

УДК 519.6

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЙ НА РАЗРЫВАХ В КОНСЕРВАТИВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. В. Сафронов¹

Представлена разностная схема расчета течений газа на основе приближенного безытерационного решения задачи Римана о распаде разрыва. Особенностью схемы является использование решения данной задачи в консервативных переменных, полученного в зависимости от скоростей волн распада при выполнении соотношений на одиночных разрывах. Предложен выбор скоростей этих волн, обеспечивающий отсутствие осцилляций на газодинамических скачках и трудностей расчета зон разрежения при смене знака характеристик.

Ключевые слова: нестационарные уравнения газодинамики, задача Римана, распад разрыва, волна распада, газодинамические скачки, зоны разрежения.

1. Постановка задачи. Рассматриваются разностные схемы Годунова для расчета течений газа, основанные на аппроксимации параметров на границе ячеек сетки с помощью решения задачи Римана о распаде одномерного газодинамического разрыва. Схематически начальный разрыв газа с различными состояниями в левом и правом полупространстве распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. В зависимости от перепада давления левые и правые волны могут быть как волнами разрежения типа веера, так и разрывами типа ударных волн. Между этими волнами находятся области с постоянными значениями параметров. Точное решение задачи Римана сводится к итерационному решению системы нелинейных уравнений и требует значительных вычислительных затрат. В этой связи, помимо точного подхода, развиваются более экономичные методы, основанные на физических упрощениях газодинамической задачи Римана. Достаточно полный обзор имеющихся схем можно найти в работах [1, 2]. В [1] приведено также их сравнение на ряде тестовых задач.

Приведем краткий анализ основных схем.

Схема С. К. Годунова [3] численного решения уравнений газодинамики основана на аппроксимации параметров на границах ячеек разностной сетки с помощью точного решения задачи о распаде разрыва. Схема является наиболее надежной и точной в расчете сложных разрывных течений, однако итерационное решение задачи о распаде разрыва требует трудоемких вычислений.

Консервативные сеточно-характеристические схемы типа схем [4, 5] применяют соотношения на характеристиках в консервативных переменных. Аппроксимация в рамках данных схем интерпретируется как линеаризованное решение задачи о распаде разрыва без рассмотрения волн разрежения. Схема Рое [5] уникальна тем, что при определенном осреднении параметров поток на границе ячеек соответствует линеаризованному решению задачи о распаде разрыва с выполнением соотношений на одиночных разрывах. Эта схема хорошо зарекомендовала себя при расчете течений с ударными волнами и контактными разрывами, однако имеет недостатки, которые проявляются при расчете зон разрежения — появление нефизических скачков в случае смены знака характеристик (проблема расчета “звуковой” точки).

Методы HLL [6] и HLLC [7]. Метод HLL (Harten, Lax, van Leer) основан на двухволновом приближении с учетом разрывов типа левой и правой ударных волн без учета контактного разрыва. В схеме HLL предложен простой, но эффективный способ выбора скоростей движения этих волн по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках разностной сетки. Этот выбор исключил трудности расчета зон разрежения при смене знака характеристик, которые присущи сеточно-характеристическим схемам. Схема HLL эффективна при расчете ударных волн и зон разрежения. Однако при расчете энтропийных скачков принятое допущение приводит к неприемлемому “размазыванию” контактного разрыва. Метод HLLC (буква С обозначает Contact) в задаче о распаде разрыва учитывает контактный разрыв, скорость которого вычисляется из решения задачи в рамках “звукового” приближения [7]. Уточнение выбора скоростей движения волн при распаде разрыва в рамках схемы HLLC проведено в работе [8]. Наряду

¹ Центральный научно-исследовательский институт машиностроения (ЦНИИМаш), ул. Пионерская, д. 4, г. Королев, 141070, Московская область; e-mail: a_safron@korolev-net.ru

с использованием консервативных переменных в схеме HLLC применяются “простые” переменные. Соотношения на левой и правой волнах записываются в потоковых и консервативных переменных, а на контактном разрыве — в “простых” переменных. Подробнее особенности схем HLLC-типа рассмотрены ниже.

