

УДК 517.958:532

## АЛГОРИТМЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ НА СГУЩАЮЩИХСЯ СЕТКАХ В ЗАДАЧАХ ТРЕХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Д. А. Губайдуллин<sup>1</sup>, А. И. Никифоров<sup>1</sup>, А. В. Цепяев<sup>1</sup>

Численный алгоритм с распараллеливанием, предложенный ранее авторами для двухфазной фильтрации, применен для решения трехмерной задачи трехфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками. Показана его эффективность, возрастающая с увеличением числа сгущающихся участков сетки. В основу численной аппроксимации задачи положен метод контрольных объемов. Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований № 14 Президиума РАН «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий».

**Ключевые слова:** фильтрация жидкостей, параллельные вычисления, сгущающиеся сетки, метод контрольных объемов, численные алгоритмы.

**1. Введение.** Основная трудность численного решения практических задач разработки нефтяных и газовых месторождений заключается в решении систем уравнений большой размерности вследствие трехмерности объекта и необходимости сгущения сетки в прискважинных зонах. Обычно диаметр скважины на 5 – 6 порядков, а толщина пласта на 2 – 3 порядка меньше характерных размеров пласта в горизонтальной плоскости. В связи с этим встает вопрос создания алгоритмов, пригодных для распараллеливания вычислений [2]. Одним из развивающихся направлений в создании таких алгоритмов являются методы разделения области [3 – 8].

Как и в [1], при решении задач трехфазной фильтрации на каждом временном шаге распараллеливается процесс решения систем сеточных уравнений по давлению и по насыщенностям.

Распараллеливание системы сеточных уравнений для давления основано на независимом решении уравнений для сгущающихся участков и на новом типе согласования этих решений с решением на грубой сетке. Согласование достигается за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках [9 – 13].

В основе распараллеливания системы сеточных уравнений для насыщенностей лежит сочетание элементов явной и неявной схем. На каждом временном шаге сеточные уравнения по насыщенностям для сгущающихся участков решаются независимо по неявной схеме. Согласование полученных решений с решением на грубой сетке достигается за счет сочетания элементов явной и неявной схем в определении насыщенностей крупных ячеек, окружающих сгущающиеся участки, без использования процедуры «предиктор-корректор».

Детальное описание алгоритма приведено в работе [1] для случая двухфазной фильтрации.

Алгоритмы тестировались при решении модельных задач трехфазной фильтрации несжимаемой жидкости с различным числом скважин со сгущающимися сетками в прискважинных зонах. Системы уравнений на грубой сетке решались на одном процессоре. Системы уравнений на сгущающихся участках решались параллельно с использованием библиотеки MPI на многопроцессорной вычислительной системе МКВС-E112.

**2. Постановка задачи трехфазной фильтрации.** Рассматривается трехфазная изотермическая фильтрация нефти, воды и газа, подчиняющаяся линейному закону Дарси. Считается, что пласт, нефть и вода несжимаемы и отсутствует массообмен между нефтяной и газовой фазой. Гравитационные силы

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, ул. Лобачевского, 2/31, 420111, Казань; e-mail: gubajdullin@mail.knc.ru, mazurov@mail.knc.ru

не учитываются. Тогда справедлива следующая система уравнений:

$$\operatorname{div}(q_w) + m \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(q_o) + m \frac{\partial S_o}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(p_g q_g) + m \frac{\partial p_g S_g}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$$q_\alpha = -\frac{f_\alpha k}{\mu_\alpha} \operatorname{grad}(p) \quad (\alpha = o, w, g). \quad (4)$$

Здесь  $p = p(x, y, z)$  — давление, индексы “o”, “w”, “g” соответствуют нефти, воде и газу,  $q_\alpha$  — вектор скорости фильтрации фазы  $\alpha$ ,  $S_\alpha$  — насыщенность пласта фазой  $\alpha$ ,  $S_o + S_w + S_g = 1$ ,  $f_\alpha$  — относительные фазовые проницаемости,  $k$  — абсолютная проницаемость,  $\mu_\alpha$  — динамическая вязкость фазы,  $\rho_g = \frac{\rho^*}{B_g}$  — плотность газа в пластовых условиях,  $\rho_g^*$  — плотность газа при нормальных условиях,  $B_g$  — объемный коэффициент,  $m$  — пористость.

