

УДК 517.958:532

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕВЯЗКОГО ГАЗА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННОЙ СЕТКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Н. М. Евстигнеев<sup>1</sup>

Предложен численный метод интегрирования трехмерных уравнений невязкого сжимаемого газа на неструктурированной сетке тетраэдров для геометрии любой сложности в случаях дозвукового, трансзвукового и сверхзвукового потоков, а также внешнего и внутреннего обтекания. Численная схема интегрирования по пространству основана на методе конечного объема с решением задачи Римана с помощью модифицированной схемы типа E-CUSP. Для пространственной аппроксимации повышенной точности используется TVD-подход с ограничителями. Для ускорения расчета использована идея создания распределенной вычислительной среды на основе относительно дешевых персональных компьютеров. Выполнено сопоставление численного расчета и эксперимента для крылового профиля. Численный метод показал достаточную универсальность и гибкость и может быть применен для решения сложных задач внутренней и внешней аэродинамики.

**Ключевые слова:** трехмерные уравнения Эйлера, распределенные вычисления, неструктурированные сетки, задача Римана, невязкий газ, метод конечных объемов, параллельные вычисления.

**1. Введение.** При решении прикладных задач аэрогидродинамики в настоящее время все чаще применяются численные методы математического моделирования. При этом прикладные задачи предъявляют ряд жестких требований к численным методам, а именно: достаточная точность расчета, минимальное время выполнения расчета, хорошая аппроксимация сложной геометрии и точное выделение особенностей течения. В настоящей статье для решения прикладных задач аэродинамики в приближении невязкого газа предлагается численный метод, отвечающий этим требованиям и позволяющий использовать объединенные в сеть персональные компьютеры для решения ресурсоемких задач со сложной геометрией.

**2. Исходные уравнения.** Рассматривается интегральная форма уравнений Эйлера, которая является следствием законов сохранения для сжимаемого невязкого газа с учетом внешних сил в ограниченной произвольной области без учета сил трения. Уравнения записываются в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} dV + \oint_{\partial\Omega} F(Q) n dS = F_s, \quad (1)$$

где первый член уравнения (изменение по времени) интегрируется по объему замкнутой ограниченной области  $\Omega$ , а второй член уравнения (конвективная часть) интегрируется по границе области  $\Omega$ . Таким образом, уравнение (1) представляет собой систему из пяти уравнений, выражающих законы сохранения массы, количества движения и энергии. Переменные в (1) записываются в виде  $Q = |\rho; \rho u; \rho v; \rho w; \rho e|^T$ ,  $F(Q) n = |\rho V; \rho u V + n_x P; \rho v V + n_y P; \rho w V + n_z P; V(\rho e + P)|^T$  и  $F_s = |0; H_x \mathbf{g}; H_y \mathbf{g}; H_z \mathbf{g}; 0|^T$ . Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $e$  — плотность, декартовы компоненты скорости и внутренняя энергия соответственно,  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  — внешние декартовы единичные нормали к поверхности области  $\Omega$  и  $V = un_x + vn_y + wn_z$ . Пусть  $Re$  — число Рейнольдса, отнесенное к характерному масштабу, и  $M_\infty$  — число Маха натекающего потока. Для замыкания системы используется соотношение идеального газа

$$P = (\gamma - 1) \left( e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right), \quad (2)$$

где  $\gamma = 1.4$  — показатель адиабаты для воздуха.

**3. Дискретизация исходной области расчета.** Для дискретизации области расчета  $\Omega$  используется сетка тетраэдров, представляющая собой связанные объемные фигуры, покрывающие всю область

<sup>1</sup> Институт системного анализа РАН, пр. 60-летия Октября, 9, 117312, Москва; e-mail: EvstigneevNM@yandex.ru

расчета. Для генерации сетки используется алгоритм Делоне [1, 2], позволяющий создавать достаточно равномерно изменяющуюся по объему фигур сетку в случае пространственной адаптации сетки. В областях пограничного слоя в алгоритме учтено уменьшение объема фигур до фиксированного значения на заданную величину. В связи с тем, что в алгоритме используется неструктурированная сетка, возникает возможность адаптации и дискретизации геометрии любой сложности. Пример разбиения произвольной области на систему тетраэдров показан на рис. 1.

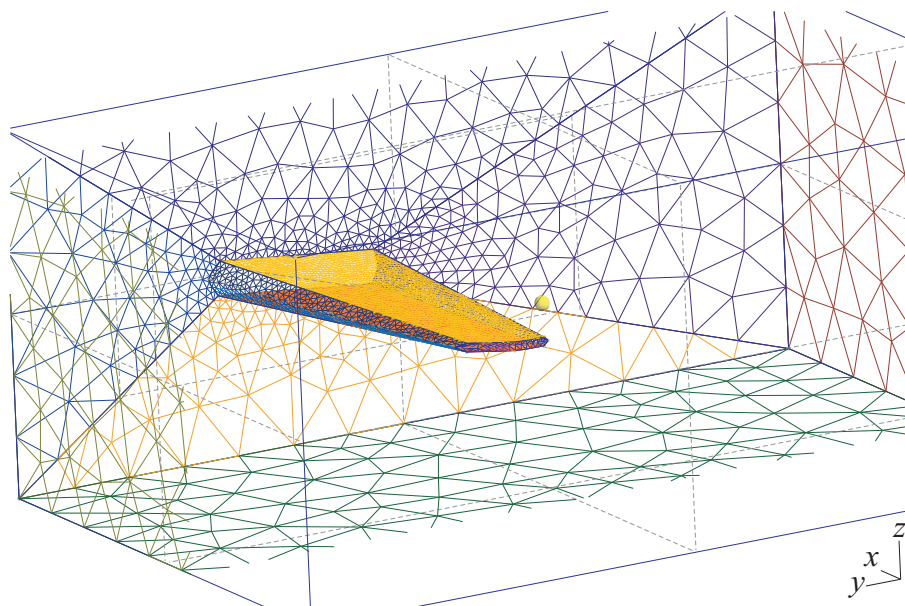


Рис. 1. Пример разбиения произвольной области на систему тетраэдров в задаче обтекания крылового профиля ONERA6 с углом атаки  $\alpha = 3.03^\circ$  и набегающим потоком вдоль оси  $Y$

**4. Пространственная дискретизация невязких членов уравнения.** Уравнения газовой динамики при отсутствии касательных напряжений относятся к нелинейным гиперболическим дифференциальным уравнениям в частных производных. Следовательно, свойства численной схемы для этих уравнений должны полностью соответствовать свойствам самих дифференциальных уравнений — наличие контактных разрывов решения и больших градиентов (ударные волны в газовой динамике) при решении начально-краевой задачи Римана в произвольной области  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
 \rho(x, y, z, t) &= \rho_0(x, y, z, 0), & \rho(x, y, z, t) &= \rho_1(t), \\
 \{u, v, w\}(x, y, z, t) &= \{u_0, v_0, w_0\}(x, y, z, 0), & \{u, v, w\}(x, y, z, t) &= \{u_1, v_1, w_1\}(t), \\
 P(x, y, z, t) &= P_0(x, y, z, 0), & P(x, y, z, t) &= P_1(t).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Здесь функции с индексом “0” зависят только от пространственных переменных, при этом внутренняя энергия вычисляется через уравнение состояния (2); функции с индексом “1” соответствуют граничным условиям и могут являться граничными условиями первого, второго и смешанного типов в зависимости от задачи и учета вязких членов. Комбинация начальных условий в (3) определяет режим течения и значение числа Маха  $M_\infty$ .

