УДК 519.633:517.977.1

О ДВУХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОЕ МНОГООБРАЗИЕ

С. В. Милютин[1], Е. В. Чижонков[1]

При численной стабилизации с помощью граничных условий решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными важную роль играют методы проектирования на устойчивые инвариантные многообразия. В работе рассматриваются два различных способа проектирования (метод нулевого приближения и метод линеаризации), отличающиеся в нелинейном случае направлениями смещений. Для обоих методов приводятся и анализируются численные эксперименты по стабилизации решений уравнений Чафе–Инфанта. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05–01–00511).

Ключевые слова: стабилизация, неустойчивые решения, граничные условия, уравнения в частных производных, проектирование на устойчивое многообразие.

1. Введение. Задача приближенного проектирования на устойчивое инвариантное многообразие в окрестности неподвижной точки имеет много практических приложений. Например, при численном решении сложных нестационарных задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, возникает проблема стабилизации искомого стационарного решения (экспоненциального подавления возмущений в некоторой его окрестности). Если стационарное решение неустойчиво, то сложность стабилизации возрастает многократно. Однако известно [1], что эта проблема может быть решена с помощью специальной процедуры построения граничных условий, основанной на указанном выше проектировании.

Сформулируем постановку задачи, следуя [2]. Рассмотрим непрерывное отображение $S(\cdot) : H \to H$, определенное на банаховом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$, имеющее неподвижную точку $S(0) = 0$ гиперболического типа. Пусть определены два оператора проектирования P_+, $P_- : H \to H$, ограниченный линейный оператор $L : H \to H$ и непрерывное отображение $R(u) = S(u) - Lu$, такие, что в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ нуля имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&P_+ + P_- = I, \quad \|P_\pm\| \leqslant C_\pm, \quad L(P_+H) = P_+H, \quad L(P_-H) \subset P_-H,\\
&\exists\, 0 < \alpha < 1 : \|Lv\| \geqslant (1+\alpha)\|v\| \quad \forall v \in P_+H, \quad \|Lw\| \leqslant (1-\alpha)\|w\| \quad \forall w \in P_-H,\\
&\big\|R(u_1) - R(u_2)\big\| \leqslant \theta\Big(\max\big\{\|u_1\|, \|u_2\|\big\}\Big)\|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1,\, u_2 \in H
\end{aligned}
$$

с непрерывной положительной неубывающей функцией $\theta(\cdot)$, удовлетворяющей условию $\theta(0) = 0$. Здесь и далее имеются в виду элементы $u = v + w$ окрестности $\mathcal{O}$.

Обозначим через $\mathcal{M}^-$ устойчивое многообразие подмножества $\mathcal{O}$, так называемый “входящий ус” Адамара: $\mathcal{M}^- = \big\{m^0 \in \mathcal{O} : \exists\, m^{k+1} \in \mathcal{O},\, m^{k+1} = S\left(m^k\right),\, k = 0, 1, \ldots\big\}$. Представляет интерес приближенное проектирование заданного элемента $p \in \mathcal{O}$ на устойчивое инвариантное многообразие $\mathcal{M}^-$ при условии, что допустимое смещение берется из подпространства $P_+\mathcal{O}$. Это соответствует построению такого $u = v + P_-p$, что $v \in P_+\mathcal{O}$ и элемент u близок к многообразию $\mathcal{M}^-$.

В работе [2] было показано, что все известные методы решения данной задачи могут быть сформулированы как различные модификации итерационного процесса решения нелинейного функционального уравнения, задающего многообразие. Настоящая статья посвящена сравнению двух методов: метода *нулевого приближения* и метода *линеаризации* применительно к численной стабилизации в общем случае нетривиального стационарного решения ($s(x) \neq 0$) уравнения Чафе–Инфанта при $a,\ b \geqslant 0$, $x \in \Omega_0 = (-\pi/2, \pi/2)$, $y_t = y_{xx} + ay - by^3 + f(x)$, взятого с некоторым начальным возмущением $y_0(x)$. Это уравнение часто встречается в теории аттракторов дифференциальных уравнений и хорошо изучено [3]. Для нас оно представляет интерес, поскольку при необходимости легко превращается как в линейное, так и/или в неустойчивое уравнение.