Согласно схеме Ошера [9] задача Римана решается в изоэнтропическом приближении при замене ударной волны пучком сходящихся характеристик. В расчетах по этой схеме не возникает трудностей при расчете “звуковой” точки и зон разрежения, связанных с постоянством энтропии в этих областях. Схема позволяет также проводить расчет ударных волн и не имеет осцилляций на скачках, однако в этом случае область применимости указанной схемы ограничена в связи с допущением о постоянстве энтропии.

В настоящей статье рассмотрен подход, основанный на приближенном решении задачи о распаде разрыва в консервативных переменных. Полученное решение оставляет свободу выбора скоростей волн распада при выполнении соотношений на одиночных разрывах. Рассмотрен вариант выбора этих скоростей, при котором метод включает в себя расчет ударных волн по схеме Рое и зон разрежения по схеме типа “звукового” приближения. Подход имеет широкий диапазон применимости без появления осцилляций на скачках и некорректностей при смене знака характеристик в зонах разрежения.

2. Разностная схема. Приведем вывод основных уравнений на примере уравнений одномерной газовой динамики:

$$U_t + F_x = 0, \quad U = (\rho, \rho u, \rho E)^T, \quad F = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho u E + P u)^T,$$

где U — консервативные переменные, F — вектор потока, ρ — плотность газа, u — скорость, P — давление, $E = e + \frac{u^2}{2}$ — полная внутренняя энергия на единицу объема и e — внутренняя энергия.

В рамках модели совершенного газа имеем $e = \frac{P}{\rho(\gamma - 1)}$, где γ — показатель адиабаты.

Разностную схему запишем в консервативном виде:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}),$$

где n — номер шага по времени с интервалом Δt и i — номер ячейки сетки по оси x с шагом разбиения Δx .

В схемах типа схемы Годунова поток на границе ячеек $F_{i+1/2}$ вычисляется из решения задачи о распаде произвольного газодинамического разрыва с начальными параметрами, равными состояниям газа в соседних ячейках сетки. Схемы устойчивы при соблюдении условия Куранта $S_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, где S_{\max} — максимальная скорость распространения возмущений.

Рассмотрим схемы с приближенным решением задачи Римана, которые основаны на соотношениях, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии на поверхности газодинамического разрыва:

$$\Delta F = S \Delta U, \quad (1)$$

где S — скорость распространения разрыва. Символ Δ обозначает разность значений соответствующей величины на разрыве.

На рис. 1 иллюстрируется схема течения в задаче о распаде разрыва с распадом на левую волну (скорость которой обозначим S_L), контактный разрыв (S_*) и правую волну (S_R). Обозначим индексами L — параметры в левой ячейке сетки, R — в правой, $*L$ — между левой волной и контактным разрывом, $*R$ — между контактным разрывом и правой волной.

Применяя соотношения (1) к одиночным разрывам на рис. 1, запишем

$$F_{*L} = F_L + S_L(U_{*L} - U_L), \quad (2)$$

$$F_{*R} = F_{*L} + S_*(U_{*R} - U_{*L}), \quad (3)$$

$$F_{*R} = F_R + S_R(U_{*R} - U_R). \quad (4)$$

Класс схем, полученных из соотношений на разрывах, основан на приближенном решении системы уравнений (2)–(4), в которой неизвестными величинами являются параметры с индексом “*”. При этом веер волн разрежения заменяется скачком. Скорости распространения волн рассматриваются как задаваемые априорно параметры, причем должны выполняться неравенства

$$S_R > S_* > S_L. \quad (5)$$

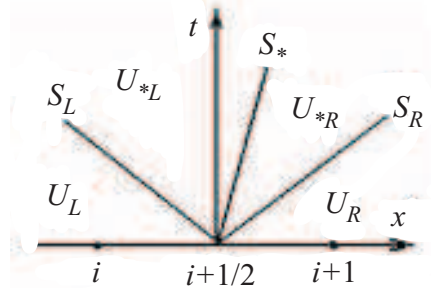


Рис. 1. Схема течения

Решение задачи носит приближенный характер, поэтому возможны варианты.