Схемы для решения уравнения (1) задачи (3) можно разделить на схемы типа Годунова [3], или схемы точного решения задачи Римана (Exact Riemann Solvers, ERS), и схемы типа Roe, van Leer и др. [4–7], или схемы приближенного решения задачи Римана (Approximate Riemann Solvers, ARS). При решении трехмерной по пространству задачи Римана вида (3) применение численной схемы точного решения задачи Римана приводит к итерационной процедуре, что, в особенности в трехмерном по пространству случае, сильно увеличивает время интегрирования исходных уравнений и увеличивает требования к оперативной памяти компьютера. Кроме того, результаты, получаемые с помощью ARS-методов [6, 8–10], в качественном смысле незначительно отличаются от результатов, получаемых с помощью ERS-методов. Точность областей отрыва потока, сравнение характеристик в различных режимах течения и турбулентные характеристики при DNS-, LES-, DES- и RANS-моделировании практически идентичны [10] для схем ERS и ARS. В настоящее время как в отечественной, так и в зарубежной практике для решения трехмерных по пространству уравнений газовой динамики в основном применяются ARS-методы решения уравнения (1)

с постановкой задачи вида (3) [7].

**4.1. Одномерные уравнения газовой динамики.** Для простоты рассмотрим характеристики одномерного по пространству уравнения Эйлера с начально-краевой задачей (3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dL + \oint_{\partial\Omega} F(Q) dS = 0. \quad (4)$$

Здесь  $Q = |\rho; \rho u; \rho e|^T$  и  $F(Q) = |\rho u; (\rho u^2 + P); u(\rho e + P)|^T$ . Якобиан уравнения (3) имеет вид

$$A = \frac{\partial F(Q)}{\partial Q} = T \Lambda T^{-1}, \quad (5)$$

где:  $T = \begin{bmatrix} 1 & \rho/2c & -\rho/2c \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \rho c/2 & -\rho c/2 \end{bmatrix}$ ,  $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & 1 & 1/\rho c \\ 0 & 1 & -1/\rho c \end{bmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{bmatrix}$  — собственные значения якоби-

ана (5) и  $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$  — скорость распространения возмущений для идеального газа. Таким образом,

$$F(Q) = T \Lambda T^{-1} Q. \quad (6)$$

Схемы типа Рое [4], Русанова [10] и др. непосредственно основаны на соотношении (6) без разделения распространения акустических и кинематических волн, что вносит матричную схемную вязкость при расчете как дозвукового, так и сверхзвукового режимов [4].

Будем рассматривать другое разложение вида (6), в котором отдельно рассматриваются акустические и кинематические волны:

$$F(Q) = T \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} T^{-1} Q + T \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} T^{-1} Q = F_c + F_P. \quad (7)$$

Здесь  $F_c = u|\rho; \rho u; \rho e|^T$  и  $F_P = |0; P; P u|^T$  — векторы, разделяющие собственные значения якобиана (5) на кинематические ( $F_c$ ) и акустические ( $F_P$ ) составляющие вида  $[u; u; u]^T$  и  $[c; 0; -c]^T$  соответственно.

На основе такого разложения строятся схемы со скалярной схемной вязкостью, называемые схемами CUSP (Convective Upwind and Split Pressure) и отличающиеся меньшей схемной вязкостью и большей точностью при анализе разрывных решений и решений, в которых возникают большие градиенты.

Рассмотрим схему вида E-CUSP (в этой схеме рассматривается полная энергия, а не энтальпия, когда схема называется H-CUSP [11]) для уравнения (4). Численная схема метода конечного объема для (4) запишется в форме

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n = -C(F_{i+1/2}^{n+\theta} - F_{i-1/2}^{n+\theta}), \quad (8)$$

где  $C = \Delta t/dL$ ,  $\Delta t$  — шаг по времени (значение выбирается по критерию CFL (Куранта–Фридрихса–Леви)),  $n$  — слой интегрирования по времени и  $\theta = \{0; 1\}$  — параметр, определяющий тип интегрирования по времени (при  $\theta = 0$  схема явная, при  $\theta = 1$  схема неявная). Значение потоков  $F$  на гранях конечного объема, в соответствии с (7), вычисляется как противопоточная схема для  $F_c$  и как взвешенное значение для  $F_P$ :

$$F_{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (F_L^C + F_R^C) - [(|u|Q)_R - (|u|Q)_L] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ P(1+M) \\ P(u+c) \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} 0 \\ P(1-M) \\ P(u-c) \end{pmatrix}_R \right\}. \quad (9)$$

Здесь индексы  $L$  и  $R$  обозначают значения потоков и переменных справа и слева от точки расчета с индексом  $1/2$  и  $M = u/c$  — число Маха. Впервые данная схема была предложена в [11]. В случае сверхзвукового потока, когда все собственные значения матрицы (7) становятся положительными, схема меняется на полностью противопоточную.

В результате численного решения ряда тестовых задач с применением явной и неявной схем были обнаружены осцилляции решения при трансзвуковом режиме. Для их устранения вводится нелинейная

схемная вязкость, аналогичная схеме AUSMD [12, 13], что обеспечивает точное выполнение балансовых соотношений потоков в (8). Окончательно численная схема для потока  $F$  на гранях конечного объема для дозвукового течения выглядит следующим образом:

$$F_{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (\rho u)_{1/2} (q_L^C + q_R^C) - |\rho u|_{1/2} (q_L^C - q_R^C) \right\} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Xi^+ P \\ 0.25 a_{1/2} P (M + 1)^2 \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} 0 \\ \Xi^- P \\ 0.25 a_{1/2} P (M - 1)^2 \end{pmatrix}_R. \quad (10)$$

Здесь  $(\rho u)_{1/2} = (\rho_L u^+ + \rho_R u^-)$  — среднее значение потока массы;  $q = |q; u; e|^T$  — вектор переменных;  $u^\pm = c_{1/2} \left\{ \frac{M_{L/R} \pm |M_{L/R}|}{2} + \alpha_{L/R} \left[ \pm 0.25 (M_{L/R} \pm 1)^2 - \frac{M_{L/R} \pm |M_{L/R}|}{2} \right] \right\}$  — осредненная по скорости звука скорость на гранях объема, взятая в соответствии с [12];  $c_{1/2} = 0.5(c_L + c_R)$ ;  $M_L = \frac{u_L}{c_{1/2}}$ ;  $M_R = \frac{u_R}{c_{1/2}}$ ;

$\alpha_{L/R} = \frac{2(h/\rho)_{L/R}}{(h/\rho)_L + (h/\rho)_R}$ , где  $h$  — энтальпия;  $\Xi^\pm = 0.25(M \pm 1)^2(2 \mp M) \pm \beta M(M^2 - 1)^2$  — параметр схемной вязкости, отвечающий за распространение акустических волн в уравнении сохранения количества движения, в соответствии с [14];  $\beta \cong 3/16$  — рекомендуемый параметр [14]. В отличие от других CUSP-схем для вычисления давления в уравнении сохранения полной энергии используется нелинейное осреднение с целью уменьшения схемной вязкости в акустической части уравнения. Для сверхзвукового режима течения поток на грани объема вычисляется по полностью противопоточной схеме.

Таким образом, полученная схема сконструирована из трех схем (E-CUSP [11], AUSMD [12, 13] и схемы van Leer [5]) с целью минимизировать схемную вязкость и получить безосцилляционные решения с возможностью свободного распространения на трехмерный случай без увеличения вычислительных затрат.

В соответствии с (8) и (10) одномерная численная схема тестировалась как по явной, так и неявной схемам расчета по времени; кроме того, вычисление потоков на гранях конечного объема выполнялось как с первым, так и с третьим порядком аппроксимации по пространственной переменной. Для вычисления потоков на гранях объема при повышенном порядке аппроксимации использовалась нелинейная схема с ограничителем SuperBee (см. раздел 4.4 и [15]). Результаты расчетов показаны на рис. 2 и 3 для условий задачи Римана из табл. 1 (начальные значения и точные решения взяты из [16]).