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119899, Москва; e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Отметим, что применение метода нулевого приближения при проектировании на устойчивое многообразие известно для стабилизации решений более сложных уравнений (см., например, [4]), метод же линеаризации, видимо, реализован в настоящей работе впервые.

2. Численная стабилизация линейного уравнения. Процесс численной стабилизации с заданной скоростью δ, подробно изложенный в [5], состоит из трех этапов: продолжение–проектирование начального условия на более широкую область, интегрирование исходного уравнения в расширенной области, порождающее искомые граничные условия, и собственно стабилизация, т.е. интегрирование уравнения в исходной области с полученными граничными условиями. Ограничимся здесь кратким изложением основной идеи на дифференциальном уровне.

Так как в настоящем разделе рассматривается случай только линейного уравнения, то параметр b в уравнении Чафе–Инфанта положим равным нулю, а стационарное решение и, соответственно, правую часть выберем тривиальными: $s(x) = 0$ и $f(x) = 0$. Для стабилизации увеличим исходную область $\Omega_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ до интервала $\Omega = (-\pi, \pi)$. Нас интересует убывание решения в норме пространства L_2, поэтому продолжение начального условия $y_0(x)$ с Ω_0 на Ω выберем в простейшей (разрывной) форме:

$$\overline{w}(x) = \begin{cases} y_0(x), & x \in \Omega_0\,, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_0\,. \end{cases}$$

Алгоритм продолжения–проектирования с сохранением свойства непрерывности подробно изложен и проанализирован в [6].

Проведем проектирование. Возьмем из нашего уравнения $y_t = y_{xx} + ay$ оператор в правой части и рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\varphi_{xx} + a\varphi = -\,\lambda\varphi\,, \quad \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0\,. \tag{1}$$

Ее решение имеет вид

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\sin\,\frac{k}{2}\,(x+\pi), \quad \lambda_k = (k/2)^2 - a, \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{2}$$

Чтобы в области Ω решение уравнения $z_t = z_{xx} + a\,z$ с однородными граничными условиями первого рода удовлетворяло оценке $\bigl\|z(x,t)\bigr\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\exp\left(-\delta t\right)$ с некоторым заданным δ, в разложении начального условия $z_0(x)$ по собственным функциям не должно быть функций $\varphi_k(x)$ с номерами $k = 1, 2, \ldots, K$, такими, что $\lambda_K < \delta$, при этом $z_0(x)$ в исходной области Ω_0 должно совпадать с $y_0(x)$. Отсюда следует, что начальное условие $z_0(x)$ представимо в виде

$$z_0(x) = \overline{z}_0(x) + \overline{w}(x)\,, \qquad \text{где} \qquad \overline{z}_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0\,, \\ \sum\limits_{k=1}^{K} c_k\varphi_k(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_0\,, \end{cases}$$

где коэффициенты c_k определяются из условий ортогональности

$$\int\limits_{\Omega} z_0(x)\varphi_k(x)\,dx = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, K. \tag{3}$$

Соотношения (3) можно записать с помощью матрицы проектирования $A: \ A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, где $1 \leqslant i,\, j \leqslant K$, $a_{ij} = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_0} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$, $b_i = -\int\limits_{\Omega_0} y_0(x)\varphi_i(x)\,dx$. На следующем этапе необходимо проинтегрировать уравнение $z_t = z_{xx} + a\,z$ с полученным начальным условием $z_0(x)$ и нулевыми граничными (при $x = \pm\pi$) условиями по пространственной переменной. Затем при $t \geqslant 0$ возьмем след найденного решения на границе $\Omega_0 : z_\pm(t) = z(\pm\pi/2, t)$. Это будут искомые граничные условия, которые обеспечивают стремление к нулю с заданной скоростью δ решения задачи $y_t = y_{xx} + a\,y$ в области Ω_0 с начальным условием $y_0(x)$, т.е. будет выполнено неравенство $\bigl\|y(x,t)\bigr\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant \bigl\|z(x,t)\bigr\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\exp\left(-\delta t\right)$.