Исходную систему уравнений можно привести к виду

$$\frac{m S_g (\rho_g)_p}{\rho_g} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}((K_o + K_w + K_g) \operatorname{grad} p) = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div}(q_w) + m \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div}(q_o) + m \frac{\partial S_o}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

где  $K_o = \frac{k f_o}{\mu_o}$ ,  $K_w = \frac{k f_w}{\mu_w}$ ,  $K_g = \frac{k f_g}{\mu_g}$  — фазовые подвижности. Область решения представляется многосвязной областью, внутренние поверхности которой определены поверхностями скважин в интервалах вскрытия пласта. В начальный момент времени считаются известными распределения давления и насыщенностей в пласте. На внешней поверхности пласта задаются граничные условия 1-го или 2-го рода. Обычно это начальное пластовое давление, условие непротекания и насыщенности пласта фазами на участках внешней поверхности, через которые поступают флюиды. На скважинах задается либо забойное давление, либо суммарный расход жидкости при некотором фиксированном давлении, определяемом в процессе решения задачи.

**3. Алгоритм решения задачи.** Задача решается в области  $D$ , представляющей собой пласт, ограниченный кровлей, подошвой, боковыми поверхностями и поверхностями интервалов вскрытия скважин  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Объединение  $\bigcup_{k=1}^N V_k$  является дополнением многосвязной области  $D$  до односвязной области. Система уравнений трехфазной фильтрации без учета капиллярных и гравитационных сил записывается в виде (5)–(7) при граничных условиях

$$p = p_\Gamma \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \quad (8)$$

$$-(K_o + K_w + K_g) \frac{\partial p}{\partial n} = q_n \quad \text{on} \quad \Gamma_2, \quad (9)$$

$$p|_{\partial V_k} = P_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$S_w = S_{w\Gamma} \quad \text{on} \quad \Gamma_3, \quad S_w = S_{w_k}, \quad k = 1, \dots, M, \quad (11)$$

и при начальных условиях

$$p = P^0, \quad S_w = S_w^0, \quad S_o = S_o^0 \quad \text{в} \quad D, \quad (12)$$

где  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$  — внешняя граничная поверхность области  $D$ ,  $\Gamma_3$  — часть поверхности  $\Gamma$ , через которую жидкость поступает в пласт,  $\partial V_k$  — поверхность интервала вскрытия пласта  $k$ -й скважиной,  $P_k$  — заданное давление на  $k$ -й скважине,  $N$  — число скважин,  $M$  — число нагнетающих скважин ( $M < N$ ),  $S_{w_k}$  — заданная насыщенность в нагнетательной скважине. Пласт покрыт сеткой  $\Omega$ , ячейки которой в прискважинных зонах  $D_k$  уменьшаются в размерах к интервалам вскрытия скважин по убывающей геометрической прогрессии. Решение задачи (5)–(12) по определению полей давления  $p$  и насыщенностей  $S_w$  и  $S_o$  на  $(n+1)$ -ом временном шаге включает в себя следующие этапы.

Этап 1. Вычисляются давления  $p_i^{n+1}$  из системы (5), (8)–(10) со значениями  $K_{oi}^n, K_{wi}^n, K_{gi}^n$ . Для решения задачи (5), (8)–(10) предлагается следующий алгоритм распараллеливания. Вводятся дополнительные грубые сетки  $\omega_k$ , покрывающие области  $D_k \cup V_k$  и имеющие размер ячеек, эквивалентный размеру ячеек  $\Omega$  в  $D_0$ . Решение  $p$  в области  $D_0$  представляется как  $p_1$  с граничными условиями  $p_1 = p_{1\gamma k}$  на границах раздела  $\gamma_k$  области  $D_0$  и прискважинных подобластей  $D_k$ , а вне области  $D_0$  — как сумма двух решений  $p_{2k}$  и  $p_{3k}$ . Решения  $p_{2k}$  определяются на сетке  $\Omega$  в областях  $D_k$ , а решения  $p_{3k}$  — на сетках  $\omega_k$  в областях  $D_k \cup V_k$ , при этом  $p_{1\gamma k} = p_{2\gamma k} + p_{3\gamma k}$  на границах  $\gamma_k$ .