Пусть тем или иным способом определены скорости левой и правой волн S_L и S_R . В случае $S_L \geq 0$ параметры на границе ячеек соответствуют параметрам в левой ячейке сетки: $F_{i+1/2} = F_L = F_i$, а в случае $S_R \leq 0$ — в правой ячейке: $F_{i+1/2} = F_R = F_{i+1}$. Ниже будем исследовать случай $S_L < 0, S_R > 0$.

Рассматривая компоненты векторов потока и консервативных переменных в “звездной” зоне $F_{*R}, F_{*L}, U_{*R}, U_{*L}$ как неизвестные величины и учитывая, что F и U зависят от потока массы ρu , заключаем, что система (2)–(4) состоит из девяти уравнений и содержит 10 неизвестных. Таким образом, для решения системы (2)–(4) в потоковых (консервативных) переменных необходимо дополнительное условие.

Двухволновая схема HLL [6] включает в себя следующее допущение:

$$F_{i+1/2} = F_{*R} = F_{*L} = F^{\text{HLL}}, \quad U_{*R} = U_{*L} = U^{\text{HLL}}. \quad (6)$$

В этом случае решение задачи (1)–(3) имеет вид:

$$F^{\text{HLL}} = \frac{F_L S_R - F_R S_L + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}, \quad U^{\text{HLL}} = \frac{U_R S_R - U_L S_L - F_R + F_L}{S_R - S_L}. \quad (7)$$

В методе HLL предложен следующий способ определения скоростей левой и правой волны по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках:

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R), \quad (8)$$

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R), \quad (9)$$

где c_R и c_L — скорости звука в левой и правой ячейках соответственно.

При выборе (8), (9) веер волн разрежения заменяется скачком, но со скоростью распространения, соответствующей максимальному наклону характеристик в этой волне разрежения. В связи с этим диссипативные свойства такого приближенного подхода в зонах разрежения несколько выше, чем у точного метода, поэтому отсутствуют проблемы “неубывания” энтропии, а также расчета “звуковой” точки в этих зонах. В соответствии с теоремой Цемплена расчет ударных волн при этом проводится с задаваемой скоростью волны, превышающей точную, поэтому выбор скоростей волн (8), (9) обеспечивает расчет скачков без осцилляций, но с несколько большим их “размазыванием”, чем метод с точным решением задачи Римана.

В ряде случаев схема HLL оказалась эффективной. Однако допущения (6) нефизичны и приводят к неадекватным расчетам энтропийных скачков, как это показано, например, в работе [1].

С целью устранения этого недостатка в методе HLLC [7] учитывается контактный разрыв: уравнения (2)–(4) замыкаются условиями постоянства нормальной компоненты скорости и давления на контактном разрыве, т.е.

$$u_{*R} = u_{*L} = S_*, \quad P_{*R} = P_{*L} = P_*. \quad (10)$$

Наряду с использованием потоковых и консервативных переменных (2)–(4) в схеме HLLC применяются условия в “простых” переменных (10). Согласно решению задачи Римана, полученному в работах [7, 8], на первом этапе вычисляется вектор консервативных переменных в “звездной” зоне, затем по формулам (2), (4) вычисляется соответствующий вектор потока.

В работе [10] соотношения на разрывах записываются для уравнений газодинамики в лагранжевых массовых переменных. В этом случае решение задачи Римана упрощается тем, что соотношения на газодинамических разрывах, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, записываются в “простых” переменных, при этом параметрами являются массовые скорости (скорости потока массы) через поверхности волн. На контактном разрыве скорость потока массы $m = 0$, поэтому это решение зависит от двух параметров — массовых скоростей через левую и правую волну. В [10] предложен выбор этих параметров с использованием максимальной оценки их величин по состояниям газа в соседних ячейках. Схема, предложенная в [10], является самой экономичной для задачи Римана, поскольку решение задачи получается в “простых” переменных, по которым непосредственно вычисляется вектор потока на границе ячеек. Подход обобщен на сверхзвуковой случай, краткое описание этого обобщения и применение схемы к расчету струйных течений содержится в работе [11].

Ниже обсуждается решение уравнений (2)–(4) в консервативных переменных.