Перейдем к изложению дискретных аспектов стабилизации. Введем на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерную сетку $x_l = hl$, $h = 2\pi/M$, $l = 0, \pm1, \ldots, \pm M/2$ (для удобства возьмем M, кратное четырем). Рассмотрим проекции функций $\varphi_k(x)$ на сетку: $\mu_k(l) = \varphi_k(x_l)$. Векторы $\mu_k(l)$ удовлетворяют дискретной задаче на собственные значения:

$$\mu_k(l+1) - (2 - ah^2)\mu_k(l) + \mu_k(l-1) = -\nu_k h^2 \mu_k(l)\,, \quad \mu_k(-M/2) = \mu_k(M/2) = 0\,, \quad l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm M/2 - 1,$$

с соответствующими $\nu_k = \dfrac{4}{h^2} \sin^2 \dfrac{kh}{4} - a$; кроме того, эти векторы ортонормированы относительно скалярного произведения $(\mu_k, \mu_r) = h \sum\limits_{l=-M/2}^{M/2} \mu_k(l)\mu_r(l)$. Пусть δ_k^m — символ Кронеккера. Элементы матрицы проектирования a_{km} вычислим по формуле $a_{km} = \delta_k^m - h \sum\limits_{l=-M/4}^{M/4} \mu_k(l)\mu_m(l)$. Для интегрирования по времени применим полностью неявную разностную схему

$$\frac{z_m^{q+1} - z_m^q}{\tau} = \frac{z_{m+1}^{q+1} - 2z_m^{q+1} + z_{m-1}^{q+1}}{h^2} + a\, z_m^{q+1} - b\, \left(z_m^{q+1}\right)^3, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm M/2.$$

Характерные значения сеточных параметров: $\tau = 10^{-3}$, $h = \pi/256$. Реализация схемы осуществлялась правой прогонкой в сочетании с методом Ньютона (в нелинейном случае) [7]. Сходимость при этом фиксировалась максимальной по m величиной невязки, не превосходящей $\varepsilon_{\text{newt}} = 10^{-5}$; обычно для этого требовалось не более пяти итераций.

Для наглядной демонстрации процесса стабилизации строятся графики, на которых приводится величина $\Psi(t_q) = \ln\left(\|z^q\|_{L_{2,h}(\Omega)}\right)$, где $\left\|z^q\right\|_{L_{2,h}(\Omega)} = \left[h \sum\limits_{m=-M/2}^{M/2} (z_m^q)^2\right]^{1/2}$, $t_q = q\tau$. Для области Ω_0 значения индексов суммирования принадлежат диапазону $[-M/4, M/4]$. "Идеальной" стабилизации соответствуют прямые вида $\Psi(t) = -\delta t + \text{const}$, поэтому особому вниманию подлежат отклонения графиков от таких прямых.

Рассмотрим пример. Пусть зафиксированы параметры задачи: $a = 5$ (неустойчивость) и $\delta = 4$ (скорость стабилизации), а начальное возмущение задано формулой $y_0(x) = 1 - 4x^2/\pi^2$. Типичное поведение функции $\Psi(t_q)$ для неустойчивых предельных решений представлено на рис. 1: сначала она убывает со скоростью, близкой к заданной, а затем (при накоплении вычислительной погрешности) начинает расти со скоростью, определяемой величиной a $(\Psi(t_q) \approx (a - 1/2)\, t + \text{const})$.

