Заметим, что при других значениях ρ_0, p_0, e_0 и R_0 эволюция облака может пойти по другому сценарию. Если газодинамическое давление будет превалировать над силой самогравитации, то возникающая круговая оболочка (рис. 4 б, в, г) будет двигаться не к центру, а от него. Результатом этого процесса станет разрыв среды и сброс газовой оболочки в пространство, а оставшаяся масса газа будет коллапсировать к центру. Этот процесс может быть периодическим (квазипериодическим) со сбросом новых оболочек несколько раз, пока масса газа не уменьшится до того уровня, когда соответствующее давление не станет меньше сил самогравитации. Произойдет финальный коллапс газового облака и возникновение "черной дыры".

Во избежание недоразумений повторим, что здесь рассматривается модельная задача, газ предполагается совершенным (в реальности при высоких давлениях и температурах уравнение состояния газа резко отклоняется от совершенного, что приводит к дополнительным физическим эффектам).

Отметим, что вычислительный алгоритм на данной задаче показал хорошие свойства изотропии с высокоточным сохранением круговой симметрии решения.

Формирование спиралей галактики. Рассмотрим двумерную задачу об эволюции газового облака, вращающегося вокруг некоторого центра тяготения в квазистационарном режиме, возмущенном двумя точечными источниками гравитации на периферии в начальный момент времени.

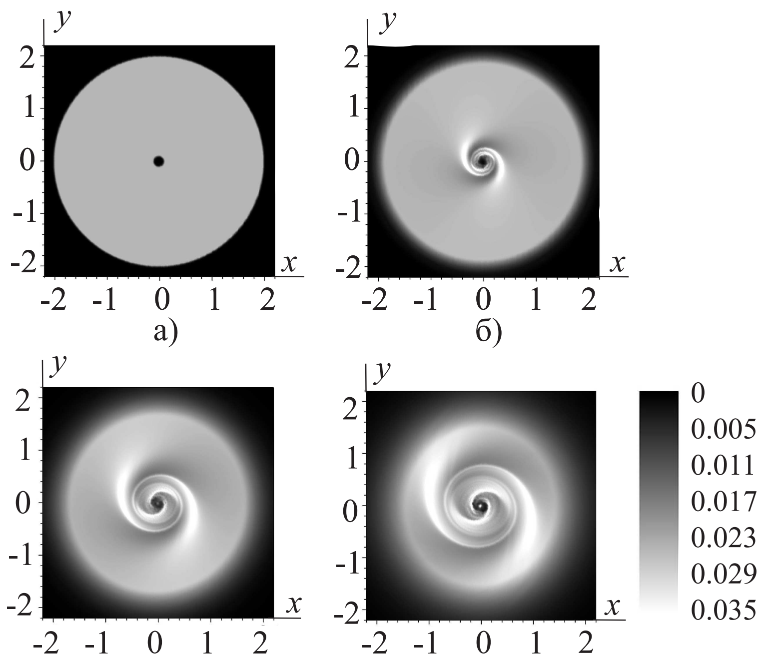

Рис. 5. Эволюция газового диска с формированием спиралей. Распределение плотности в различные моменты времени: а) $t = 0$; б) 0.3; в) 0.6; г) 0.9

Сформулируем начальные данные задачи следующим образом. Однородное газовое облако имеет форму диска с внешним радиусом $R_0 = 2$, плотностью $\rho_0 = 0.25$, давлением $p = 0.05$ и удельной внутренней энергией $e_0 = 0.5$. Такое соотношение p, ρ и e соответствует уравнению состояния совершенного и идеального двухатомного газа, в частности молекулярного водорода. Вращение облака вокруг центрального тела массы M в начальный момент соответствует движению по стационарной орбите с угловой скоростью

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}\,. \tag{4}$$

Соотношение массы газового облака и массы центрального тела принималось равным 1:5. Возмущения, вносимые периферийными источниками тяготения, моделировались как возмущения угловой скорости газа ω':

$$\omega' = \omega_0(1 + 0.1\sin 2\phi), \tag{5}$$

где ϕ — угловая координата, отсчитываемая от некоторого начала (для дальнейшего анализа значения не имеет). Разумеется, условия (4) и (5) описывают воздействие периферийных масс достаточно приближенно, но проблема начальных данных в вычислительной астрофизике вообще весьма трудна.

На рис. 5 показаны распределения плотности газа $\rho(x, y)$ в плоскости диска, иллюстрирующие эволюцию газового облака и его состояния в различные моменты времени.

Рис. 5 представляет процесс формирования из первичного газового протовещества некоторой околозвездной системы со спиралевидной структурой. В однородном газовом диске в начальный момент времени (рис. 5 а) возмущения, вызванные внешним воздействием, начинают развиваться. С определенных позиций этот процесс может быть назван потерей устойчивости циклического движения протовещества, однако при этом возникают не стохастические, а упорядоченные структуры. Так, к моменту времени $t = 0.3$ (рис. 5 б) в ближней окрестности центрального тела (скопления звезд) образуется вихревое движение с определенными, еще не до конца оформившимися треками протоспиралей. К моменту времени $t = 0.6$ (рис. 5 в) эти треки уже достаточно хорошо сформировались, хотя в целом еще существуют ветвления некоторых спиралей.

К финальному (окончание данного расчета) моменту времени $t = 0.9$ (рис. 5 г) спирали практически сформировались. Обратим внимание, что сформировались два рукава спирального движения в соответствии с числом возмущений, вызванных в начальный момент периферийными источниками гравитации. Вообще говоря, финальная картина по-прежнему является нестационарной, как и большинство астрофизических процессов.

6. Заключение. Проведенные вычислительные эксперименты, с одной стороны, подтвердили эффективность применения SPH-метода для решения уравнений газовой динамики, включая сложные ударно-волновые конфигурации. С другой стороны, как было показано, метод предъявляет существенные требования к числу частиц. Для адекватной передачи профилей решений в некоторых, особенно сложных тестах необходимо использовать не менее $400-800$ частиц в одном направлении. Таким образом, полностью трехмерная задача моделирования газодинамических процессов может потребовать $\sim 400^3$ частиц, что влечет за собой существенные вычислительные затраты и однозначно ориентирует на применение параллельных технологий с расчетами на суперЭВМ. Полученные результаты хорошо соответствуют физическим представлениям о протекающем процессе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gingold R.A., Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. **181**. 375–389.
2. *Harlow F.H.* The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics // Proc. Symp. Applied Mathematics. 1963. **15**. 269.
3. *Springel V.* The cosmological simulation code GADGET-2 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2005. **364**. 1105–1134.
4. *O'Shea B.W., Bryan G., Bordner J., Norman M.L., Abel T., Harkness R., Kritsuk A.* Introducing Enzo, an AMR cosmology application // eprint arXiv: astro-ph/0403044.
5. *Алиев А.В., Тарнавский Г.А.* Иерархические SPH-методы для математического моделирования в гравитационной газовой динамике // Сибирские электронные матем. известия. 2007. **6**. 376–434 (http://semr.math.nsc.ru).
6. *Тарнавский Г.А., Алиев А.В.* Математическое моделирование: основные сегменты, их особенности и проблемы // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 2. 148–161.
7. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Berlin: Springer, 1999.

Поступила в редакцию
24.01.2008