Постановка задачи для определения  $p_1$  на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{mS_g(\rho_g)_p}{\rho_g} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \operatorname{div}(K_w + K_o + K_g) \operatorname{grad} p_1 &= 0 \quad \text{в } D_0, \\ p_1 &= p_\Gamma \quad \text{на } \Gamma_1 \cap D_0, \quad -(K_w + K_o + K_g) \frac{\partial p_1}{\partial n} = q_n \quad \text{на } \Gamma_2 \cap D_0, \\ p_1 &= p_{1\gamma k} \quad \text{на } \gamma_k, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

Постановка задачи для определения  $p_{2k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетке  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{mS_g(\rho_g)_p}{\rho_g} \frac{\partial p_{2k}}{\partial t} - \operatorname{div}(K_w + K_o + K_g) \operatorname{grad} p_{2k} &= 0 \quad \text{в } D_k, \\ p_{2k} &= p_\Gamma \quad \text{on } \Gamma_1 \cap D_k, \quad -(K_w + K_o + K_g) \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = q_n \quad \text{на } \Gamma_2 \cap D_k, \\ p_{2k}|_{\partial V_k} &= P_k, \quad p_{2k} = p_{2\gamma k} \quad \text{на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Постановка задачи для определения  $p_{3k}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) на сетке  $\omega_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{mS_g(\rho_g)_p}{\rho_g} \frac{\partial p_{3k}}{\partial t} - \operatorname{div}(K_w + K_o + K_g) \operatorname{grad} p_{3k} &= 0 \quad \text{in } D_k \cup V_k, \\ p_{3k} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \cap (D_k \cup V_k), \quad (K_w + K_o + K_g) \frac{\partial p_{3k}}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cap (D_k \cup V_k), \\ p_{3k} &= p_{3\gamma k} \quad \text{на } \gamma_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Решения  $p_1, p_{2k}$  и  $p_{3k}$  при известных граничных значениях  $p_{\Gamma_{1k}}, p_{\Gamma_{2k}}, p_{\Gamma_{3k}}$  независимо определяются из систем уравнений (13), (14) и (15) соответственно. При выполнении условий на границах раздела  $\gamma_k$  относительно давлений  $p_{\Gamma_{1k}} = p_{\Gamma_{2k}} + p_{\Gamma_{3k}}$  и относительно нормальных составляющих скоростей фильтрации  $q_{1kn} + q_{2kn} + q_{3kn} = 0$  для определения решений  $p_1, p_{2k}, p_{3k}$  достаточно задания начальных условий и граничных значений  $p_{\Gamma_{3k}}$ . При значениях  $p_{\Gamma_{3k}} = 0$  система уравнений (13)–(15) эквивалентна исходной системе уравнений (5), (8)–(10). Таким образом, для получения решения исходной системы уравнений необходимо построить алгоритм решения системы (13)–(15), в котором  $p_{3k} \rightarrow 0$ . На каждой итерации с номером  $i \geq 1$  независимо определяются  $p_{2k}^i$  из решения задач (14) с граничными значениями на  $\gamma_k$ :

$$p_{2\gamma k}^i = p_{2\gamma k}^{i-1} + p_{3\gamma k}^{i-1}, \quad (16)$$

где  $p_{2\gamma k}^0, p_{3\gamma k}^0$  берутся с предыдущего временного шага. Для определения  $p_1^i$  и  $p_{3k}^i$  совместно решаются системы уравнений (13), (15) на грубой сетке с дополнительными условиями  $p_{\Gamma_{1k}}^i - p_{\Gamma_{3k}}^i = p_{\Gamma_{2k}}^i$  и  $q_{1kn}^i + q_{3kn}^i = -q_{2kn}^i$  на  $\gamma_k$  при фиксированных узловых значениях решений  $p_{2k}^i$ . В вычислительном процессе, построенном таким образом, граничные значения  $p_{3\gamma k}^i$  сносятся после каждой итерации по правилу (16) на граничные значения  $p_{2\gamma k}^i$ . В результате  $p_{3k}^i$  с ростом  $i$  стремятся к нулю, и  $i$ -е приближение давления определяется решением  $p_1^i$  в области  $D_0$  и решениями  $p_{2k}^i$  в подобластях  $D_k$ . Процесс решения прерывается при выполнении условия  $d(p_\Omega^i) < \varepsilon$ , где  $d(p_\Omega^i)$  — максимальная по модулю невязка сеточной системы уравнений (5), (8)–(10). Каждая из задач (14) для получения решений  $p_{2k}^i$  прерывается на  $n$ -й итерации при

$$\text{выполнении одного из критериев } \max_{j \in \gamma_k} \frac{|d_j(p_\Omega^{in}) - d_j(p_\Omega^{i,n-1})|}{d_j(p_\Omega^{i,n-1})} < \alpha \quad \text{или} \quad \max_{j \in \gamma_k} |d_j(p_\Omega^{in})| < \varepsilon. \quad \text{Задача (13), (15)}$$

$$\text{для получения решений } p_1^i, p_{3k}^i \text{ прерывается на } n\text{-й итерации по критерию } \max_{j \in \gamma_k} \frac{|d_j(p_\Omega^{in}) - d_j(p_\Omega^{i,n-1})|}{d_j(p_\Omega^{i,n-1})} < \alpha$$

$$\text{или } \max_{j \in \gamma_k} |d_j(p_\Omega^{in})| < \varepsilon, \text{ где } d_j(p_\Omega^{in}) \text{ — модуль невязки, соответствующей } j\text{-му узлу } \gamma_k \text{ сеточной системы}$$