Таблица 1

Значения переменных задачи Римана

Левая часть разрыва			Правая часть разрыва			место разрыва	время интегрирования
$\rho_1$	$u_1$	$P_1$	$\rho_2$	$u_2$	$P_2$	$x_0$	$t_k$
1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
1	-19.597545	1000	1	-19.597545	0.01	0.8	0.012

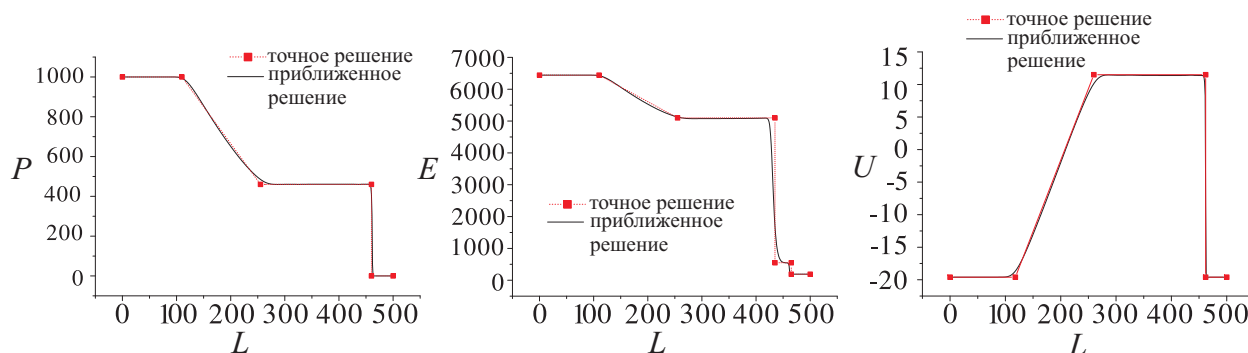


Рис. 2. Сопоставление аналитического и численного решений задачи Римана (вторая строка табл. 1);  $P$  — давление,  $E$  — полная энергия и  $U$  — скорость

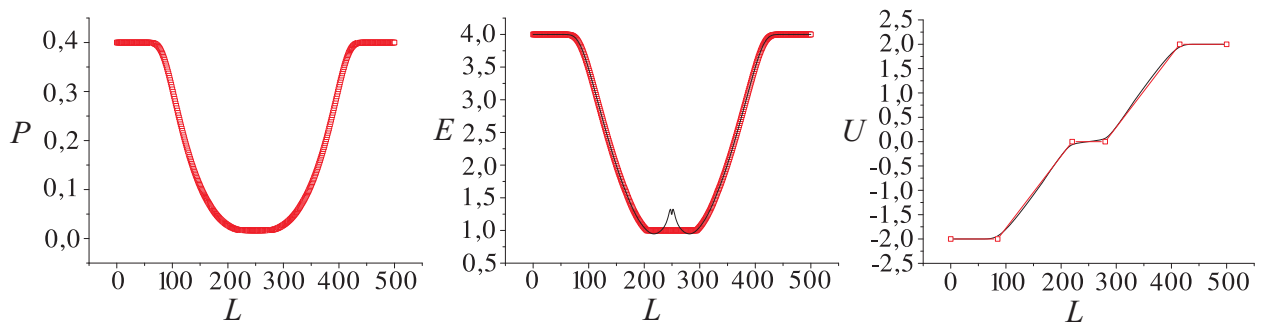


Рис. 3. Сопоставление аналитического и численного решений задачи Римана (первая строка табл. 1);  $P$  — давление,  $E$  — полная энергия и  $U$  — скорость

Из сопоставления результатов следует, что предложенная схема дает хорошие безосцилляционные решения, а ударная волна размывается на одну или две ячейки по пространству.

**4.2. Анализ схемной вязкости предлагаемой схемы.** Для анализа схемной вязкости рассмотрим уравнения (8), в которых потоки на гранях объема вычисляются по схеме (10). При расчете пограничных слоев, когда  $u \rightarrow 0$ , эффекты схемной вязкости могут превосходить реальную вязкость в несколько раз. Поэтому при  $u = 0$  схема должна обладать минимальной схемной вязкостью. Подставив в (10)  $u = 0$  и сгруппировав все члены, не относящиеся к (4), получим схемную вязкость для схемы (10):

$$\mu_{sc} = \frac{1}{4} c_{1/2} [0; 0; (P_R - P_L)]^T. \tag{11}$$

Для схемы Roe [4] схемную вязкость можно оценить следующим образом:

$$\mu_{sc}^{Roe} = \frac{1}{2(\gamma - 1)} \tilde{c}_{1/2} [(\gamma - 1)(\tilde{c}_{1/2}^2 (P_R - P_L)); 0; (P_R - P_L)]^T. \tag{12}$$

Здесь  $\tilde{c}_{1/2}$  — взвешенная по плотности скорость звука (осредненная по Roe [4]). Для воздуха с показателем адиабаты, равным 1.4, схемная вязкость предложенной схемы около пограничного слоя меньше схемной вязкости по схеме Roe в пять раз.

**4.3. Трехмерный случай.** Обобщение схемы (10) на трехмерный случай для интегрирования системы уравнений (1) реализуется методом расщепления по направлениям путем суммирования всех потоков через грани тетраэдра.

Основная трудность заключается в получении аппроксимации повышенного порядка. При расположении неизвестных в центрах тяжести тетраэдров такая аппроксимация выполняется путем разложения переменной в ряд Тейлора в проекции на сторону тетраэдра:

$$Q(x, y, z) = Q(x_e, y_e, z_e) + \nabla Q_e \Delta L + O(\Delta L^2). \tag{13}$$

Здесь  $\Delta L$  — расстояние,  $Q_e$  — значение переменной в центре тетраэдра и  $Q$  — значение переменной на грани тетраэдра.

В настоящей работе используется условие геометрической инвариантности тетраэдра. Рассмотрим тетраэдр, показанный на рис. 4. Отрезки  $Ae$  и  $ef$  соотносятся как  $3/4$  и  $1/4$  от расстояния  $Af$ . Кроме того, прямая линия, проходящая через точку  $A$  и точку  $e$  (центр тяжести тетраэдра), всегда попадает на центр тяжести треугольника на противоположной грани  $B CD$  (точка  $f$ ). Эти соотношения справедливы для любых вершин и сторон тетраэдра.

С учетом рассмотренных свойств тетраэдра градиент переменной в (13) переписывается следующим

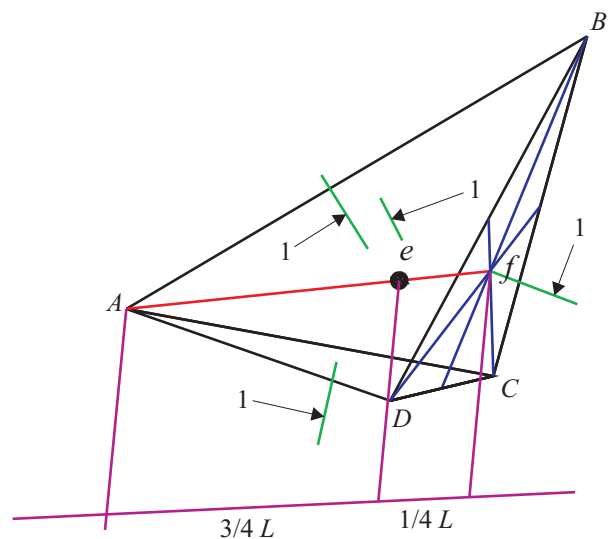


Рис. 4. Тетраэдр неструктурированной сетки конечных объемов. Линии, обозначенные цифрой 1, показывают направления векторов внешней нормали

образом:  $\nabla Q_e \Delta L = \frac{\partial Q}{\partial L} \Delta L \cong \frac{1}{3} \frac{(Q_B + Q_C + Q_D) - Q_A}{4\Delta L} \Delta l$ . Тогда

$$Q_f = Q_e + \frac{1}{4} \left( \frac{Q_B + Q_C + Q_D}{3} - Q_A \right). \tag{14}$$

Выражения для правой и левой частей потока в (10) находятся с учетом (14).