В дальнейшем подразумеваем, что при скорости контактного разрыва $S_* \geq 0$ поток на границе ячеек вычисляется по состоянию в левой “звездной” зоне $F_{i+1/2} = F_{*L}$, а в случае $S_* < 0$ — по параметрам в правой “звездной” зоне $F_{i+1/2} = F_{*R}$.

Основная идея предложенной схемы заключается в решении системы (2)–(4) с замыкающим соотношением на контактном разрыве, которое применяется в консервативных сеточно-характеристических методах:

$$\rho_{*R}E_{*R} - \rho_{*L}E_{*L} = \frac{1}{2}S_*^2(\rho_{*R} - \rho_{*L}). \quad (11)$$

Алгоритм решения системы (2)–(4), (11) заключается в следующем.

Исключая из уравнений (2)–(4) векторы консервативных переменных и векторы потока в “звездной” зоне, получим следующие соотношения:

$$S_*F^{\text{HLL}} = \frac{S_R(S_* - S_L)F_{*L} + S_L(S_R - S_*)F_{*R}}{S_R - S_L}, \quad (12)$$

$$U^{\text{HLL}} = \frac{(S_* - S_L)U_{*L} + (S_R - S_*)U_{*R}}{S_R - S_L}, \quad (13)$$

где векторы F^{HLL} и U^{HLL} вычисляются по формулам (7).

Выражая из уравнения (12) векторы потока F_{*K} , где $K = R$ и $K = L$, и учитывая уравнения (3) и (11), получим

$$F_{*K} = F^{\text{HLL}} - \frac{S_R S_L - S_* S_K}{S_R - S_L} (U_{*R} - U_{*L}), \quad (14)$$

где

$$U_{*R} - U_{*L} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_* \\ S_*^2/2 \end{pmatrix} (\rho_{*R} - \rho_{*L}). \quad (15)$$

Изменение плотности на контактном разрыве $\rho_{*R} - \rho_{*L}$ вычислим следующим образом.

Поскольку поток массы ρu входит как в вектор потока F , так и в вектор консервативных переменных U , то, записывая из соотношений (12), (13) уравнение для потока массы $(\rho u)^{\text{FHLL}}$ из вектора F^{HLL} и $(\rho u)^{\text{UHLL}}$ из вектора U^{HLL} , получим два уравнения для определения двух неизвестных $(\rho u)_{*L}$ и $(\rho u)_{*R}$. Из решения системы этих уравнений получим:

$$(\rho u)_{*K} = (\rho u)^{\text{UHLL}} + \frac{S_*}{S_K - S_*} [(\rho u)^{\text{FHLL}} - (\rho u)^{\text{UHLL}}],$$

где $K = R$ и $K = L$.

Отсюда, учитывая изменение величины ρu на контактном разрыве, из (3) получим изменение плотности на контактном разрыве:

$$\rho_{*R} - \rho_{*L} = \frac{S_R - S_L}{(S_R - S_*)(S_* - S_L)} [(\rho u)^{\text{FHLL}} - (\rho u)^{\text{UHLL}}]. \quad (16)$$

Таким образом, решение системы (2)–(4), (11) в консервативных переменных заключается в решении уравнений (7), (14)–(16), при этом параметрами являются три скорости волн распада: S_R , S_L и S_* .

Сеточно-характеристическая схема Рое [5] при определенном выборе наклона характеристик может также применяться для решения системы (2)–(4), (12), однако в отличие от обычной схемы Рое полученное решение оставляет свободу выбора скоростей волн распада. Если при вычислениях (7), (14)–(16) принять скорости волн распада согласно “осреднению” Рое [5], то получим точное совпадение расчетов. В этой связи для выбора скоростей волн логично принять следующие соотношения:

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_{\text{Roe}} - c_{\text{Roe}}), \quad (17)$$

$$S_R = \max(u_R + c_R, u_{\text{Roe}} + c_{\text{Roe}}), \quad (18)$$

$$S_* = u_{\text{Roe}}. \quad (19)$$

Здесь величины с индексом “Roe” вычисляются так же, как и в схеме [5]. При этом выборе, очевидно, выполняются условия (5).