уравнений (5), (8)–(11),  $\alpha$  — итерационный параметр,  $n$  — номер внутренних итераций,  $p_{\Omega}^{in}$  — значения функции  $p^{in}$  в узлах сетки  $\Omega$ . При решении задач (14) имеем  $p^{in} = p_1^{i-1}$  в  $D_0 \setminus \gamma_k$  и  $p^{in} = p_{2k}^{in}$  в  $D_k$ , а при решении задачи (13), (15) имеем  $p^{in} = p_1^{in}$  в  $D_0$  и  $p^{in} = p_{2k}^{in}$  в  $D_k \setminus \gamma_k$ . Условие  $d_j(p_{\Omega}^i) < \varepsilon$  проверяется, когда  $\max_{j \in \forall \gamma_k} d_j(p_{\Omega}^i) < \varepsilon$ .

Этап 2. Вычисляются полные расходы, выходящие из ячеек грубой сетки в единицу времени:

$$Q_{ji}^{n+1} = \frac{p_j^{n+1} - p_i^{n+1}}{R_{ij}^n}, \quad (17)$$

где  $R_{ij}^n = \frac{L_{ij}}{D_{ij}} (K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n) + \frac{L_{ji}}{D_{ij}} (K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n)$ ,  $D_{ij}$  — площадь общей граничной поверхности  $i$ -й и  $j$ -й ячеек,  $L_{ij}$  — расстояние от узлового значения  $i$ -й ячейки до общей граничной поверхности,  $p_i^{n+1}$  — давление в  $i$ -й ячейке.

Этап 3. Для полных расходов, выходящих из ячеек грубой сетки, вычисляются фазовые расходы по явной схеме для воды и нефти соответственно:

$$Q_{w,ji}^{n+1,cell} = \left( \frac{K_w^n}{K_w^n + K_o^n + K_g^n} \right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1}, \quad Q_{o,ji}^{n+1,cell} = \left( \frac{K_o^n}{K_w^n + K_o^n + K_g^n} \right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1}, \quad \text{где}$$

$$\left( \frac{K_w^n}{K_w^n + K_o^n + K_g^n} \right)_{ji}^{up} = \begin{cases} \frac{K_{wi}^n}{K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n}, & p_i \geq p_j, \\ \frac{K_{wj}^n}{K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n}, & p_i < p_j, \end{cases} \quad \left( \frac{K_o^n}{K_w^n + K_o^n + K_g^n} \right)_{ji}^{up} = \begin{cases} \frac{K_{oi}^n}{K_{wi}^n + K_{oi}^n + K_{gi}^n}, & p_i \geq p_j, \\ \frac{K_{oj}^n}{K_{wj}^n + K_{oj}^n + K_{gj}^n}, & p_i < p_j. \end{cases}$$

Этап 4. Для каждой прискважинной зоны независимо вычисляются насыщенности по неявной схеме из системы уравнений

$$m_i V_i \frac{S_{wi}^{n+1} - S_{wi}^n}{\Delta t} = \sum_j Q_{w,ji}^{n+1}, \quad (18)$$

$$m_i V_i \frac{S_{oi}^{n+1} - S_{oi}^n}{\Delta t} = \sum_j Q_{o,ji}^{n+1}, \quad (19)$$

где сумма берется по  $j$ -ым ячейкам, окружающим  $i$ -ю ячейку,  $Q_{w,ji}^{n+1} = Q_{w,ji}^{n+1,cell}$ ,  $Q_{o,ji}^{n+1} = Q_{o,ji}^{n+1,cell}$  для  $j$ -х ячеек грубой сетки, из которых расход поступает в прискважинную зону, а

$$Q_{w,ji}^{n+1} = Q_{w,ji}^{n+1,notcell} = \left( \frac{K_w^{n+1}}{K_w^{n+1} + K_o^{n+1} + K_g^{n+1}} \right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1},$$

$$Q_{o,ji}^{n+1} = Q_{o,ji}^{n+1,notcell} = \left( \frac{K_o^{n+1}}{K_w^{n+1} + K_o^{n+1} + K_g^{n+1}} \right)_{ji}^{up} Q_{ji}^{n+1}$$

в остальных случаях. Фазовые расходы  $Q_{w,ji}^{n+1,cell}$ ,  $Q_{o,ji}^{n+1,cell}$  являются граничными условиями при решении систем (18), (19).