Для расчета значений переменных на сторонах тетраэдра используется среднее значение по всем окружающим точку тетраэдром, взвешенным геометрически:  $Q_N = \left( \sum_{i=1}^M Q_{ei}/L_i \right) / \left( \sum_{i=1}^M 1/L_i \right)$ , где  $N$  — номер вершины рассматриваемого тетраэдра;  $M$  — количество тетраэдров, окружающих данную вершину рассматриваемого тетраэдра;  $Q_{ei}$  — значение переменной в центре тетраэдра, окружающего рассматриваемый;  $L_i$  — расстояние от центра окружающего тетраэдра до вершины рассматриваемого тетраэдра, определяемое как  $L_i = \sqrt{(x_{ei} - x_N)^2 + (y_{ei} - y_N)^2 + (z_{ei} - z_N)^2}$ .

При аппроксимации производных порядком выше первого необходимо использовать ограничители. В данном методе используется подход, получивший название TVD (Total Variation Diminishing).

**4.4. Применение TVD-подхода.** Этот подход в настоящее время является одним из наиболее успешных при получении аппроксимаций повышенного порядка с безосцилляционными решениями [9, 10].

Рассмотрим модельное уравнение переноса  $\frac{\partial Q}{\partial t} = -a \frac{\partial Q}{\partial x}$ , где  $a > 0$  — постоянная величина. Будем считать, что полная вариация решения записывается в виде  $TV(Q_i^n) = \sup \sum_i |Q_{i+1}^n - Q_i^n|$ .

При нахождении корректного решения для уравнения переноса необходимо соблюдение условий монотонности:

- в  $Q(x)$  не могут возникать новые экстремумы,
- значение локальных минимумов не уменьшается, а максимумов — не увеличивается.

Тогда из условий монотонности следует, что полная вариация решения не должна возрастать по времени, т.е.  $TV(Q(t_2)) \leq TV(Q(t_1))$  для всех  $t_2 \geq t_1$ .

В этом и состоит принцип TVD-подхода. Следовательно, схему для модельного уравнения можно представить в виде  $Q^{n+1} = \mathfrak{F} Q^n$ ; отсюда следует, что  $TV(\mathfrak{F} Q^n) \leq TV(Q^n)$  и  $\mathfrak{F} = F(Q)$ , где  $\mathfrak{F}$  — оператор в сеточном пространстве, суммирующий потоки по всем граням тетраэдра.

Запишем производную по пространству в виде центральных разностей  $Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \mathfrak{F} Q^n$  и введем центральный оператор, для которого  $\mathfrak{F} = \Lambda_{i+1/2} - \Lambda_{i-1/2}$ . Тогда для того чтобы решение  $Q$  удовлетворяло принципу TVD, необходимо, чтобы при  $a > 0$  было выполнено

$$\mathfrak{F}(Q) = \begin{cases} \Lambda_i - \Lambda_{i-1}, & \arg \max(Q) \geq \ker \max(Q), \\ \Lambda_{i+1/2} - \Lambda_{i-1/2}, & \arg \max(Q) < \ker \max(Q). \end{cases}$$

Пусть  $B(r)$  — переключатель, обеспечивающий выполнение принципа TVD и являющийся функцией от локального вида решения. Тогда в общем виде с применением антидиффузионного члена можно записать

$$\Lambda_{i-1/2} = \Lambda_{i-1} + \frac{1}{2} B(r) (\Lambda_{i-1} - \Lambda_{i-2}), \quad r = \frac{\Lambda_i - \Lambda_{i-1}}{\Lambda_{i-1} - \Lambda_{i-2}},$$

$$\Lambda_{i+1/2} = \Lambda_i + \frac{1}{2} B(r) (\Lambda_i - \Lambda_{i-1}), \quad r = \frac{\Lambda_{i+1} - \Lambda_i}{\Lambda_i - \Lambda_{i-1}}.$$

Сеточные переменные  $\Lambda$  на гранях и в центре массы тетраэдра находятся в соответствии с (14).

В табл. 2 представлен вид оператора  $B(r)$ , позволяющий выполнять переключения между различными типами схем (названия и обзор схем из [9]).

Проверки ограничителей при конвективном переносе пассивного скаляра и решении невязкого уравнения Бюргера показаны в [9]. В результате выявлено, что наименьшей численной диффузией обладает схема SuperBee, используемая при DNS- и LES-моделировании.

**4.5. Граничные условия.** Граничные условия (3) соответствуют гиперболическому типу уравнений (1). На твердой стенке для скоростей ставятся условия непротекания и проскальзывания. Поскольку для дискретизации потоков применяются аппроксимации повышенного порядка, для постановки условия непротекания используются “призрачные” элементы (ghost cells). Составляющие вектора скорости в призрачных элементах находятся в виде  $u_{gc} = u_{ci} - 2U_i n_x$ ,  $v_{gc} = v_{ci} - 2U_i n_y$  и  $w_{gc} = w_{ci} - 2U_i n_z$ , где

Таблица 2

Линейные схемы	
1.	Противопоточная схема первого порядка: $B(r) = 0$ .
2.	Центральные разности: $B(r) = r$ .
3.	Линейная противопоточная схема: $B(r) = 1$ .
4.	Схема QUICK третьего порядка точности: $B(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} r + \frac{1}{2} \right)$ .
5.	Противопоточная схема Фрома второго порядка точности: $B(r) = 0.5(r + 1)$ .
6.	Кубическая противопоточная схема: $B(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} r + \frac{2}{3} \right)$ .
Нелинейные схемы	
7.	Схема SMART, основанная на QUICK: $B(r) = \max \left( 0, \min \left( 2r, \frac{3}{4} r + \frac{1}{4}, 4 \right) \right)$ .
8.	KOREN: $B(r) = \max \left( 0, \min \left( 2r, \frac{2r}{3} + \frac{1}{3}, 2 \right) \right)$ .
9.	MUSCL: $B(r) = \max \left( 0, \min \left( 2r, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r, 2 \right) \right)$ .
10.	HQUICK с использованием QUICK: $B(r) = \frac{2(r +  r )}{r + 3}$ .
11.	OSPREE: $B(r) = \frac{3(r^2 + r)}{2(r^2 + r + 1)}$ .
12.	VANLH: $B(r) = \frac{r +  r }{r^2 + 1}$ .
13.	VANALB: $B(r) = \frac{r + 1}{r^2 + 1}$ .
14.	MINMOD, ограничитель Колгана: $B(r) = \max(0, \min(r, 1))$ .
15.	SUPBEE SuperBee: $B(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$ .
16.	UMIST QUICK: $B(r) = \max \left( 0, \min \left( 2r, \frac{1}{4} + \frac{3}{4} r, \frac{3}{4} + \frac{1}{4} r, 2 \right) \right)$ .
17.	HCUS: $B(r) = \frac{1.5(r +  r )}{r + 2}$ .
18.	CHARM QUICK: $B(r) = \frac{2r(3r + 1)}{(r + 1)}$ при $r > 0$ и $B(r) = 0$ при $r \leq 0$ .