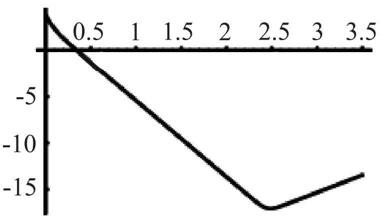

Рис. 1

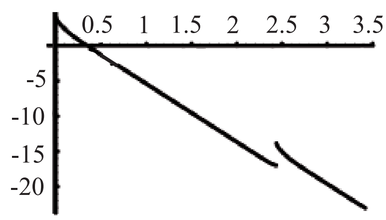

Рис. 2

На рис. 2 показан результат применения повторного проектирования в момент времени t_Q, когда накопленная вычислительная погрешность меняет знак производной функции $\Psi(t_q)$. Здесь имеется в виду, что мы осуществляем процедуру продолжения–проектирования, как в начале вычислений: берем решение z_m^Q для $m = 0, \pm 1, \ldots \pm M/4 - 1$, продолжаем его сначала нулем для остальных значений m, а затем из полученной функции "удаляем" несколько младших собственных функций (их количество определяется первоначально заданным значением δ). Как показано на рис. 2, эта операция скачком увеличивает норму решения, т.е. величину $\Psi(t_Q)$, а далее опять происходит ее убывание с заданной скоростью δ. Этот эффект имеет исключительно конечноразрядную (численную) природу, и с увеличением параметра неустойчивости a требуется более частое повторение этой процедуры.

В заключение раздела напомним, что пока рассматривался только линейный случай ($S(u) = Lu$), для которого проектирование на многообразие $\mathcal{M}^-$ осуществлялось *точно* в предположении отсутствия ошибок округлений. Для этого требовалось знание решения задачи на собственные значения, которое находилось только один раз. При наличии нелинейностей в стабилизируемом уравнении ситуация усложняется из-за одновременного влияния нескольких факторов.

3. Метод нулевого приближения. Перейдем к стабилизации нелинейного уравнения. Будем решать задачу приближенного проектирования на устойчивое многообразие следующим образом. Заменим исходный оператор S на его линеаризацию L в нулевой точке и построим проекцию элемента p на устойчивое многообразие полученной линейной задачи. Устойчивое многообразие оператора L совпадает с пространством $P_-\mathcal{O}$; следовательно, $u = P_-p$. В этом случае имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|L^n u\right\| = 0$. Для задач численной стабилизации метод нулевого приближения был предложен и опробован в [5].

Рассмотрим в области Ω_0 нелинейную задачу с параметрами $b = a = \delta = 4$ и начальной функцией $y_0(x) = \gamma(\sin x + \cos x)$, $\gamma = 0.01$. Выбор такого возмущения обусловлен двумя соображениями: чтобы его норма была невелика, с одной стороны, и чтобы не оказаться в подпространстве четных (или нечетных) функций, инвариантном относительно процесса стабилизации, — с другой.

На рис. 3 изображено поведение величины $\Psi(t_q)$, посчитанной для указанного варианта. Как можно видеть из графика, на начальном этапе решение стабилизируется со скоростью, превосходящей δ (здесь влияние нелинейности сказывается положительно), однако начиная с некоторого момента времени стабилизация прекращается из-за неустойчивости задачи и отличия между многообразиями $\mathcal{M}^-$ в линейном и нелинейном случаях. Эта ситуация аналогична изображенной на рис. 1, т.е. для продолжения стабилизации требуется новое проектирование.

На рис. 4 иллюстрируется процесс стабилизации, сопровождавшийся проектированием численного решения в моменты, когда скорость стабилизации падала до уровня $\delta/2$. Соответственно на рис. 5 изображена та же картина, но для более выраженной нелинейности: $b = 10$. Как и следовало ожидать, при увеличении параметра b количество требуемых проектирований увеличилось.