Этап 5. Вычисляются насыщенности для ячеек грубой сетки:

$$S_{wi}^{n+1} = S_{wi}^n + \frac{\Delta t}{m_i} V_i \sum_j Q_{w,ji}^{n+1}, \quad S_{oi}^{n+1} = S_{oi}^n + \frac{\Delta t}{m_i} V_i \sum_j Q_{o,ji}^{n+1}.$$

Здесь  $Q_{w,ji}^{n+1} = Q_{w,ji}^{n+1,notcell}$ ,  $Q_{o,ji}^{n+1} = Q_{o,ji}^{n+1,notcell}$  берутся из решения системы уравнений (18), (19) для  $j$ -ых ячеек прискважинных зон, из которых расход поступает в ячейки грубой сетки, а в остальных случаях полагается  $Q_{w,ji}^{n+1} = Q_{w,ji}^{n+1,cell}$ ,  $Q_{o,ji}^{n+1} = Q_{o,ji}^{n+1,cell}$ .

**4. Результаты численных экспериментов.** Предложенные алгоритмы тестировались при решении модельной задачи трехфазной фильтрации жидкости с различным числом вертикальных добывающих скважин. Брался десятислойный пласт (10000 м × 10000 м × 18 м) с толщинами слоев  $d_1 = 1$  м,  $d_2 = 1$  м,  $d_3 = 3$  м,  $d_4 = 1$  м,  $d_5 = 1$  м,  $d_6 = 1$  м,  $d_7 = 2$  м,  $d_8 = 1$  м,  $d_9 = 2$  м,  $d_{10} = 5$  м и с абсолютными проницаемостями  $k_1 = 10^{-3}$  дарси,  $k_2 = 10^{-2}$  дарси,  $k_3 = 25 \times 10^{-3}$  дарси,  $k_4 = 10^{-2}$  дарси,  $k_5 = 10^{-3}$  дарси,  $k_6 = 10^{-2}$  дарси,  $k_7 = 5 \times 10^{-2}$  дарси,  $k_8 = 10^{-2}$  дарси,  $k_9 = 10^{-3}$  дарси,  $k_{10} = 15 \times 10^{-3}$  дарси

соответственно. Кровля пласта считалась непроницаемой, на боковых поверхностях и подошве пласта давление  $P_T = 125$  атм, на скважинах  $P_k = 30$  атм, на боковой поверхности насыщенность  $S_w = 0$ ,  $S_o = 1$ , на подошве  $S_w = 1$ ,  $S_o = 0$ . Начальная насыщенность  $S_w = 0$ ,  $S_o = 0.5$ . Динамическая вязкость воды  $\mu_w = 10^{-3}$  Па·с, динамическая вязкость нефти  $\mu_o = 15 \times 10^{-3}$  Па·с, динамическая вязкость газа  $\mu_g = 3 \times 10^{-5}$  Па·с, плотность нефти  $\rho_o = 0.882 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ , плотность воды  $\rho_w = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ . Для вычисления относительных фазовых проницаемостей использовалась модель Стоуна [14]

$$f_o(S_w, S_o) = \bar{S}_o f_w(S_w) \frac{f_g(S_o)}{1 - \bar{S}_w} (\bar{S}_w + \bar{S}_o), \quad f_w(S_w) = (1 - \bar{S}_w)^{1/2} (1 - \bar{S}_w^{n/(n-1)})^{2(n-1)/n},$$

$$f_o(S_o) = \bar{S}_w^{1/2} \left( 1 - (1 - \bar{S}_o^{n/(n-1)})^{(n-1)/n} \right)^2,$$

где  $\bar{S}_\alpha = \frac{S_\alpha - S_{\alpha r}}{1 - \sum_{\beta} S_{\beta r}}$  — эффективная насыщенность,  $S_{\alpha r}$  — остаточная насыщенность,  $\alpha = (o, w, g)$ .