$U_i = u_{ci}n_x + v_{ci}n_y + w_{ci}n_z$ ; индекс “с” относится к центру тяжести тетраэдра, прилегающего к призрачному. Давление и плотность равны значениям в прилегающих элементах.

На входных и выходных границах ставятся условия, отвечающие распространению характеристик системы (1); эти условия определяются заданием или экстраполяцией инвариантов Римана. Входные граничные условия определяются заданием характеристик на входе и расчетом инварианта Римана на входе. Выходные граничные условия зависят от скорости потока (дозвуковые или сверхзвуковые характеристики). Определив характеристики на выходе, мы находим нормальную компоненту скорости и плотность газа. Давление и тангенциальные составляющие определяются граничным условием типа Неймана. Процедура нахождения инвариантов Римана на границах потока детально описана в [23].

**5. Интегрирование по времени.** Для интегрирования по времени используются два метода: неявный метод Эйлера первого порядка и явный  $m$ -стадийный метод Рунге–Кутты. Перепишем уравнение (1) в форме

$$V_i \frac{Q^{n+1} - Q^{n+\delta}}{\Delta t} \iint_{\partial V} F(Q)^{n+\sigma} n dS = F_s^{n+\sigma}, \quad (15)$$

где  $n$  — шаг по времени,  $V$  — объем  $i$ -го тетраэдра,  $\sigma$  — параметр, определяющий тип схемы интегрирования по времени и стадийность схемы, и  $\delta$  — параметр, определяющий стадийность схемы.

**5.1. Неявный метод интегрирования по времени.** Для неявного метода Эйлера в уравнении (15)



имеем  $\sigma = 1$  и  $\delta = 0$ . Тогда уравнение (15) в матричной форме переписывается в виде

$$[A] [Q] = [B], \tag{16}$$

где  $[Q] = [Q]^{n+1} - [Q]^n$ ,  $[B]$  — вектор известных величин с предыдущего шага по времени и граничных условий и  $[A]$  — матрица коэффициентов. Матрица  $[A]$  имеет вид, показанный на рис. 5, где точками изображены ненулевые элементы для уравнений неразрывности.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений с матрицей, структура которой показана на рис. 5, используются итерационные методы. Для решения системы (16) реализованы метод Гаусса–Зейделя и метод GMRES [17].

При нахождении стационарного решения шаг по времени выбирается наибольшим из условий соблюдения требуемой точности. При вычислении нестационарного решения шаг по времени выбирается так, чтобы

$$\Delta t \leq \text{CFL} \max \left[ \frac{V_i}{A_i + B_i + C_i} \right]_{i=1}^N. \tag{17}$$

Здесь  $A_i = (|u_1| + c_i)S_i n_x$ ,  $B_i = (|v_1| + c_i)S_i n_y$ ,  $C_i = (|w_1| + c_i)S_i n_z$ ,  $i$  — номер тетраэдра,  $N$  — общее количество тетраэдров и CFL — число Куранта–Фридрихса–Леви. Для неявной схемы рекомендуется выбирать число CFL в пределах 3–5 [18].

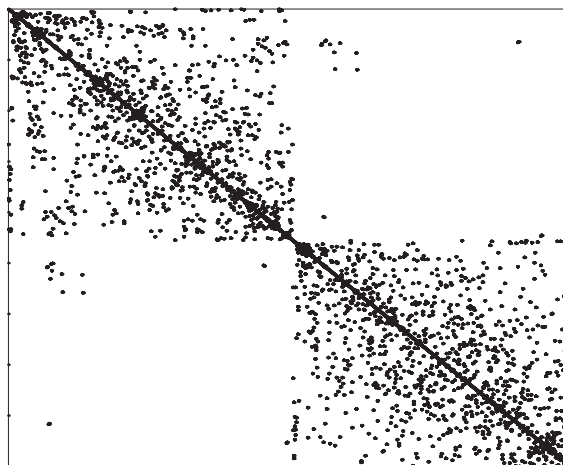


Рис. 5. Структура матрицы уравнения неразрывности (точки — ненулевые элементы)

**5.2. Явный метод интегрирования по времени.**

Для получения более точного решения используется явный  $m$ -стадийный метод Рунге–Кутты, зарекомендовавший себя как метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с большим запасом устойчивости [18]. Уравнение (15) переписывается в форме

$$Q_i^{(0)} = Q_i^n, \quad Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - \alpha_1 \frac{\Delta t}{V_i} \left[ \sum_{j=k(i)} F(Q)_j n_j \Delta S_j \right]^{(0)}, \dots, \tag{18}$$

$$Q_i^{(m)} = Q_i^{(0)} - \alpha_m \frac{\Delta t}{V_i} \left[ \sum_{j=k(i)} F(Q)_j n_j \Delta S_j \right]^{(m-1)}, \quad Q^{(n+1)} = Q^{(m)},$$

где  $m$  — стадия цикла,  $k(i)$  — сторона  $k$   $i$ -го тетраэдра и  $\alpha_i$  — коэффициент веса шага, определяемый по правилу

$$\alpha_i = \frac{1}{m - l + 1}; \quad l = 1, \dots, m. \tag{19}$$

Для сравнения результатов был использован четырехстадийный метод Рунге–Кутты, т.е.  $m = 4$ , поскольку дальнейшее увеличение точности незначительно сказывается на результатах, а затраты компьютерного времени и ресурсов возрастают линейно.

Для расчета нестационарных уравнений значение CFL выбирается в пределах 0.95–1.0.

При получении стационарного решения шаг по времени определяется аналогично выражению (17), при этом число CFL определяется на основе метода локального ускорения шага и для каждого тетраэдра устанавливается свой шаг по времени в соответствии с критерием

$$\Delta t \leq \text{CFL} \frac{V_i}{A_i + B_i + C_i}. \tag{20}$$

Здесь число CFL выбирается на основе экспериментальных расчетов (но не больше 1) и в данном случае принимается равным 0.9.

**6. Распределенное вычисление на основе сети TCP-IP.** В связи с тем, что рассмотренный метод применяется для решения задач с большим объемом вычислений (сложная геометрия и высокая точность), необходимо использовать машины большой мощности с большим объемом памяти. Автором



статьи предложен способ, позволяющий объединить пользовательскую сеть на основе технологии TCP-IP на базе персональных компьютеров в вычислительную распределенную среду [19].

Алгоритм основан на разделении геометрической области решения на отдельные части с перекрестными граничными тетраэдрами в зависимости от количества используемых компьютеров в сети. На каждый компьютер устанавливается программа расчета и файл, содержащий геометрию. Для каждого компьютера определена область расчета (может меняться в зависимости от производительности каждого компьютера, входящего в сеть, и густоты адаптивной сетки). Каждый блок программы является клиент-серверным приложением. Таким образом, сеть персональных компьютеров объединяется в кольцевую структуру (рис. 6), при этом по окончании расчета все данные пересылаются на один компьютер, входящий в сеть. Через сеть с двух соседних компьютеров пересылаются данные только о приграничных тетраэдрах, необходимые для нахождения решения; номера тетраэдров в общей геометрии, необходимых для пересылки, определяются на стадии подготовки файла сетки, что позволяет свести к минимуму затраты при решении уравнений.