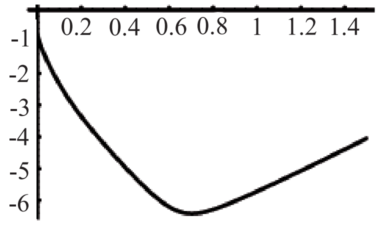

Рис. 3

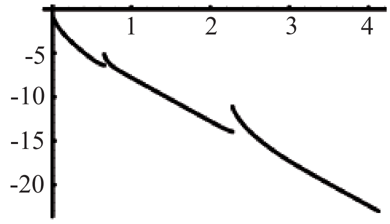

Рис. 4

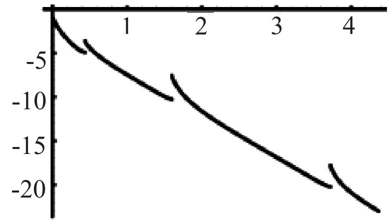

Рис. 5

По своей форме применение метода нулевого приближения очень близко к процессу стабилизации неустойчивого линейного уравнения: матрица проектирования строится один раз на основе собственных функций линейной задачи и при замедлении скорости стабилизации осуществляется новое продолжение–проектирование. Однако рассматриваемый подход обладает существенным отличием: в исходной области Ω_0 интегрируется нелинейное уравнение, а стабилизирующие граничные условия берутся из решения линейного уравнения в расширенной области Ω. Это может приводить к новому эффекту: в области Ω стабилизация продолжается, а в исходной области Ω_0 она уже прекратилась из-за значительного влияния нелинейных членов уравнения. В линейном случае такое невозможно в принципе, так как вычислительная погрешность в Ω всегда растет быстрее, чем в Ω_0, вследствие отличия в младшем (неустойчивом) собственном значении дифференциального оператора.

На основании вышесказанного можно сформулировать простую стратегию подавления роста возмущений, которые порождаются одновременно нелинейностью и вычислительной погрешностью. Проектирование продолженной начальной функции $y_0(x)$ в Ω_0 на устойчивое многообразие порождает начальное условие $z_0(x)$ в Ω. Интегрирование в обеих областях осуществляем пошагово: шаг по времени в расширенной области, фиксация граничных условий, шаг по времени в исходной области. Продвижение во времени порождает сначала стабилизацию со скоростью не ниже δ, а затем ее замедление (вплоть до прекращения). Важно, что скорость стабилизации определяется только в исходной области Ω_0. При заметном падении скорости (например, до величины $\delta/2$) независимо от причины останавливаем интегрирование, берем значения полученного численного решения в Ω_0 и осуществляем продолжение–проектирование заново. Общее количество таких циклов зависит в первую очередь от параметров уравнения a и b: сначала их частота определяется коэффициентом при нелинейности, а по мере приближения к стационарной точке — параметром неустойчивости. На рис. 4 и 5 это иллюстрируется относительным удлинением временны́х интервалов между проектированиями по мере уменьшения нормы возмущения.

Отметим, что численные эксперименты свидетельствуют о возможности интегрирования в расширенной области также и нелинейного уравнения и последующего использования в целях стабилизации полученных таким образом граничных условий. Однако теоретические основы этого подхода не известны. Поэтому внимание авторов в первую очередь посвящено традиционным методам проектирования на устойчивые многообразия.

4. Метод линеаризации. Сформулируем алгоритм проектирования на устойчивое многообразие. Выделим линейное приближение оператора S в заданной точке p, тогда $S(h) = Lh + L_p h + R_p(h)$. Построим проекцию элемента p на устойчивое многообразие данной линеаризации, т.е. на устойчивое многообразие оператора $L + L_p$. В этом случае для найденной точки $u = P_- p + v$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|(L + L_p)^n u\right\| = 0$. Для задач численной стабилизации идея этого метода была предложена в [8].

Перепишем уравнение Чафе–Инфанта $y_t = y_{xx} + a\,y - b\,y^3 + f(x)$, имеющее нетривиальное стационарное решение $s(x)$ относительно приращения $u(x,t) = y(x,t) - s(x)$:

$$u_t = u_{xx} + u(a - 3\,b\,s^2) - b\,u^2(u + 3\,s)\,. \tag{4}$$

Будем считать, что начальное возмущение задано в виде $u(x,0) = u_0(x)$.