Обычно значения параметра  $n$  лежат в пределах 2–5, в решаемых примерах значение  $n$  бралось равным 3. Каждая скважина моделировалась цилиндром с радиусом окружности  $r = 0.1$  м. Линейный размер ячеек, примыкающих к скважинам, брался порядка 0.1 м. Итерационный параметр  $\alpha$  брался равным 0.5. Время решения практически не меняется при  $\alpha = 0.3 \div 0.6$ .

Системы уравнений для давления решались методом сопряженных градиентов с предобуславливающей матрицей, для построения которой использовалось неполное разложение Холецкого [15, 16]. Системы уравнений для насыщенности решались методом Зейделя [17]. Системы уравнений решались до балансовой погрешности  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Скважины отключались при достижении 98% обводненности продукции.

Задача без разделения области решалась с использованием явных и неявных схем для насыщенности. При решении по явной схеме шаг по времени определялся размером ячеек, примыкающих к интервалам вскрытия скважины, и брался равным  $\Delta t = 8$  сек. При решении по неявной схеме шаг по времени брался равным  $\Delta t = 1$  сут. В табл. 1 приведено время решения задачи без разделения области с определением насыщенности по неявной схеме.

Таблица 1  
Решение задачи без разделения области

| Число сгущающихся участков сетки | Число узлов | Время решения с определением насыщенности по неявной схеме |
|----------------------------------|-------------|------------------------------------------------------------|
| 1                                | 11 744      | 7 мин 14 сек                                               |
| 50                               | 365 524     | 301 мин 20 сек                                             |
| 100                              | 726 721     | 722 мин 1 сек                                              |

Системы уравнений на грубой сетке решались на одном процессоре. Системы же уравнений на сгущающихся участках сетки решались независимо, параллельно на нескольких процессорах. Для каждого  $j$ -го процессора выделялось равное (с точностью до единицы) число систем уравнений сгущающихся участков  $Q_j$ . Множества  $Q_j$  определялись в начале решения и не менялись в процессе решения. В табл. 2–4 приведено время решения задачи с разделением области по давлению и насыщенности.

Для оценки времени решения задачи трехфазной фильтрации с разделением области введем следующие обозначения. При решении задачи по определению насыщенности на  $n$ -ом временном шаге обозначим  $t_{ks}^n$  — время решения системы уравнений  $k$ -го сгущающегося участка,  $t_{\max, s}^n = \max_k t_{ks}^n$  — минимальное время, необходимое для решения системы уравнений любого сгущающегося участка,  $t_{gs}^n$  — время решения системы уравнений грубой сетки.

При решении задачи по определению давления на  $i$ -й внутренней итерации на  $n$ -ом временном шаге введены обозначения:  $t_{kp}^{in}$  — время решения системы уравнений  $k$ -го сгущающегося участка,  $t_{\max, p}^{in} = \max_k t_{kp}^{in}$  — минимальное время, необходимое для решения системы уравнений любого сгущающегося участка,  $t_{gp}^{in}$  — время решения системы уравнений грубой сетки. С учетом введенных обозначений время решения задачи с  $K$  сгущающимися участками при различном числе процессоров  $N$  можно оценить по

Таблица 2  
Решение задачи с разделением области по давлению

| Число сгущающихся участков сетки | Число узлов | Число процессоров | Время решения  |
|----------------------------------|-------------|-------------------|----------------|
| 1                                | 11 744      | 1                 | 7 мин 15 сек   |
| 50                               | 365 524     | 1                 | 291 мин 4 сек  |
|                                  |             | 5                 | 270 мин 14 сек |
|                                  |             | 8                 | 263 мин 12 сек |
| 100                              | 726 721     | 1                 | 681 мин 40 сек |
|                                  |             | 5                 | 654 мин 8 сек  |
|                                  |             | 8                 | 649 мин 14 сек |

Таблица 3  
Решение задачи с разделением области по насыщенности

| Число сгущающихся участков сетки | Число узлов | Число процессоров | Время решения  |
|----------------------------------|-------------|-------------------|----------------|
| 1                                | 11 744      | 1                 | 6 мин 11 сек   |
| 50                               | 365 524     | 1                 | 255 мин 33 сек |
|                                  |             | 5                 | 161 мин 4 сек  |
|                                  |             | 8                 | 143 мин        |
| 100                              | 726 721     | 1                 | 633 мин 2 сек  |
|                                  |             | 5                 | 440 мин 12 сек |
|                                  |             | 8                 | 391 мин 36 сек |