Схема с выбором (17)–(19) условно называется схемой F2. Изложенный подход применим для широкого класса задач, поскольку ударные волны в рамках схемы F2 рассчитываются по схеме Рое, а расчеты в зонах разрежения проводятся по схеме типа “звукового” приближения со скоростью волны, соответствующей максимальному наклону характеристик.

Схема F2 обобщается на пространственный случай аппроксимацией членов с касательной компонентой скорости аналогично варианту схемы Roe в работе [12].

Рассмотрим обобщение схемы на примере двумерных уравнений газодинамики, расщепленных по координате x :

$$U_t + F_x = 0, \quad U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T, \quad F = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uE + Pu)^T,$$

где u и v — компоненты скорости по оси x и y соответственно.

Из уравнений (7), (14)–(16) изменится только формула (15), которая примет вид

$$U_{*R} - U_{*L} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_* \\ V_* \\ \frac{S_*^2 + V_*^2}{2} \end{pmatrix} (\rho_{*R} - \rho_{*L}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ V_* \end{pmatrix} \rho_* (v_R - v_L). \quad (20)$$

В схеме F2 касательная компонента скорости и плотность в уравнениях (20) определяется по “осреднению” Roe: $V_* = v_{\text{Roe}}$, $\rho_* = \rho_{\text{Roe}}$.

Приведем формулы “осреднения” Roe [5]:

$$\begin{aligned} u_{\text{Roe}} &= \frac{su_R + u_L}{s + 1}, \quad v_{\text{Roe}} = \frac{sv_R + v_L}{s + 1}, \quad H_{\text{Roe}} = \frac{sH_R + H_L}{s + 1}, \\ c_{\text{Roe}} &= \sqrt{(\gamma - 1) \left(H_{\text{Roe}} - \frac{u_{\text{Roe}}^2}{2} - \frac{v_{\text{Roe}}^2}{2} \right)}, \quad \rho_{\text{Roe}} = \sqrt{\rho_R \rho_L}, \quad s = \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $H = E + P/\rho$ — энтальпия.

Приведем более подробное выражение для вычисления c_{Roe} :

$$c_{\text{Roe}} = \sqrt{\frac{sc_R^2 + c_L^2}{s + 1} + \frac{(\gamma - 1)s}{2(1 + s)^2} ((u_R - u_L)^2 + (v_R - v_L)^2)}. \quad (22)$$

В завершение описания схемы отметим, что в практических расчетах сильных зон разрежения с использованием консервативных схем эффективно использование малого ограничения ($\text{fix} \sim 10^{-6}$) для положительной аппроксимации потока на границах ячеек [13]:

$$(\rho u^2 + P)_{i+1/2} = \max [(\rho u^2 + P)_{i+1/2}, \text{fix}].$$

Согласно правилу выбора скоростей волн и записи решения в виде (14) как поправки к схеме HLL, учитывающей контактный разрыв, данную схему можно отнести к схеме HLLC-типа. Основное отличие данной схемы от существующих схем HLLC-типа состоит в том, что решение задачи получается в консервативных переменных, поскольку для замыкания системы (2)–(4) используется соотношение (11), а не (10). В рамках схемы HLLC [7, 8] и схемы [10] условие (11) не выполняется, а в схеме F2, использующей консервативные переменные, соотношения в простых переменных (10) не рассматриваются. С другой стороны, схему F2 можно интерпретировать как обобщение схемы Roe, поскольку с выбором скоростей волн (17), (18) подход включает в себя расчеты скачков по схеме Roe, а зон разрежения — по схеме типа “звукового” приближения. Отметим, что при расчете разрывов с выбором скоростей волн распада (17), (18) газодинамический скачок менее “размазывается”, чем с выбором (8), (9).

В полученном решении возможны и иные варианты выбора скоростей волн.