Рассмотрим теперь линеаризацию уравнения (4) в точке $p = v(x)$:

$$z_t = z_{xx} + z(a - 3\,b\,s^2) - 3\,b\,v(v + 2\,s)z. \tag{5}$$

Отметим, что здесь в разложении нелинейного оператора S отброшен член нулевого порядка $S(p)$. Это связано с сохранением у приближенного линейного оператора $L + L_p$ точки $z = 0$ в качестве неподвижной. В противном случае для приближения нарушается важное свойство исходного оператора: $S(0) = 0$.

Если функции $s(x)$ и $v(x)$ продолжить нулем в области $\Omega \setminus \Omega_0$, то без ограничения общности можно считать, что уравнение (5) определено в Ω и пригодно для нахождения стабилизирующих граничных условий. Таким образом, метод линеаризации проектирования на устойчивое многообразие применительно к стабилизации уравнения Чафе–Инфанта состоит в следующем. В некоторый момент времени t в области Ω_0 имеется решение $u(x,t)$ (в начальный момент — $u_0(x)$). Полагаем $v = u(x,t)$, продолжаем эту функцию нулем в $\Omega \setminus \Omega_0$ и решаем спектральную задачу

$$\varphi_{xx} + \varphi(a - 3\,b\,s^2) - 3\,b\,v(v + 2\,s)\varphi = -\,\lambda\,\varphi\,, \quad \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0\,. \tag{6}$$

На основе полученных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_K$ осуществляем процедуру продолжения–проектирования функции v, ее результатом является начальная для интегрирования в расширенной области Ω функция $z_0(x)$. Далее реализуем пошаговую стратегию стабилизации, при этом из решения (5) находим граничные условия для задачи (4). При замедлении скорости стабилизации в области Ω_0 до недопустимого предела опять полагаем $v = u(x,t)$ и повторяем цикл заново.

При численной стабилизации для нахождения собственных значений в задаче (6) использовался QR-алгоритм с двойными сдвигами [9], а собственные векторы уточнялись методом обратных итераций.

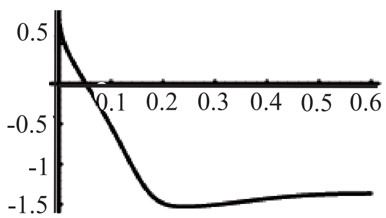

Рис. 6

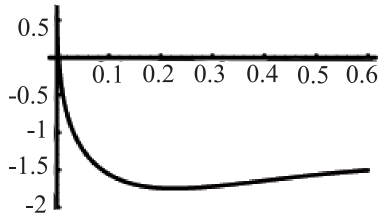

Рис. 7

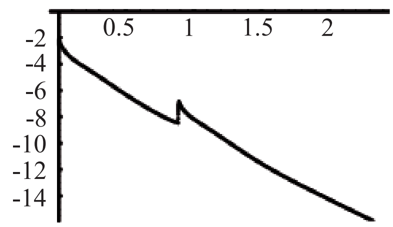

Рис. 8

Отметим различие в применении методов линеаризации и нулевого приближения. В методе нулевого приближения функция $v(x)$ равна нулю, поэтому задачу (6) достаточно решить один раз, а затем использовать полученные собственные функции для проектирования по мере необходимости. В методе линеаризации задачу (6) приходится решать каждый раз заново, однако компенсацией за это является резкое увеличение скорости стабилизации (при одинаковом количестве “удаленных” собственных функций φ_k). Кроме того, по мере приближения к стационарной точке результаты проектирования в обоих методах сближаются за счет уменьшения нормы возмущения, поэтому применение метода линеаризации оправдано лишь в начале процесса стабилизации.