Таблица 4  
Решение задачи с разделением области по давлению и насыщенности

| Число сгущающихся участков сетки | Число узлов | Число процессоров | Время решения  |
|----------------------------------|-------------|-------------------|----------------|
| 1                                | 11 744      | 1                 | 6 мин 11 сек   |
| 50                               | 365 524     | 1                 | 247 мин 21 сек |
|                                  |             | 5                 | 141 мин        |
|                                  |             | 8                 | 118 мин 28 сек |
| 100                              | 726 721     | 1                 | 622 мин 5 сек  |
|                                  |             | 5                 | 399 мин        |
|                                  |             | 8                 | 332 мин        |

формулам

$$T_1 = \sum_n \left[ \sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i \sum_k t_{kp}^{in} + \sum_k t_{ks}^n \right] \quad \text{при } N = 1,$$

$$T_{N < K} = \sum_n \left[ \sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i \max_j \sum_{k \in Q_j} t_{kp}^{in} + \max_j \sum_{k \in Q_j} t_{ks}^n \right] + t_N \quad \text{при } N < K,$$

$$T_{N=K} = \sum_n \left[ \sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i t_{\max,p}^{in} + t_{\max,s}^n \right] + t_N \quad \text{при } N = K,$$

где  $t_N$  — время передачи данных между  $N$  процессорами ( $N > 1$ ).

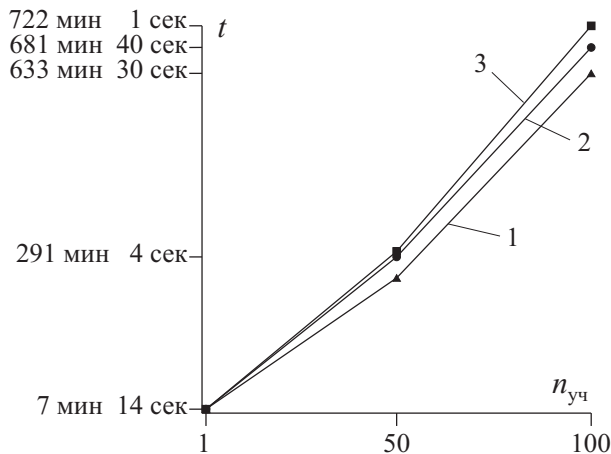


Рис. 1. Расчетное время решения задачи с разделением области по давлению

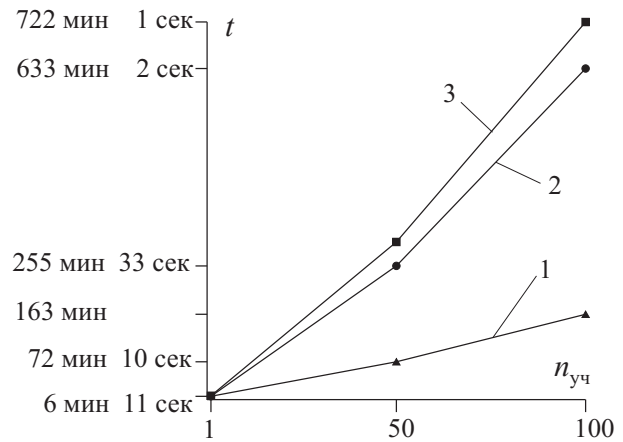


Рис. 2. Расчетное время решения задачи с разделением области по насыщенности

По этим формулам и результатам решения задач, приведенных в табл. 2–4, можно определить примерное расчетное время решения задач с различным числом сгущающихся участков и процессоров. На рис. 1–3 приведено расчетное время решения задачи с числом процессоров, равным числу сгущающихся участков (ломаная 1 характеризует решение задачи с числом процессоров, равным числу сгущающихся участков, ломаная 2 — решение задачи на одном процессоре, ломаная 3 — решение задачи без деления области,  $n_{уч}$  — число сгущающихся участков сетки,  $t$  — время решения).

Из приведенных временных характеристик решения следует, что с увеличением числа процессоров общее время решения задачи уменьшается, хотя эффективность использования процессоров падает. Время

$$T_{por} = \sum_n \left[ \sum_i t_{gp}^{in} + t_{gs}^n + \sum_i t_{max,p}^{in} + t_{max,s}^n \right]$$

является пороговым для данного алгоритма. Общее время решения с увеличением числа процессоров уменьшается за счет уменьшения времени решения систем уравнений для сгущающихся участков от величины  $\sum_i \sum_k t_{kp}^{in} + \sum_k t_{ks}^n$  до величины  $\sum_i t_{max,p}^{in} + t_{max,s}^n$ . Эффективность использования процессоров падает вследствие следующих причин:

- системы уравнений на грубой сетке решаются на одном процессоре, в то время как остальные процессоры простаивают;
- неравномерное распределение сгущающихся участков по процессорам и различное время решения соответствующих систем уравнений приводит к простаиванию тех процессоров, на которых системы уравнений решаются быстрее.