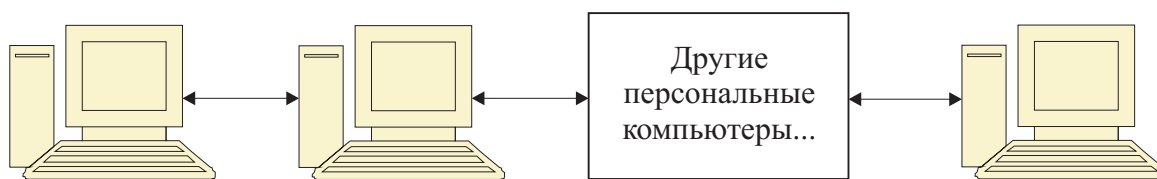


Рис. 6. Пример организации расчетной среды распределенного вычисления

В настоящий момент реализован только явный метод Рунге–Кутты интегрирования по времени, описанный выше.

Сравнение производительности и ускорения счета выполнено при расчете задачи трансзвукового обтекания крыла профиля ONERA6 (рис. 1). Сетка состояла из 701 434 тетраэдров. Вычислительная среда была организована на базе четырех компьютеров: AMD Athlon 64 X2 5200+ 4Gb RAM, двух AMD XP 2000+ 2Gb RAM и ноутбука Intel Centrino 2.2GHz 1.5Gb RAM, объединенных в сеть TCP-IP 100Mbit на базе Windows XP. График ускорения расчета показан на рис. 7.

**7. Некоторые результаты расчетов.** Рассмотрим результаты решения трехмерной задачи обтекания крыла (профиль ONERA6) с помощью предлагаемого численного метода. Данный крыловой профиль довольно часто используется для сравнения с экспериментальными данными в зарубежной литературе [21], так как предполагает наличие трансзвуковых режимов течения. Угол выпускной кромки крыла составляет  $30^\circ$ , характеристическое отношение равно 3.8, конусность равна 0.56, профиль симметричный [20]. Геометрия крыла показана на рис. 1.

На рис. 8 иллюстрируется сопоставление коэффициента давления  $C_p$ , взятого из эксперимента [20], с численными результатами расчета при  $M_\infty = 0.84$  и угле атаки, равном  $3.06^\circ$ . Здесь  $C_p = \frac{2(P - P_\infty)}{\rho V_\infty^2}$ , где  $P$  — текущее давление в точке, а  $P_\infty$  и  $V_\infty$  — давление и скорость набегающего потока. Из этого рисунка следует хорошее согласие между численным расчетом и экспериментом. Как экспериментальные результаты, так и результаты численного расчета показывают возникновение ударной волны, сопровождающееся резким падением значения  $C_p$ . Аналогичные результаты получены и при численном моделировании в [21].

На рис. 9 и 10 иллюстрируется общая картина обтекания крылового профиля — распределение давления и значений числа Маха при  $M_\infty = 0.84$  и  $\alpha = 3.06^\circ$  для «штатного» режима. Кроме анализа «штатных» режимов работы крыла рассмотрен режим взлета при  $M_\infty = 0.5$  и угле атаки, равном  $30^\circ$  (см. рис. 11 и 12). Четко прослеживается срывной характер обтекания крыла (на рис. 12) и повышенное давление на

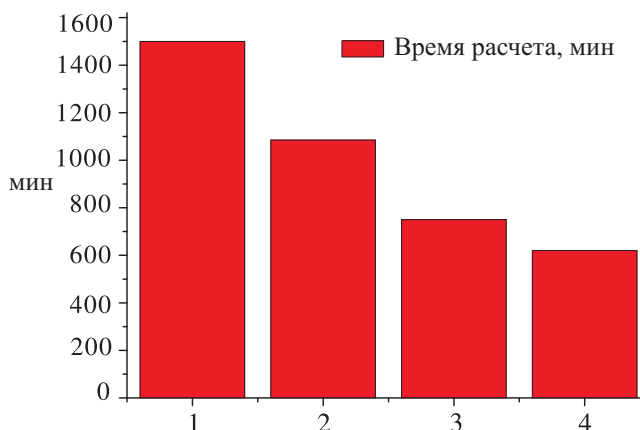


Рис. 7. Время расчета в зависимости от количества компьютеров, объединенных в сеть TCP-IP 100Mbit при распределенных вычислениях: 1 — AMD Athlon 64 X2 5200+ 4Gb RAM; 2 — 1 + AMD XP 2000+ 2Gb RAM; 3 — 2 + AMD XP 2000+ 1Gb; 4 — 3 + Intel Centrino 2.2GHz 1.5Gb RAM

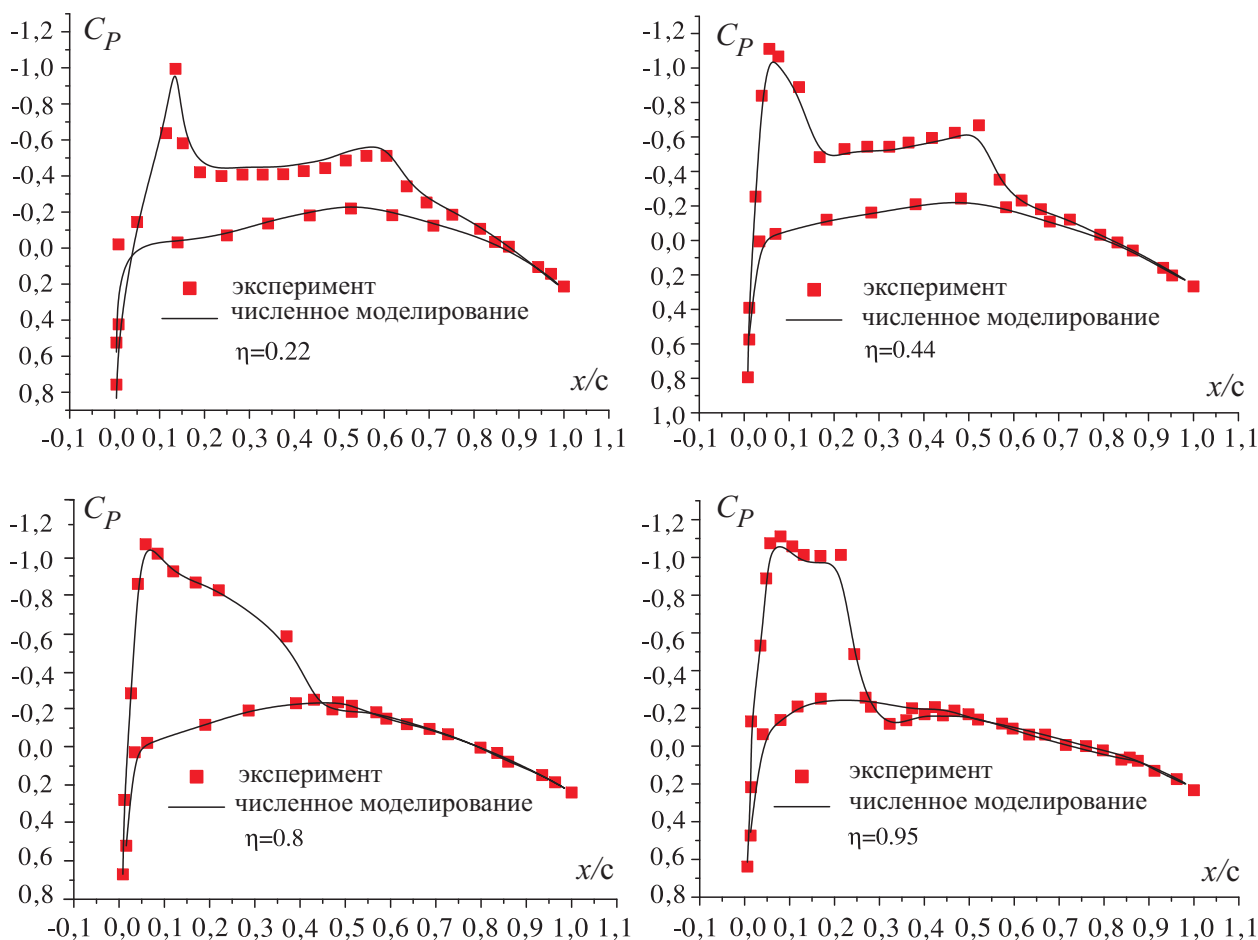


Рис. 8. Сравнение значений  $C_p$  в сечении хорды крыла, полученных во время эксперимента [20], с численным расчетом при  $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.06^\circ$