Рассмотрим численный пример для задачи с параметрами $a = \delta = 5$, $b = 200$, начальной функцией $u_0(x) = \sin x + \cos x$ и стационарным решением $s(x) = \sin 2x$. На рис. 6 и 7 приведены расчеты начального этапа стабилизации в области Ω_0 на основе рассматриваемых методов проектирования (рис. 7 соответствует методу линеаризации).

При выбранных начальном возмущении и стационарном решении различие в решениях спектральных задач настолько велико, что при одинаковом количестве “удаленных” собственных функций в методе линеаризации логарифм нормы возмущения примерно в три раза меньше по сравнению с методом нулевого приближения (в момент времени $T \approx 0.1$). Это показывает наличие областей, в которых оправдано применение вычислительно более трудоемкого метода линеаризации. Имеются, конечно, и обратные примеры. В качестве иллюстрации (рис. 8) приведем график $\Psi(t_q)$, полученный на основе метода ненулевого приближения в области Ω_0, для рассматривавшейся выше задачи с параметрами $b = a = \delta = 4$ и стартовым возмущением $y_0(x) = \gamma(\sin x + \cos x)$, $\gamma = 0.01$. Стационарное решение возьмем нулевым $s(x) = 0$. На рис. 9 приведен процесс стабилизации этой же задачи на основе метода линеаризации. На первый взгляд, результаты носят парадоксальный характер, так как метод нулевого приближения выигрывает у метода линеаризации по количеству проектирований без потери скорости стабилизации.

Этот эффект несложно объяснить спецификой нелинейности в стабилизируемом уравнении. Она пропорциональна возмущению в кубе, поэтому для тривиальной стационарной точки ($s(x) = 0$) реальный порядок точности проектирования в методе нулевого приближения равен трем, тогда как в методе линеаризации порядок точности проектирования всегда равен двум, поскольку из разложения оператора отбрасываются слагаемые, начиная с квадратичных. Выравнивание порядков несложно осуществить введением нетривиального стационарного решения.

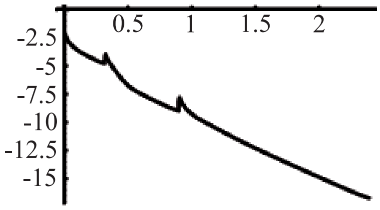

Рис. 9

5. Заключение. На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

а) оба рассмотренных в работе метода проектирования на устойчивое многообразие позволяют успешно решать задачу стабилизации неустойчивой стационарной точки;

б) метод нулевого приближения является алгоритмически более простым и требует меньших вычислительных затрат;

в) оба метода имеют одинаковый теоретический порядок точности;

г) при больших начальных возмущениях и/или сильной нелинейности в уравнениях применение метода линеаризации может значительно увеличивать скорость стабилизации по сравнению с методом нулевого приближения.

Последнее особенно важно, когда ставится вопрос о возможности стабилизации решения в принципе.

Авторы выражают благодарность А. А. Корневу за плодотворное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсиков А.В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Матем. сборник. 2001. **192**, № 4. 115–160.
2. *Корнев А.А.* Классификация методов приближенного проектирования на устойчивое многообразие // Докл. РАН. 2005. **400**, № 6. 1–3.
3. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 840. Berlin: Springer–Verlag, 1981.
4. *Chizhonkov E.V., Ivanchikov A.A.* On numerical stabilization of solutions of Stokes and Navier–Stokes equations by the boundary conditions // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. **19**, N 6. 477–494.
5. *Chizhonkov E.V.* Numerical aspects of one stabilization method // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003. **18**, N 5. 363–376.
6. *Чижонков Е.В.* Об операторах проектирования для численной стабилизации // Вычисл. методы и программирование. 2004. **5**, № 2. 42–50.
7. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Чижонков Е.В.* Численная стабилизация квазилинейных параболических уравнений и уравнений типа Навье–Стокса с помощью граничных условий // Тр. Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского Матем. общества, 2004. 71–120.
9. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.

Поступила в редакцию
21.04.2007