**5. Заключение.** Разработаны новые алгоритмы для распараллеливания решения задачи трехфазной фильтрации жидкости в трехмерных пластах с большим числом скважин, требующих сгущения сетки в прискважинных зонах. Распараллеливание сеточной системы уравнений для давления основано на новом типе согласования решений для сгущающихся участков с решением на грубой сетке. Согласование достигается за счет введения дополнительных грубых сеток на сгущающихся участках. Распараллеливание сеточной системы уравнений для насыщенностей основано на независимом решении уравнений на сгущающихся участках по неявным схемам. Согласование этих решений с решением на грубой сетке достигается за счет использования элементов явной и неявной схем без процедуры “предиктор-корректор”.

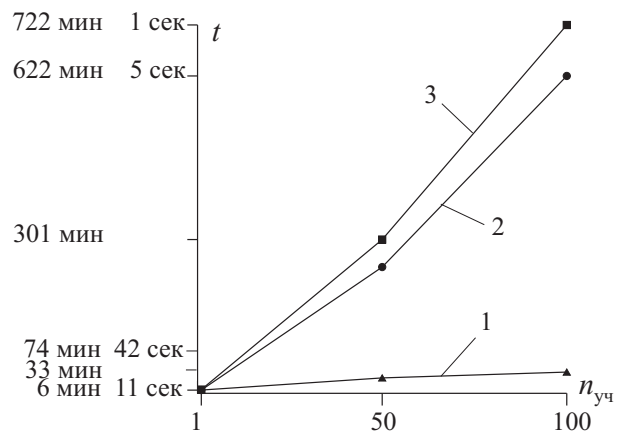


Рис. 3. Расчетное время решения задачи с разделением области по давлению и насыщенности

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мазуров П.А., Цепяев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками // Вычислительные методы и программирование. 2006. **7**, № 2. 115–122.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
3. Beckie R., Wood E.F., Aldama A.A. Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique // Water Resour. Res. 1993. **26**, N 9. 3145–3157.
4. Feng X. A non-overlapping domain decomposition method for solving elliptic problems by a finite element method // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 222–229.
5. Gander M.J., Golub G.H. A non-overlapping optimized Schwarz method which converges with arbitrarily weak dependence on  $h$  // Proc. of the 14th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Coyoac (Mexico), 2002. 281–288.
6. Марчук Г.Е. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
7. Gai Z., Parashkevov R.R., Russel T.F., Ye X. Overlapping domain decomposition for a mixed finite element method in three dimensions // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 188–196.
8. Gastaldi F., Gastaldi L., Quarteroni A. ADN and ARN domain decomposition methods for solving advection–diffusion equations // Proc. of the 9th International Symposiums on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Ullensvang (Norway), 1996. 334–341.
9. Мазуров П.А., Цепяев А.В. К решению задач фильтрации несжимаемой жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Матем. моделирование. 2002. **14**, № 9. 121–123.
10. Мазуров П.А., Цепяев А.В. Метод суперпозиции для решения задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Современные проблемы гидрогеологии и гидрогеомеханики. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 471–476.
11. Мазуров П.А., Цепяев А.В. Метод решения нелинейных задач фильтрации жидкости в трехмерных пластах с гидродинамически несовершенными скважинами // Матем. моделирование. 2004. **16**, № 3. 33–42.
12. Мазуров П.А., Цепяев А.В. Решение трехмерных задач фильтрации жидкости на МВС-1000/16 на сетках со сгущающимися участками // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Казань: ИММ КазНЦ РАН, 2004. 45–56.
13. Губайдуллин Д.А., Мазуров П.А., Цепяев А.В. Алгоритм решения трехмерных задач напорно-безнапорной стационарной фильтрации жидкости со сгущающимися участками сетки // Вычислительные методы и программирование. 2005. **6**, № 2. 94–102.
14. Bastian P. Numerical Computation of Multiphase Flows in Porous Media. Habilitation Thesis, University of Kiel. Kiel, 1999.
15. Hill M.C. Solving groundwater flow problems by conjugate-gradient methods and the strongly implicit procedure // Water Resour. Res. 1990. **26**, N 9. 1961–1969.
16. Larabi A., DeSmedt F. Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods // Water Resour. Res. 1994. **30**, N 2. 509–521.
17. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию  
13.10.2007