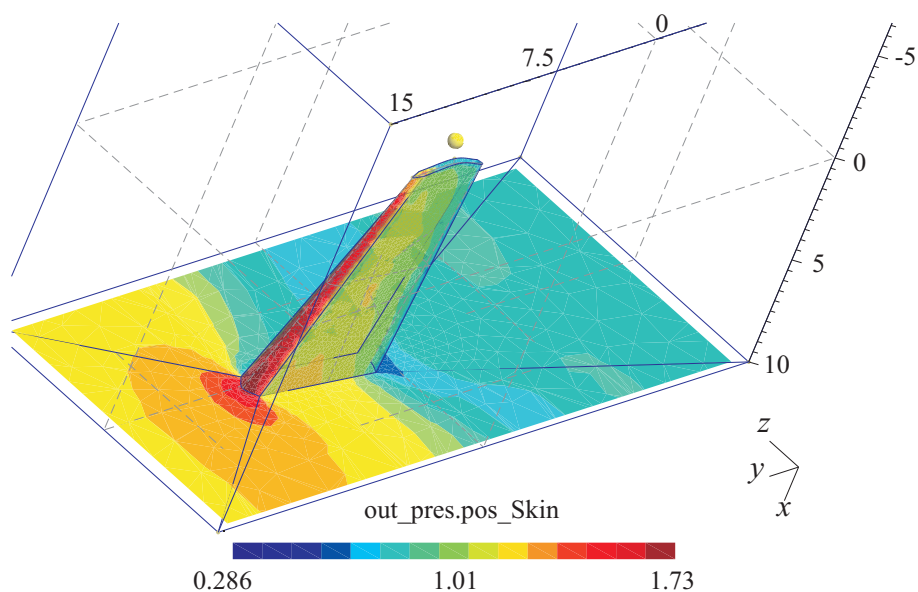


Рис. 9. “Штатные” режимы работы крыла. Распределение давления при  $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.06^\circ$

нижней кромке. К сожалению, для данного режима эксперименты не проводились.

На рис. 13 показан центральный срез изоплощестей давления при обтекании половины сечения крыла гиперзвуковым потоком в твердых стенках с натекающим числом маха  $M_\infty = 3$ . Видно симметричное

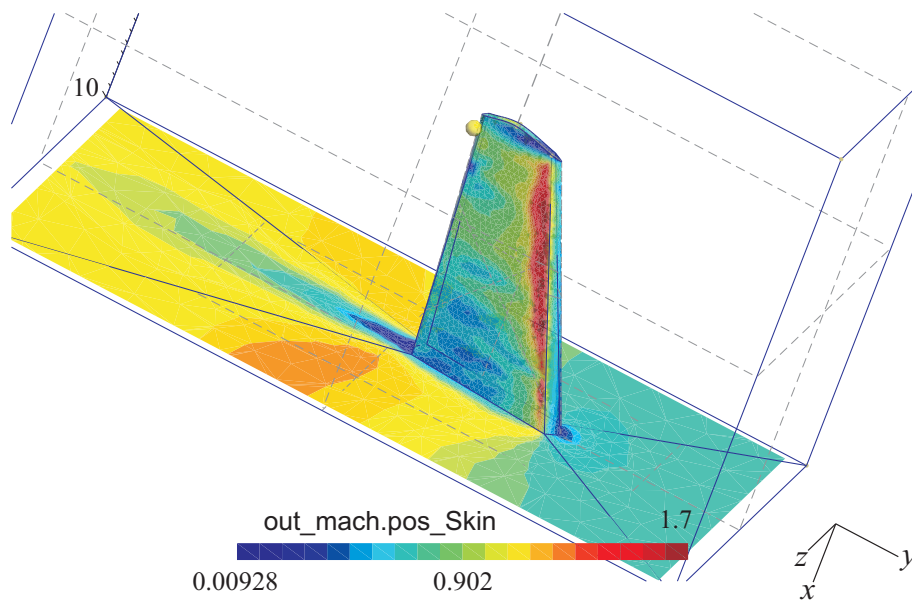


Рис. 10. “Штатные” режимы работы крыла. Распределение значений числа Маха при  $M_\infty = 0.84$ ,  $\alpha = 3.06^\circ$

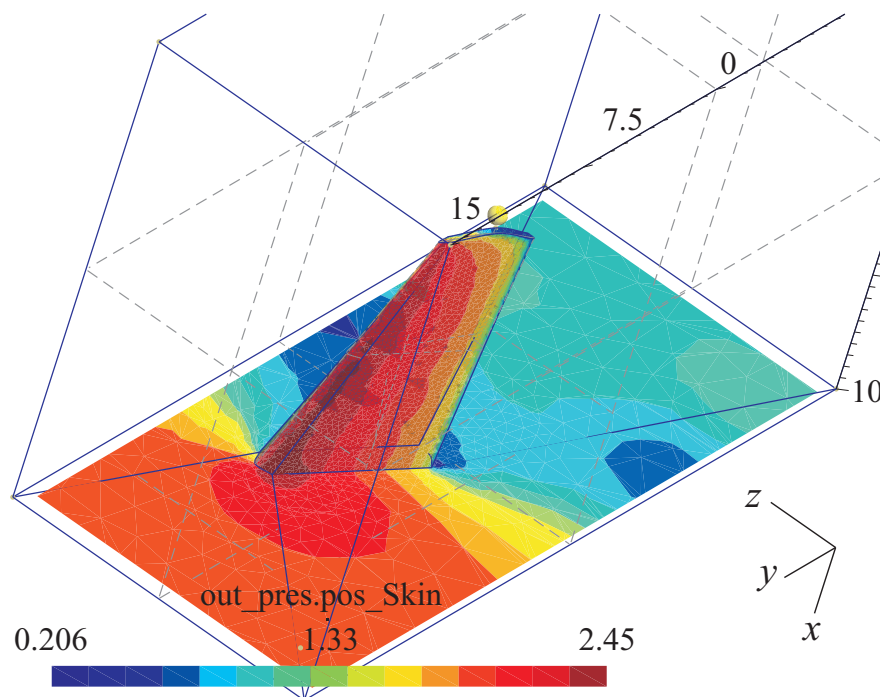


Рис. 11. Режим взлета. Распределение давления при  $M_\infty = 0.5$ ,  $\alpha = 30^\circ$

отражение ударной волны от канала, что соответствует теории [22].

**8. Заключение.** Рассмотрен численный метод интегрирования трехмерных уравнений невязкого сжимаемого газа на неструктурированной сетке тетраэдров для геометрии любой сложности в случаях дозвукового, трансзвукового и сверхзвукового потоков, а также внешнего и внутреннего обтекания.

Численная схема интегрирования по пространству основана на методе конечного объема с решением задачи Римана с помощью модифицированной схемы типа E-CUSP. Анализ схемы показал ее достаточную точность при сопоставлении с аналитическими решениями в одномерном случае, низкую схемную вязкость и возможность обобщения на пространственный случай.

Для построения пространственной аппроксимации повышенного порядка используется TVD-подход с ограничителями.