3. О диссипативных свойствах схемы Roe. Покажем, что схема Roe с “осреднением” (21) обладает “квадратичной” схемной вязкостью, что важно для расчета интенсивных скачков [14, 15]. Диссипация схемы сеточно-характеристических схем пропорциональна наклонам характеристик, для схемы Roe пропорциональна $|u_{\text{Roe}} \pm c_{\text{Roe}}|$. Из (22) видно, что в случае интенсивных ударных волн при $\Delta u = u_R - u_L \ll 0$ скорость $c_{\text{Roe}} \sim |\Delta u|$. При этом диссипация схемы становится $\sim |\Delta u|$, а соответственно схемная вязкость $\sim (\Delta u)^2$. Другим способом это можно доказать следующим образом. В работе [12] показано, что давление в звездной зоне по схеме Roe рассчитывается следующим образом:

$$P_* = \frac{P_R + P_L}{2} - \rho_{\text{Roe}} c_{\text{Roe}} \frac{u_R - u_L}{2}. \quad (23)$$

Поскольку при интенсивных скачках $c_{\text{Roe}} \sim |\Delta u|$, из соотношения (23) получим $P_* \sim (\Delta u)^2$, т.е. схема Roe имеет “квадратичную” схемную вязкость в случае интенсивных скачков и поэтому позволяет проводить расчет газодинамических скачков без осцилляций и снижения числа Куранта. Качественно квадратичная схемная вязкость в расчетах по схеме Roe подтверждается тем, что интенсивные скачки “размазываются” на меньшее количество ячеек сетки, чем слабые, аналогично схеме с точным решением задачи Римана.

В работе [13] предложена соответствующая подпрограмма решения задачи Римана [5, 12] на языке Фортран с эффективным алгоритмом подавления нефизических скачков при смене знака характеристик.

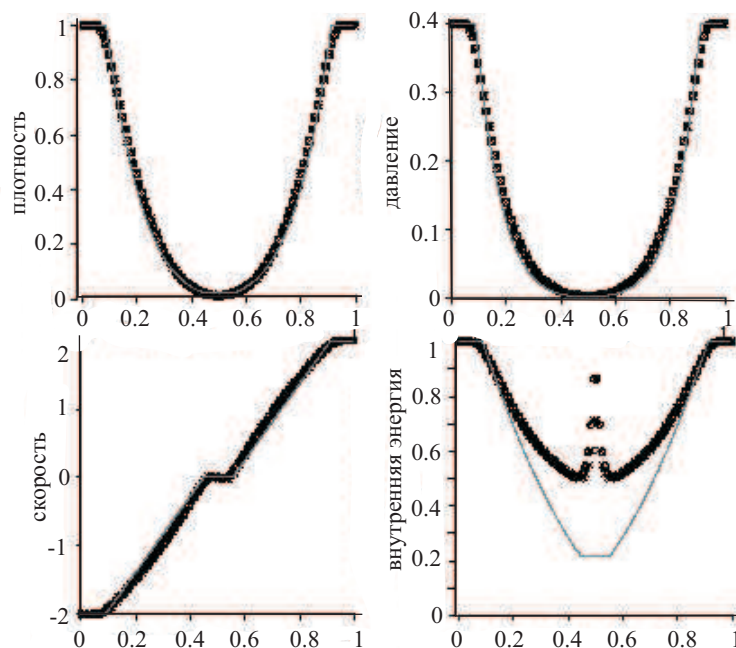


Рис. 2. Сплошная линия — точное решение, \times — схема Ошера, \circ — схема F2

Необходимо отметить, что в часто цитируемой работе [15] показано наличие квадратичной схемной вязкости в схеме Годунова, однако проведен неверный анализ диссипативных свойств схемы Roe. В этой работе на основании характеристических соотношений получено уравнение расчета давления типа (23), в котором вместо скорости c_{Roe} использована скорость звука, полученная арифметическим осреднением по параметрам в соседних ячейках; отсюда сделан неверный вывод об отсутствии принципиальных различий между “звуковым” приближением и схемой Roe. Этот вывод следует отнести к схемам типа [4], использующим арифметическое осреднение параметров.

4. Результаты расчетов. В качестве иллюстрации на рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов одномерных тестовых задач из работы [1]. Исходные данные приведены в таблице, где x_0 — начальное положение разрыва, t_k — конечное время. Начальные условия: в момент времени $t = 0$ при $x < x_0$ параметры газа задавались равным величинам с индексом 1, при $x > x_0$ — величинам с индексом 2. Число разбиений $N = 100$, $\Delta x = 1/100$, CFL = 0.9.

№ теста	ρ_1	u_1	P_1	ρ_2	u_2	P_2	x_0	t_k
1	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
2	1	-19.59745	1000	1	-19.59745	0.01	0.8	0.012

На рис. 2 приведены данные расчетов теста 1 с сильными волнами разрежения при минимальном значении давления 1.9×10^{-3} . Для сравнения на этом рисунке даны результаты расчетов по схеме Ошера, основанной на изоэнтропическом решении задачи Римана. В этом тесте в основном работает приближение с заменой веера волн разрежения волной со скоростью распространения, соответствующей максимально-му наклону характеристик. Как можно видеть, предложенная схема работоспособна в зонах разрежения

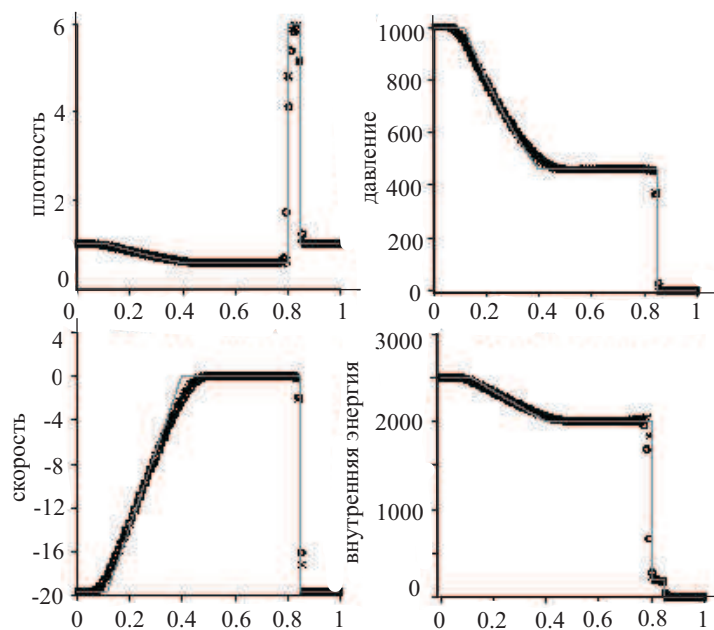


Рис. 3. Сплошная линия — точное решение, × — схема Годунова, o — схема F2

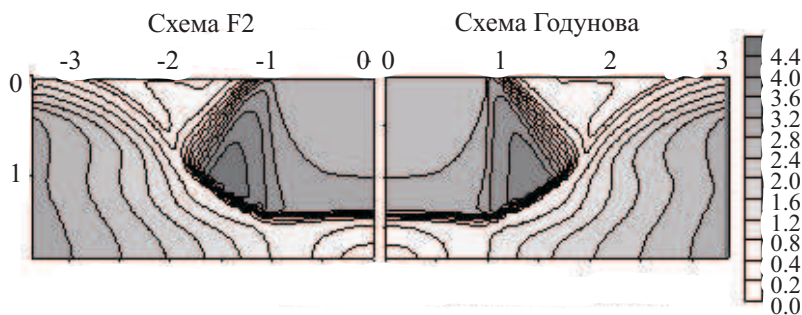


Рис. 4. $M_a = 2.52$, $P_a = 15$. Изолинии чисел Маха

и дает результаты, близкие к схеме Ошера. Отметим, что схема Рое с различными алгоритмами стабилизации типа “энтропийной” коррекции не позволяет провести расчет этого теста [1].

На рис. 3 представлены результаты расчетов разрыва с начальным перепадом давлений 10^5 . Течение включает в себя интенсивный скачок, контактный разрыв и волну разрежения. На этом рисунке даны результаты расчетов и по схеме Годунова. Как можно видеть, предложенная схема не имеет осцилляций на скачках и результаты расчетов разрывов близки к результатам схемы Годунова.