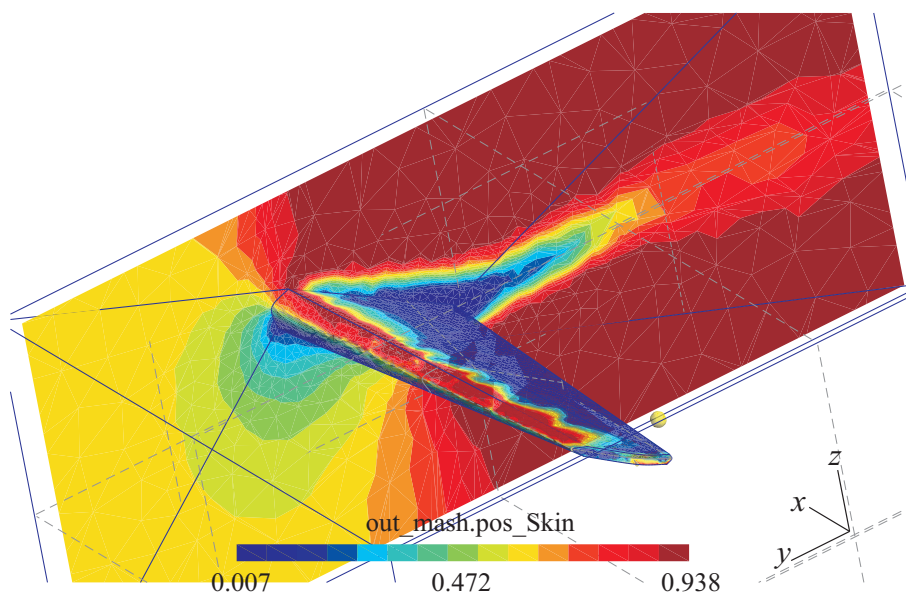


Рис. 12. Режим взлета. Распределение значений числа Маха при  $M_\infty = 0.5$ ,  $\alpha = 30^\circ$

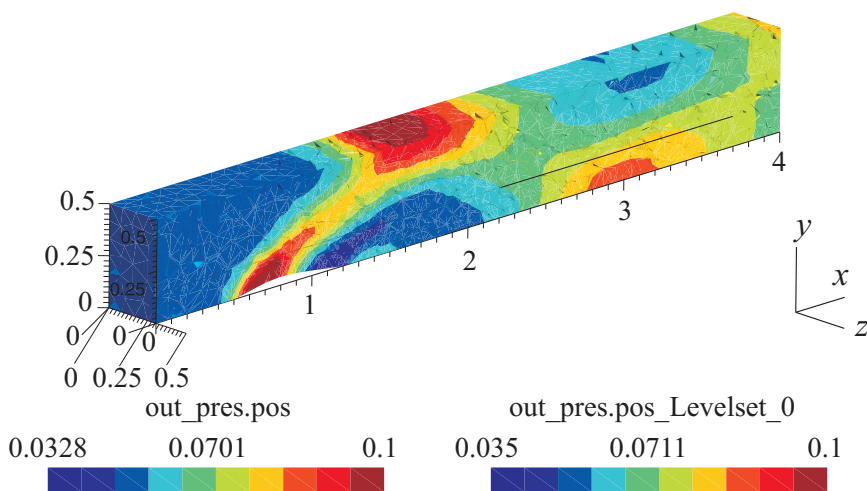


Рис. 13. Центральный срез изоплоскостей давления с натекающим числом маха  $M_\infty = 3$

Для ускорения расчета использована идея создания распределенной вычислительной среды на основе относительно дешевых персональных компьютеров. Таким образом, решается задача нехватки финансирования и использования персональных компьютеров, имеющих в избытке практически в любой организации.

Сопоставление трехмерных решений с экспериментом для крыла ONERA6 при транс- и дозвуковом обтекании показали хорошее совпадение с результатами экспериментов, имеющимися в литературе.

В целом, численный метод, изложенный в настоящей статье, успешно применяется при решении различных задач. В настоящее время выполнено обобщение метода на случай решения уравнений вязкого сжимаемого газа и вязкой несжимаемой жидкости. Полученные результаты готовятся к публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Signoni P., Montani C., Scopigno R.* DeWall: A fast divide & conquer Delaunay triangulation algorithm in  $E^d$  // Computer J. 2006. **19**, N 2. 178–181.
2. *Su P., Drysdale R.L.S.* A comparison of sequential Delaunay triangulation algorithms // Proc. 11th ACM Computational Geometry Conf. (Vancouver, Canada). New York: ACM Press, 1995. 61–70.
3. *Годунов С.К.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. *Roe P.L.* Characteristic based schemes for the Euler equations // Annual Review of Fluid Mechanics. 1986. **18**. 337–365.

5. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme // *J. of Computational Physics*. 1977. **23**. 263–275.
6. *Billson M., Eriksson L.-E., Davidson L.* Acoustics source terms for the linear Euler equations in conservative form // *AIAA Paper*, 2002-2582. 2002.
7. *Toro E.* A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws // *Proc. Royal Soc. London A*. 1989. **423**. 401–418.
8. *Zha G.-C.* A low diffusion efficient upwind scheme // *AIAA Journal*. 2005. **43**. 1137–1140.
9. *Chunlei L., Evstigneev N.* A study of kinetic energy conserving scheme using finite volume collocated grid for LES of a channel flow // *Proc. Int. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*. King's College. London, 2006.
10. *Русанов В.В.* Существование предельного профиля типа ударной волны для TVD-схем. Препринт № 177 ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. М., 1986.
11. *Zha G.-C.* Calculation of transonic internal flows using an efficient high resolution upwind scheme // *AIAA Paper*, 2006-257. 2006.
12. *Wada Y., Liou M.-S.* An accurate and robust splitting scheme for shock and contact discontinuities // *AIAA Paper*, 1994-0083. 1994.
13. *Liou M.-S.* Progress towards an improved CFD methods: AUSM+ // *AIAA Paper*, 1995-1701-CP. 1995.
14. *Edwards J. R.* A low-diffusion flux-splitting scheme for Navier–Stokes calculations // *Computer & Fluids*. 1997. **6**. 635–659.
15. *Евстигнеев Н.М.* Решение задачи о течении несжимаемой жидкости в каверне с движущейся крышкой конечно-объемным методом интегрирования уравнений Навье–Стокса // *Естественные и технические науки*. 2005. № 1. 254–277.
16. *Sod G.* A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // *J. of Computational Physics*. 1978. **27**. 1–31.
17. *Баландин М.Ю., Шурина Э.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: НГУ, 2000.
18. *Ваннер Г., Нерсетт С., Хайпер Э.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1990.
19. *Evstigneev N.* Parallel numerical method for incompressible 3D Euler equations on unstructured mesh for TCP/IP PC LAN // *Proc. 4th Int. Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics*. Von Karman Institute, Germany. 2007 (принята в печать).
20. *Schmitt V., Charpin F.* Pressure distributions on the ONERA M6-wing at transonic Mach number // *AGARD Advisory Report* 138. 1979.
21. *Frink N.T.* Upwind scheme for solving the Euler equations on unstructured tetrahedral meshes // *Presentation at workshop on Accuracy of Unstructured Grid Techniques held at NASA Langley Research Center*. 16–17 Jan. 1999.
22. *Steinhoff J., Fan M., Wang L.* A new Eulerian method for the computation of propagating short acoustic and electromagnetic pulses // *J. of Computational Physics*. 2000. **157**, N 2. 683–706.
23. *Anderson W.K.* Grid generation and flow solution method for Euler equations on unstructured grid // *J. of Computational Physics*. 1994. **110**, N 1. 23–38.

Поступила в редакцию  
03.09.2007

---