На рис. 4 и 5 приведены сравнительные результаты расчетов при взаимодействии затопленной осесимметричной струи с преградой. Параметры на срезе сопла: число Маха $M_a = 2.52$, отношение давления к внешнему давлению $P/P_e = 15$, $\gamma = 1.4$ и температура торможения равна внешней температуре. Расчеты проводились по схемам первого порядка на квадратной сетке 30×100 ячеек. Граничные условия: на оси симметрии и на стенке — условия отражения, на срезе сопла — параметры истечения, на свободных границах задавались параметры внешней среды. В обоих случаях через 6000 итераций при одинаковом числе Куранта, равном 0.95, максимальное изменение плотности за шаг по времени в

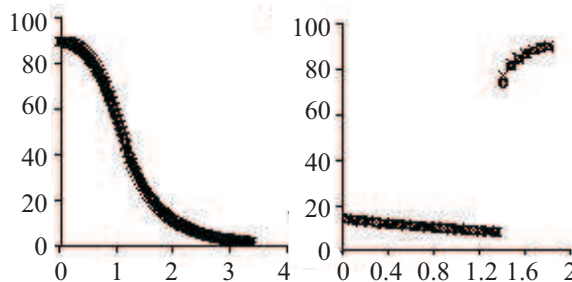


Рис. 5. × — схема Годунова, o — схема F2

ячейках сетки по отношению к этому параметру на одном шаге счета имело порядок 10^{-10} , при этом время счета по предложенной схеме в три раза меньше, чем по схеме Годунова. На рис. 4 приведены изолинии чисел Маха. На рис. 5 приведены распределения давления (отнесенного к внешнему) вдоль преграды и на оси струи. Область течения включает в себя зоны разрежения, интенсивные скачки, контактный разрыв и переход от дозвукового течения к сверхзвуковому (вдоль преграды), которые рассчитываются сквозным образом. Как можно видеть, результаты хорошо согласуются между собой.

Заключение. Представлена новая экономичная схема расчета сложных разрывных течений газа, имеющая широкий диапазон применимости. Метод основан на приближенном решении задачи Римана в консервативных переменных с выполнением соотношений на одиночных разрывах. Параметрами схемы являются скорости распространения волн в задаче о распаде разрыва. Предложен выбор этих скоростей, при котором расчет ударных волн выполняется по схеме Рое, а зон разрежения — по схеме типа “звукового” приближения. При использовании данного подхода осцилляции на газодинамических скачках не возникают и отсутствуют трудности, связанные с расчетом “звуковой” точки в зонах разрежения при смене знака характеристик. Результаты численных расчетов близки к результатам схемы Годунова, а время счета типовых задач уменьшается примерно в три раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. **47**, вып. 3. 271–306.
4. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // ЖВМ и МФ. 1978. **18**, № 6. 1476–1492.
5. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. **43**, N 2. 357–372.
6. Harten A., Lax P.D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM J. Numer. Anal. 1981. **18**. 289–315.
7. Toro E.F., Spruce M., Speares S. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // Shock Waves. 1994. **4**. 25–34.
8. Batten P., Clarke N., Lambert C., Causon D.M. On the choice of savespeeds for the HLLC Riemann solver // SIAM J. Comput. 1997. **18**, N 6. 1553–1570.
9. Osher S., Solomon F. Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws // Math. Comput. 1982. **38**. 339–374.
10. Сафронов А.В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение. 2006. Вып. 2. 152–158.
11. Сафронов А.В. Метод расчета струй продуктов сгорания при старте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2006. **4** (<http://chemphys.edu.ru/2006-10-23-001.pdf>).
12. Roe P.L., Pike J. Efficient construction and utilization of approximate Riemann solutions // Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. Amsterdam: North Holland, 1984. 499–518.
13. Сафронов А.В. Способ стабилизации сеточно-характеристических схем для уравнений газодинамики // Вычислительные методы и программирование. 2007. **8**, № 1. 6–9.
14. Рунтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
15. Чаракчян А.А. Об алгоритмах расчета распада разрыва для схемы С. К. Годунова // ЖВМ и МФ. 2000. **40**, № 5. 782–796.

Поступила в редакцию
30.12.2006